

SCHRIFTENREIHE DER FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

”ARS CONJECTANDI” UND DIE NATUR DES ZUFALLS

by

Prof. Dr. Ulrich Herkenrath

SM-UDE-793

2016

Eingegangen am 21.01.2016

# „ARS CONJECTANDI“ UND DIE NATUR DES ZUFALLS

## Abschiedsvorlesung

gehalten von

Prof. Dr. Ulrich Herkenrath

am Freitag, den 17. Juli 2015,

an der Fakultät für Mathematik der

Universität Duisburg-Essen

### **1. Einführung in die Thematik**

Ich möchte heute etwas vortragen von dem, was mich in den letzten Jahren umgetrieben hat, heute umtreibt und hoffentlich noch viele Jahre im Ruhestand.

Es ist die Frage nach der Natur und dem Auftreten von Zufall. Das Nachdenken über diese Frage führt geradewegs auf zentrale philosophische Fragen, wie:

- Wie „funktioniert“ die Welt und der Mensch?
- Was macht generell Naturwissenschaft und wie kommt sie zu ihren Erkenntnissen?

Das wiederum führt auf die *Ars conjectandi* (= Kunst des Vermutens), ein Begriff von Jakob Bernoulli, der Titel des Buches, mit dem er 1713 die Wahrscheinlichkeitstheorie eröffnete, mehr noch auf die „*coniecturae*“ (= Vermutungen) des Nicolaus Cusanus aus dem 15. Jahrhundert, und modern

auf den Kritischen Rationalismus von Karl Popper im 20. Jahrhundert. Alle, die mich gut kennen, werden jetzt sagen: Jetzt ist er wieder bei seinem geliebten Cusanus, der musste ja kommen! Ja, sage ich dazu nur.

Weiter ergeben sich daraus Fragen wie:

- Wo sind die Grenzen der naturwissenschaftlichen Erkenntnis und was kann man darüber hinaus deuten?
- Wofür entscheide ich mich bei einer metatheoretischen oder metaphysischen Deutungsvielfalt?

Das Wort „Professor“ kommt ja vom lateinischen „profiteri“ (= sich bekennen). Ein Professor sollte sich also zu etwas bekennen und nicht immer nur sagen: Das ist alles ganz interessant, ganz kompliziert und vielleicht verhält es sich so oder auch anders, ich weiß es nicht.

Ich hoffe, ich kann sie anstecken mit meiner Begeisterung für diese Thematik, die ich gerade entfaltet habe. Ich denke darüber nach seit 1996 und habe dazu seitdem zahlreiche Vorträge gehalten, Tagungen besucht, einige Arbeiten publiziert, und als vorläufigen Höhepunkt im August 2014 zusammen mit dem Philosophen Harald Schwaezter ein interdisziplinäres Symposium über den „Zufall“ durchgeführt. Es fand statt an der Kueser Akademie für Europäische Geistesgeschichte in Bernkastel-Kues, sozusagen bei Cusanus zu Hause. 14 Referenten aus den Gebieten Theologie, Philosophie, Physik, Biologie, Medizin und Mathematik haben zum Thema „Zufall“ vorgetragen und diskutiert. Ein Tagungsband wird erscheinen.

Zur Einordnung und Grundlegung dessen, was ich im Folgenden ausführe, präsentiere ich für Hörer, die mit Mathematik oder Naturwissenschaften nicht so vertraut sind, folgende Aussagen:

- Die Stochastik, mein Spezialgebiet innerhalb der Mathematik, beschäftigt sich mit dem Zufall, genauer gesagt, mit Zufallsphänomenen, d.h. „Erscheinendem von Zufall“. Das Wort kommt vom altgriechischen

$\sigma\tau\omicron\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\omicron\varsigma$ , zu übersetzen mit „im Vermuten geschickt“. Sokrates spricht in Platons Dialog „Philebos“ von einer  $\sigma\tau\omicron\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\eta\ \tau\epsilon\chi\nu\eta$ , zu übersetzen mit dem „ars conjectandi“ des Jakob Bernoulli oder auf Deutsch „Kunst oder Technik des Vermutens.“

- Die Stochastik hilft, den Zufall, d.h. uns als zufällig Erscheinendes zu meistern, soweit es die Natur zulässt. Zufall manifestiert sich auf der Ebene der Phänomene in Ereignissen. Die Welt ist für den Menschen voll von ungewissen Ereignissen, Ungewissheit ist für ihn eine Grunderfahrung. Ungewisse Ereignisse werden von ihm oft als „zufällig“ bewertet. Ob es zusätzlich zu den unstrittig vorhandenen ungewissen oder eben subjektiv als zufällig bewerteten Ereignissen noch „eigentlich zufällige“ Ereignisse gibt, z.B. „objektiv zufällige“, davon wird gleich die Rede sein.
  
