Historische Erfahrungen mit Mathematik

Bei der Auseindersetzung mit einem historischen Text können Schülerinnen und Schüler einen anderen Zugang zur Mathematik gewinnen.
Sie lernen die Entwicklung mathematischer Begriffe kennen und sehen den Bezug der Mathematik zu Anwendungen, Kultur und Philosophie. Außerdem wird den Lernenden bewusst, dass Mathematik sehr stark mit den Personen zusammenhängt, die sie entwickelt haben.

Hans Niels Jahnke

geb. 1948, Apl. Professor am Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld

Dies ist das 3. Heft zur Geschichte der Mathematik, das in dieser Zeitschrift erscheint (nach Heft 19 (1986), Hrsg. Lutz Führer, und Heft 47 (1991), Hrsg. Jürgen Schönbeck). Das signalisiert ein nicht geringes Interesse am Thema. Lange Zeit ist die Geschichtlichkeit der Mathematik im Unterricht weitgehend ignoriert worden. Ausnahmen waren Martin Wagenschein und Alexander Israel Wittenberg. Inzwischen gibt es aber in Deutschland und außerhalb eine ganze Reihe von Lehrern und Didaktikern, die an der Einbeziehung historischer Inhalte in den Mathematikunterricht arbeiten. Lehrerprüfungsordnungen und Lehrpläne sehen in letzter Zeit verstärkt mathematikgeschichtliche Inhalte vor, Schulbücher stellen sich auf den Trend ein. Für eine vor allem auf Bayern bezogene Beschreibung der Situation vergleiche man Toepell (1996).

Viele Lehrende sind überzeugt, dass die Geschichte der Mathematik gute Möglichkeiten bietet, mathematische Inhalte für ihre Schülerinnen und Schüler bedeutungsvoll zu machen. Die mathematischen Ideen, Begriffe und Techniken sind irgendwann einmal aus konkreten Fragen, die Menschen gestellt haben, entstanden, und wenn man zu dieser Entstehung zurückgeht, sollte sich ihre Bedeutung besser erschließen. Dahinter steht die Idee der **Partizipation**. In der Auseinandersetzung mit einem Quellentext, einer Aufgabe, einer Anwendung oder einer bestimmten Schreibweise werden die Lernenden in eine für sie zunächst fremde Umgebung hineingezogen, die sie sich nach und nach erschließen. Der Pädagoge H. Roth benutzte dafür den Begriff der „originalen Begegnung“ (Roth 1969).

Geschichte der Mathematik kann beitragen

- zu Einsichten in die **Entwicklung mathematischer Begriffe**,
- zu einem vertieften Verständnis der **Rolle der Mathematik in unserer Welt:** Bezug zu Anwendungen, Kultur und Philosophie,
- zur Wahrnehmung und zum Verstehen der **subjektiven Seite** der Mathematik: Ziele und Intentionen mathematischer Begriffsbildungen und Verfahren, Möglichkeiten alternativer Wege, persönliche Aspekte.

Für den Unterricht kann man sich verschiedene Typen von historischen Gegenständen, Materialien und Aktivitäten vorstellen, um diese Ziele zu erreichen:

- Die Lernenden beschäftigen sich mit einer vom heutigen Verständnis abweichenden Auffassung eines mathematischen Begriffs und erlangen Einsichten in seine Entwicklung. Hierzu bieten die Arbeiten von Gerber (Begriff des Differentials und des unendlich Kleinen in der Frühgeschichte der Differentialrechnung), Kaske (geometrische Auffassung der quadratischen Gleichungen bei den Arabern) und van Maanen (Wurzeln der Begriffe Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert im 17. Jahrhundert) in diesem Heft Anregungen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten interessante Aufgaben aus historischen Lehrbüchern (vgl. den Beitrag von Führer in diesem Heft).
- Die Lernenden untersuchen historische, heute vielleicht überholte Rechentechniken. Der Beitrag von Biermann in diesem Heft beschreibt eine Unterrichtsreihe zu Adam Ries, bei der auch der zeitgeschichtliche Kontext ernst genommen wird.
- Die Schülerinnen und Schüler untersuchen interessante Anwendungen der Mathematik in der Geschichte. In einigen Fällen sind sie einfacher und übersichtlicher als heutige Anwendungen und haben zudem ein besonderes Flair. Einen Überblick über Anwendungen in der frühen Neuzeit in Ballistik, Navigation, Vermessungswesen und Festungsbau gibt Führer (1986). Man vergleiche auch das interessante Buch Hogben (1953). Allerdings ist zur konkreten Erschließung dieser reichhaltigen Tradition durch Quellen und andere Materialien noch viel zu tun. In diesem Heft behandelt der Artikel von Jahnke eine antike Anwendung der Geometrie in der Astronomie.

Wenn solche Aktivitäten zu einem vertieften Verständnis von Mathematik führen sollen, dann kann es dabei allerdings nicht einfach um das bloße Zur-Kenntnis-Nehmen von Tatsachen gehen. Vielmehr sollten wir beim Nachdenken einen Kreis durchlaufen und in einen Dialog mit der Quelle eintreten. Indem wir uns zunächst auf die Andersartigkeit eines historischen Stückes Mathematik einlassen, werden wir dazu geführt, die historische Sicht mit unserer eigenen in Beziehung zu setzen und so schließlich unser aktuelles Verständnis zu vertiefen.

Sich auf Mathematikgeschichte einlassen

Mathematikgeschichtliche Inhalte werfen sowohl in **inhaltlicher** als auch in **methodischer** Hinsicht besondere Probleme auf. Aufgrund ihrer Ausbildung haben die meisten Lehrerinnen und Lehrer ein geringes Überblickswissen über die Geschichte der Mathematik und keine Erfahrung mit der Lektüre von historischen Quellen. Das muss zwangsläufig zu einer gewissen Unsicherheit führen.

Zum anderen dürfen auch die methodischen Probleme nicht unterschätzt werden. Geschichtliche Inhalte erfordern einen besonderen Umgang mit Sprache, der im Mathematikunterricht in der Regel nicht gepflegt wird. Außerdem muss man neue Prioritäten für seinen Unterricht setzen, um die Geschichte nicht nur als Anlass zu nehmen, von dem aus dann sehr schnell in die „eigentliche" Mathematik übergeleitet wird.

Gerade die andersartige Ausdrucksweise historischer Autoren macht die Substanz und den Reiz einer Beschäftigung mit Geschichte aus. Daher muss man sich im Unterricht in besonderer Weise auf die sprachlichen Aspekte und den Kontext einer mathematikgeschichtlichen Episode einlassen. Lehrer und Schüler sollten bereit sein, auf eine intellektuelle Entdeckungsreise in eine andere Welt zu gehen. An einem Quellentext von Heron von Alexandrien, bei dem es um die mathematische Behandlung der Lichtreflexion geht, möchte ich im Folgenden zeigen, wie reichhaltig und verständnisfördernd eine solche Entdeckungsreise sein kann. Die mit dem Reisen zwangsläufig verbundenen Mühen sollen dabei nicht verschwiegen werden.

Wenn man sich mit Quellen auseinander setzt, dann arbeitet man im Prinzip wie ein Historiker, und in der Tat kann man die Auffassung vertreten, dass die hermeneutische Methode der Historiker eine unmittelbare pädagogische Bedeutung für den Mathematikunterricht hat (Jahnke 1995, Windmann 1986). Zum Verstehen eines Textes gehört es, nach der Biographie des Autors zu fragen, nach den Absichten, die er mit dem vorliegenden Text verfolgt, den Adressaten, die er anspricht. Ebenso sind die zeit- und wissenschaftsgeschichtlichen Voraussetzungen des Textes von Bedeutung. Alle diese Fragen sind für die Schülerinnen und Schüler neu und ungewohnt im Vergleich mit der Lektüre des Schulbuches. Bei der inhaltlichen Deutung geht es dann darum, sich auf die Gedanken anderer Menschen, die in einer anderen Zeit und einer anderen Kultur gelebt haben, einzulassen. Was sind die gedanklichen Voraussetzungen einer historischen Person, was ist mit einem bestimmten Begriff gemeint? Nicht immer können diese Fragen anhand der Quelle vollständig und eindeutig geklärt werden, und man muss sich mit (begründeten) Vermutungen zufrieden geben. So verbinden sich bei der Lektüre von historischen Texten auf einzigartige Weise Hypothesenfindung und -abwägung mit streng logischem Vorgehen.

Da die Lektüre historischer Texte ein anspruchsvolles Unternehmen ist, sollten die Schülerinnen und Schüler sich in der Regel schon mit der in Frage stehenden Mathematik auseinander gesetzt haben. Das Bemühen, einen Text zu verstehen, erfordert die **Anwendung** mathematischer Kenntnisse und Einsichten in einer Problemsituation, die von üblichen Übungsaufgaben verschieden ist.

„Bei gleichen Winkeln ist die Reflexion vernunftgemäß"

Heron von Alexandria (ca. 40–120 n. Chr.) hat in seiner „Katoptrik" erstmalig bewiesen, dass das Licht bei Reflexion den kürzesten Weg zurücklegt. Von Heron sind einige Bücher überliefert, in denen es um Probleme der angewandten Mathematik geht: Vermessungskunde, Stereometrie, Mechanik und Optik. In den Schriften über Mechanik werden raffinierte Maschinen beschrieben, und sein Werk ist eine bedeutende Quelle für unsere Kenntnis der antiken Technologie. Von Heron stammt insbesondere die Beschreibung eines Apparates, der aus Wasserdampf Bewegung erzeugt, eines Vorläufers heutiger Dampfturbinen.

Herons „Katoptrik" ist uns in einer lateinischen Übersetzung überliefert, die 1269 von Wilhelm von Moerbeek angefertigt wurde. Der Text in **Kasten 1** (S. 6/7) ist der zweisprachigen Ausgabe (Nix/Schmidt 1900) entnommen. Die Abbildungen sind Rekonstruktionen der Originalzeichnungen.

Heron verstand unter Katoptrik die Lehre von der Spiegelung des Lichtes. In seiner Abhandlung greift er weit aus. Nach einer allgemeinen Einleitung diskutiert er die Grundlagen seiner Theorie, und er setzt die Geradlinigkeit der Lichtausbreitung, unendliche Lichtgeschwindigkeit und das Prinzip des kürzesten Weges miteinander in Beziehung. Nebenbei erfahren wir noch etwas über Herons Auffassung des Sehvorgangs (Abschnitt II). Abschnitt III (im Kasten nicht wiedergegeben) erklärt, an welchen Oberflächen Reflexion eintritt.

Im nächsten Schritt behandelt er die Reflexion am ebenen und am gekrümmten Spiegel (Abschnitt IV und V). Hier findet sich Herons berühmter Beweis des Reflexionsgesetzes. Genauer gesagt zeigt er, dass das Licht den kürzesten Weg zurücklegt, wenn Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel ist. Am Schluss von Abschnitt IV zeigt er auch die Umkehrung: Wenn *gbd* (Figur 1) der kürzeste Lichtweg ist, dann sind bei jedem anderen Lichtweg Einfalls- und Reflexionswinkel verschieden.

Im Mittelteil seiner Abhandlung behandelt er eine Reihe von Sätzen über den Strahlengang an verschiedenen Typen von Spiegeln. Der ganze letzte Teil ist praktischen Anwendungen gewidmet. Im Kasten werden beispielhaft die Konstruktion eines „Spions" und eines „Geisterspiegels" vorgestellt, ohne auf Einzelheiten einzugehen.

Betrachtet man diesen Text als ganzen, so ist er offenbar sehr vielgestaltig. Die Rolle der Mathematik bei der Erklärung natürlicher Phänomene kommt ebenso ins Spiel wie ihre Anwendung auf technische Fragestellungen. Bei der Behandlung im Unterricht wird man Schwerpunkte setzen müssen. Entweder ist man stärker am Reflexionsgesetz interessiert, dann wird man einen Akzent auf den Anfangsteil setzen. Oder man konzentriert sich auf die technischen Anwendungen, möglicherweise mit der Idee, einen Trickspiegel real nachzubauen. Dann wird man größeres Gewicht auf den letzten Teil legen.

Mathematisch setzt der Beweis des Reflexionsgesetzes nur Kongruenzgeometrie voraus, könnte also in Klasse 8 behandelt werden. Besser wäre aber eine Bearbeitung in Klasse 9 oder 10, etwa im Zusammenhang von Optimierungsproblemen (vgl. Schupp 1992). Wie Euklid notiert Heron seinen Beweis Schritt für Schritt, ohne die übergreifende Idee herauszustellen. Es empfiehlt sich daher, zuvor einen eigenen Beweis

I.

. . . . . .

II.

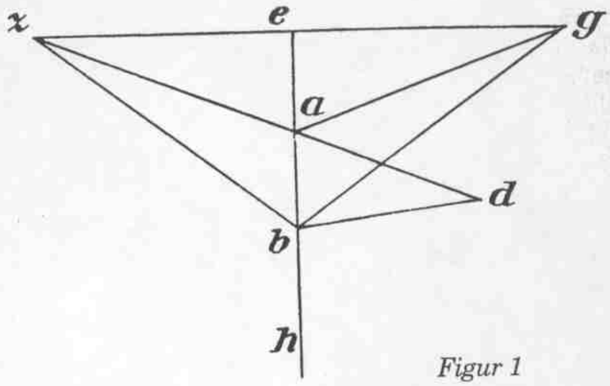
Fast von allen, die über Dioptrik und Optik geschrieben haben, ist nun in Erwägung gezogen, aus welchem Grunde die von uns aus einfallenden Sehstrahlen von den Spiegeln reflektiert werden und die Reflexion unter gleichen Winkeln bilden. Daß wir aber zufolge der Sehstrahlen sehen, welche in geraden Linien von dem Sehorgan ausgehen, durfte folgendermaßen dargethan werden. Denn alles, was sich mit ununterbrochener Schnelligkeit bewegt, das bewegt sich in gerader Linie, so wie wir es bei den von den Bogen abgeschnellten Pfeilen sehen. Denn wegen der (Wucht der) entsendenden Kraft sucht der sich bewegende Gegenstand sich auf einer Linie zu bewegen, die rücksichtlich der räumlichen Entfernung die kürzeste ist, da der Gegenstand keine Zeit hat zu einer langsameren Bewegung, um auf einer Linie, die der Entfernung (Strecke) nach länger ist, sich zu bewegen. Denn das läßt die (Wucht der) treibenden Kraft nicht zu. Darum ist also offenbar, daß die Schnelligkeit, welche der Gegenstand zu erreichen strebt, nur auf dem kürzesten Wege erreicht wird. Die Gerade ist aber die kürzeste von den Linien, welche dieselben Endpunkte haben.
Daß aber auch die von uns ausgehenden Sehstrahlen sich mit unendlicher Schnelligkeit bewegen, kann man noch aus folgendem lernen. Wenn wir nämlich, nachdem wir die Augen geschlossen hatten, wieder zum Himmel sehen, so gelangen ihre Strahlen (unmittelbar) ohne irgendwelchen zeitlichen Zwischenraum zum Himmel. Denn im selben Augenblicke, in dem wir emporblicken, sehen wir die Sterne, obgleich doch, so zu sagen, die Entfernung unendlich ist. Auch wenn also diese Entfernung noch weit größer wäre, so würde sich der Vorgang jedenfalls wiederholen, so daß sich daraus ergiebt, daß die (von uns) ausgehenden Sehstrahlen mit unendlicher Geschwindigkeit ausstrahlen. Daher erleiden sie also (beim Ausstrahlen) keine Unterbrechung (in der Bewegung), noch machen sie einen Umweg oder einen Weg auf einer gebrochenen Linie, sondern sie bewegen sich auf der kleinsten Linie, nämlich der geraden.

III:

. . . . . .

IV.

Daß also die auf polierte Körper treffenden Strahlen reflektiert werden, ist, wie wir glauben, ausreichend dargethan. Daß sie aber auch auf ebenen und (sphärisch) gekrümmten Spiegeln in gleichen Winkeln reflektiert werden, werden wir mit denselben Gründen beweisen, nämlich mit der Geschwindigkeit des Einfalls und der Reflexion. Denn man muß es wieder mit Hilfe der kleinsten Geraden erweisen. Ich behaupte also, von allen einfallenden, nach demselben Punkte reflektierten Strahlen sind bei ebenen und gekrümmten Spiegeln am kürzesten die, welche unter gleichen Winkeln reflektiert werden. In diesem Falle, also bei gleichen Winkeln, ist die Reflexion vernunftgemäß.



Figur 1

Es sei ab (Fig. 1) ein ebener Spiegel, Punkt g aber das Sehorgan (Auge), d das Gesehene. Und es falle in den Spiegel der Strahl ga, und man verbinde ad. Es sei ferner der Winkel eag dem Winkel bad gleich. In ähnlicher Weise falle ein anderer Strahl gb ein, und man verbinde bd. Ich behaupte, daß

$$ga + ad < gb + bd$$

sind. Man fälle von g auf ab das Lot ge und verlängere ge und da bis z und verbinde zb. Da ja

$$\angle bad = \angle zae$$

als Scheitelwinkel und

$$\angle zae = \angle eag$$

ist, aber auch die Rechten bei e (einander gleich sind), so ist also

$$za = ag$$
$$zb = bg.$$

Da nun

$$zd < zb + bd,$$
$$za = ag$$
$$zb = bg.$$

so sind also

$$ga + ad < gb + bd,$$

weil nämlich

$$\angle eag = \angle bad,$$

aber

$$\angle ebg < eag,$$
$$\angle hbd > bad,$$
$$\angle hbd \text{ also viel } > ebg.$$

V.

Man denke sich auch einen gekrümmten Spiegel, bei dem ab die Peripherie (Fig. 2), g das Auge, d das Gesehene sei. Und es sollen ga und ad unter gleichen Winkeln einfallen, gb und bd aber unter ungleichen. Ich behaupte, daß

$$ga + ad < gb + bd$$

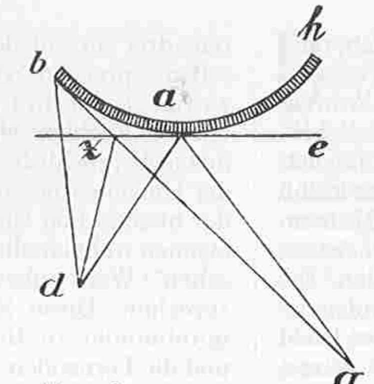
sind. Man ziehe nämlich die Tangente eaz. Es ist also $\angle hae = baz$ und der übrige $\angle eag = \angle zad$. Verbindet man also zd, so sind auf Grund des früheren Beweises

$$ga + ad < gz + zd.$$
$$gz + zd < gb + bd.$$

Also

$$ga + ad < gb + bd.$$

Kasten 1: Quellentext: Die Katoptrik von Heron (nach Nix/ Schmidt 1900, S. 321–361)

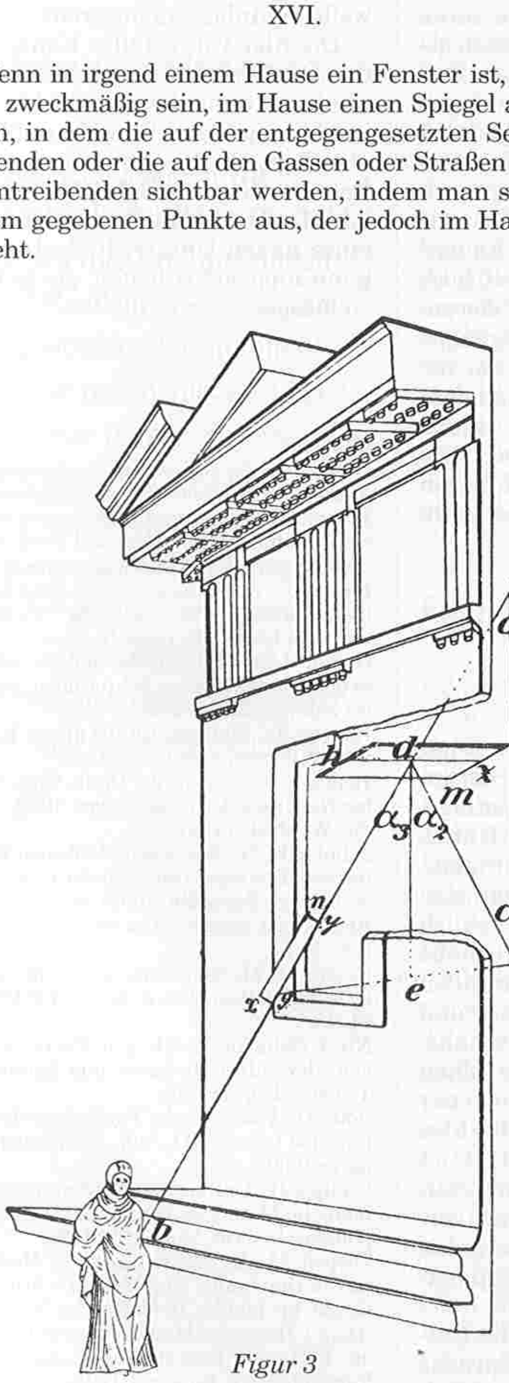


Figur 2

. . . .

XVI.

Wenn in irgend einem Hause ein Fenster ist, so dürfte es zweckmäßig sein, im Hause einen Spiegel aufzustellen, in dem die auf der entgegengesetzten Seite Kommenden oder die auf den Gassen oder Straßen sich Herumtreibenden sichtbar werden, indem man sie von einem gegebenen Punkte aus, der jedoch im Hause liegt, sieht.

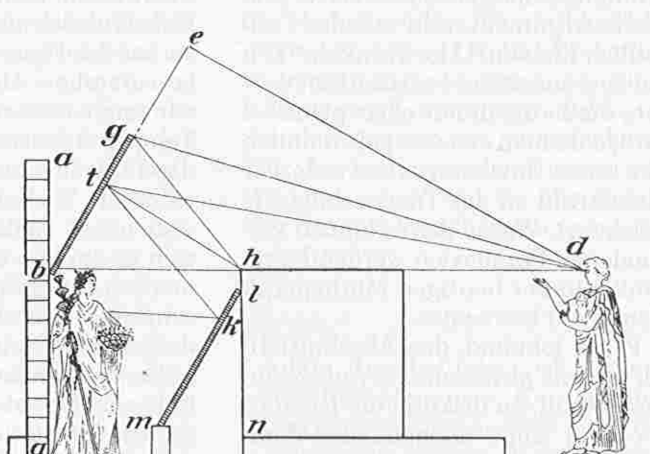


Figur 3

. . . .

XVIII.

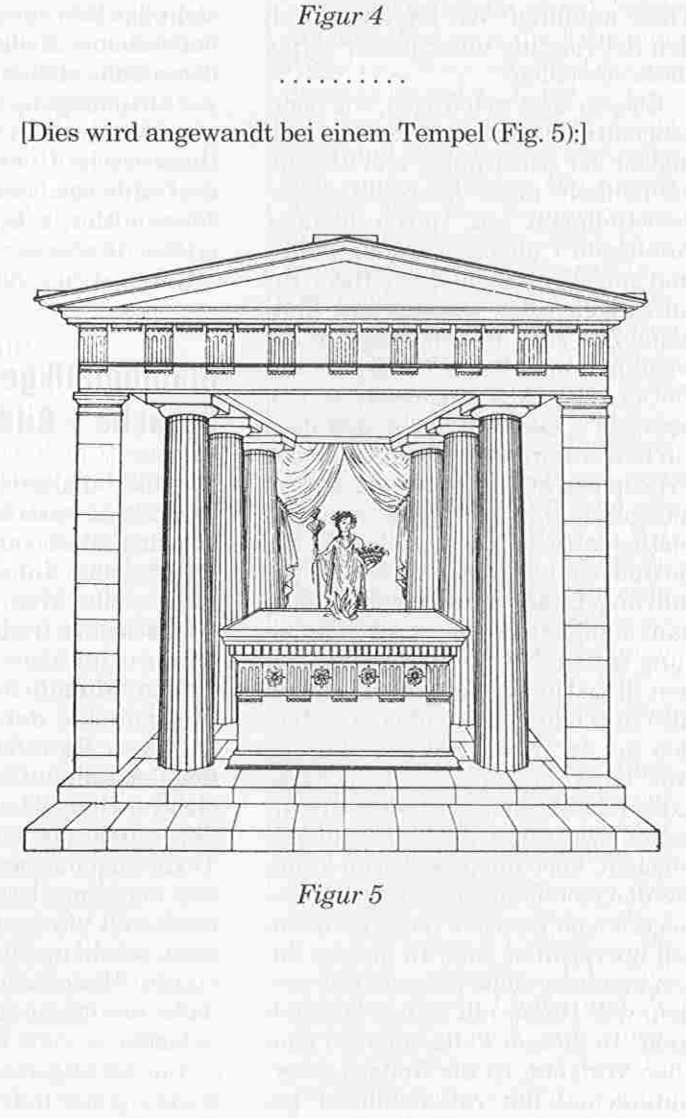
Einen Spiegel an einem gegebenen Platze so aufzustellen, daß jeder Herantretende weder sich selbst noch irgend jemand anders sieht, sondern allein das Bild, das jemand vorher ausgewählt hat.



Figur 4

. . . .

[Dies wird angewandt bei einem Tempel (Fig. 5):]



Figur 5

mit den Schülerinnen und Schülern zu erarbeiten. Die von g ausgehenden Strahlen werden durch gleichlange Linienzüge ersetzt, die von z ausgehen (Figur 1). Jeder von zad verschiedene Linienzug ist länger als zad. Dann kann man im Text nachsehen, wie Heron es gemacht hat. Beim gekrümmten Spiegel (Abschnitt V) sollte die Argumentation mit den (unendlich kleinen) „Hornwinkeln" (Figur 2, $\angle hae$ und $\angle baz$) beachtet werden, durch die unmittelbar plausibel wird, dass man an einer gekrümmten Fläche so tun kann, als werde der Lichtstrahl an der Tangentialebene reflektiert. Wegen der mit ihnen verbundenen Paradoxien werden Hornwinkel in der heutigen Mathematik nicht mehr betrachtet.

Es ist lohnend, den Abschnitt II, der Herons physikalische Auffassungen enthält, zu diskutieren. Die Idee der vom Auge ausgehenden Sehstrahlen ist zunächst überraschend. Was kann man zugunsten dieser These anführen? Wie kann man sich den Sehvorgang unter dieser Hypothese vorstellen?

Ebenso lässt sich fragen, wie überzeugend die Begründung der Geradlinigkeit der Sehstrahlen und der Unendlichkeit ihrer Ausbreitungsgeschwindigkeit ist. Heron benutzt Analogien („abgeschossener Pfeil") und appelliert an alltagsweltliche Erfahrungen („der Gegenstand [hat] keine Zeit zu einer langsameren Bewegung, um auf einer Linie, die der Entfernung nach länger ist, sich zu bewegen"). Letztlich bleibt aber doch ein harter Kern übrig. Wenn man das Prinzip des kürzesten Weges einmal akzeptiert hat, dann folgt aus ihm mathematisch, dass Einfalls- und Reflexionswinkel gleich sind, eine Erfahrungstatsache, die Heron auch ganz unabhängig von dieser Herleitung bekannt war. In der allgemeinen Struktur ist die Argumentation also durchaus nicht völlig verschieden von der in der modernen Physik. Aus einer allgemeinen Hypothese („das Licht breitet sich auf dem kürzesten Weg aus"), die man plausibel machen, aber nicht beweisen kann, werden eine Reihe logischer Schlussfolgerungen gezogen, die experimentell überprüfbar sind. In diesem Zusammenhang sollte thematisiert werden, was Heron mit seiner Feststellung „In diesem Falle, also bei gleichen Winkeln, ist die Reflexion vernunftgemäß [lat: rationabiliter]" gemeint haben könnte. Vielleicht wollte er nur sagen, dass hier ein mathematisch formulierbares Prinzip vorliegt, vielleicht meinte er aber auch, dass die Welt optimal eingerichtet ist.

Interessant sind auch die Anwendungen „Spion" und „Geisterspiegel". Der (hier nicht abgedruckte) Begleittext zum „Spion" ist nicht ganz leicht, weil er einige geometrische Sachverhalte voraussetzt, die heute meistens nicht mehr behandelt werden. Die Konstruktion des „Geisterspiegels" ist aus der Figur und dem Text leicht zu verstehen. Heron erklärt genau, wie man diesen Spiegel in einem Tempel aufzustellen hat und woher das Licht kommen muss, um die gewünschte Wirkung zu erzielen.

In einem letzten Schritt kann man sich Gedanken über die Adressaten machen, für die Heron vermutlich geschrieben hat. Die im letzten Teil dargestellten Anwendungen legen nahe, dass er an Techniker gedacht hat, die für eine reiche Kundenschicht arbeiteten und teils spielerische Bedürfnisse befriedigten, teils alltägliche Probleme lösten. Es entsteht das Bild einer saturierten, hoch entwickelten Zivilisation. Auf der anderen Seite stehen die Überlegungen zur Grundlegung der Optik am Beginn der Quelle. Dies sind eindeutig theoretische Überlegungen, die darauf schließen lassen, dass auch Wissenschaftler, z. B. Herons Kollegen an der Akademie von Alexandria, zu seinen Lesern gehörten.

Mathematikgeschichte – Sprache – Bildung

Die hier diskutierte Quelle zeigt, welch hohe sprachliche Anforderungen die Einbeziehung mathematikgeschichtlicher Inhalte in den Unterricht stellt. Wenn man Mathematikgeschichte treibt, sollte man sich diesen Anforderung auch wirklich stellen. Mündliche und schriftliche Sprache sind dabei gleichermaßen wichtig. Die Schülerinnen und Schüler sollten Gelegenheit zu ausgiebiger Diskussion haben, sie sollten aber auch zur Produktion eigener Texte angehalten werden. Die Idee des mathematischen Aufsatzes ist uralt und klingt, weil sie nie realisiert wird, inzwischen etwas verstaubt. Historische Inhalte würden dafür natürliche Anknüpfungspunkte bieten.

Ein wichtiger Aspekt ist die Entwicklung der individuellen Sprache der Schülerinnen und Schüler (Gallin/Ruf 1990). Bei der Lektüre historischer Texte haben sie es mit mindestens drei verschiedenen mathematischen „Sprachen" oder Sprachebenen zu tun: 1. der im Unterricht gesprochenen Fachsprache, einer Mixtur aus fachsprachlichen Elementen und der Umgangssprache, 2. der Sprache der historischen Quelle, und 3. ihrer eigenen individuellen („idiosynkratischen") Weise, über Mathematik zu sprechen. Diese Sprachen sollten miteinander in Beziehung treten, und die Lernenden sollten in der Lage sein, flexibel von einer in die andere Sprache zu wechseln. Darin liegt ein Bildungsziel der Einbeziehung historischer Inhalte in den Mathematikunterricht, das weit über den jeweiligen Anlass hinausgreift.

Die hier vorgestellte Konzeption der Quellenlektüre macht letztlich nur Sinn, wenn der Unterricht insgesamt ein größeres Gewicht auf Reflexion legt, als dies üblicherweise der Fall ist (Neubrand 1990). Insofern lebt die Mathematikgeschichte von einer neuen Unterrichtskultur und kann umgekehrt helfen, sie in Gang zu bringen.

Literatur

Deschauer, S.: Das zweite Rechenbuch von Adam Ries: eine moderne Textfassung mit Kommentar und metrologischem Anhang und einer Einführung in Leben und Werk des Rechenmeisters. – Vieweg, Braunschweig 1992.
Führer, L.: Anwendungsorientierung der Mathematik aus geschichtlicher Sicht. – In: mathematik lehren 19 (1986), S. 42–48.
Gallin, P./Ruf, U.: Sprache und Mathematik in der Schule. – Verlag Lehrerinnen und Lehrer Schweiz, Zürich 1990.
Hogben, L.: Mathematik für alle. – Kiepenheuer&Witsch, Köln/Berlin 1953.
Hoppe, E.: Geschichte der Optik. Unveränderter Neudruck der Ausgabe von 1926. – Sändig, Wiesbaden 1967.
Jahnke, H. N.: Historische Reflexion im Unterricht. Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung (Bernoulli 1692) in einer elften Klasse. – In: mathematica didactica 18 (1995) 2, S. 30–58.
Neubrand, M.: Stoffvermittlung und Reflexion. – In: mathematica didactica 13 (1990), S. 21–48.
Nix, L./Schmidt, W. (Hrsg. u. Übers.): Herons von Alexandria Mechanik und Katoptrik. – Teubner, Leipzig 1900.
Roth, H.: Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens. 11. Aufl. – Schroedel, Hannover 1969.
Schupp, H.: Optimieren. Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. – Bibliographisches Institut, Mannheim 1992.
Toepell, M.: Aspects to History of Mathematics in the Junior High School – 5th to 7th Grade. In: Jahnke, H. N./Knoche, N./Otte, M. (Hrsg.): History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences (S. 335–346). – Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1996.
Windmann, B.: Methoden des Geschichtsunterrichts im Mathematikunterricht. – In: mathematik lehren 19 (1986), S. 24–31.