- Ich nenne einige Beispiele von sogenannten „zufälligen Ereignissen“, wobei jeweils die Qualität oder Natur der Zufälligkeit später zu diskutieren ist:
  - = Das „Urmuster“ eines Zufallsexperimentes: Ein Experimentator zieht „absichtlichslos“ aus einer Urne  $\Omega$  mit  $n_r$  roten und  $n - n_r = n_s$  schwarzen Kugeln eine konkrete Kugel  $\omega$ . Die Farbe der gezogenen Kugel wird im allgemeinen als „zufällig“ angesehen, zufällig von welcher Qualität, das ist die Frage. Hier drängt sich umgangssprachlich die Frage auf: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gezogene Kugel rot?
  - = Von gleicher Art ist das sogenannte Zufallsexperiment, das in der Ziehung der 6 Gewinnzahlen im Zahlenlotto „6 aus 49“ besteht.
  - = Ein Experimentator wirft absichtslos eine unverfälschte Münze oder einen unverfälschten Würfel. Das Ergebnis in Form der nach dem Wurf oben liegenden Seite gilt als zufällig.

- = Ein Klumpen radioaktiven Materials wird beobachtet: Wieviele Atome zerfallen in einem bestimmten Zeitintervall?
  - = Wo befindet sich bei einer Beobachtung eines Atoms ein Elektron?
  - = Was ist der Kurs der Allianz-Aktie heute nachmittag um 17 Uhr an der Frankfurter Börse?
- Auf Basis einer mathematischen Modellbildung, des Kolmogorowschen Wahrscheinlichkeitsraums, baut die Wahrscheinlichkeitstheorie einen Kalkül auf, mit dem Wahrscheinlichkeiten zufälliger Ereignisse gemessen werden können und Gesetzmäßigkeiten hergeleitet werden. Für ein konkretes Zufallsphänomen bzw. Zufallsexperiment muss ein passender Kolmogorowscher Wahrscheinlichkeitsraum modelliert werden. Das ist manchmal einfach, manchmal hochkompliziert bzw. fragwürdig, je nach Art des Zufallsexperimentes.
- Man betrachte ein konkretes Zufallsexperiment, von dem man im Idealfall beliebig viele Kopien herstellen, d.h. voneinander unabhängige Wiederholungen unter gleichen Versuchsbedingungen durchführen kann. Dafür muss sich die vorgenommene mathematische Modellierung in Form eines konkreten Kolmogorowschen Wahrscheinlichkeitsraums auf ihre Güte und Eignung hin empirisch abklopfen oder überprüfen lassen. Für ein zufälliges Ereignis  $A$  ermittelt man die sogenannte relative Häufigkeit  $f_n(A)$ , mit der es in den  $n$  realisierten Kopien aufgetreten ist, d.h. denjenigen Anteil der  $n$  gemachten Beobachtungen, in denen  $A$  auftrat. Für großes  $n$  muss  $f_n(A)$  nahe der nach Modell gegebenen Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  liegen gemäß des Gesetzes der großen Zahlen, was auch immer „nahe“ heißen mag. Das ist eine der eben genannten Gesetzmäßigkeiten der Stochastik.
- Die Entscheidung über die Angemessenheit eines Modells fällt ganz generell und letztlich nach dem Satz aus dem Neuen Testament: „An ihren Früchten werdet ihr sie erkennen“.

- An dieser Stelle sieht man etwas ganz Wesentliches, fundamental Wichtiges für das Verständnis von Mathematik, der Anwendung von Mathematik und generell der naturwissenschaftlichen Vorgehensweise: Den Unterschied zwischen der Realwelt mit ihren realen Situationen und Problemen und der Idealwelt der Mathematik mit ihren Modellen. Die Modelle der Physik stellen auch Idealisierungen realer Situationen dar, schlußendlich, sobald die Mathematik als „Schlüssel-Wissenschaft“ zur Entschlüsselung der Natur eingesetzt wird, münden diese Idealisierungen in ideale mathematische Modelle (siehe Abbildung 1, Seite 33).
- Das Feld der Naturwissenschaften sind die Phänomene, das „Erscheinende“ in der natürlichen Wirklichkeit, das wir wahrnehmen und erfassen können, z.B. mit Zählen, Messen und Wiegen, eventuell mit Experimentieren. Naturwissenschaften versuchen das zu erklären und zu verstehen. Eine absolute Wirklichkeit, die möglicherweise hinter den Phänomenen steht, ist nicht das Feld der Naturwissenschaften, sondern der Metaphysik, der „Metatheorien“, wie Alfred Gierer aus Tübingen sagt.
- Dementsprechend erklären auch die Naturwissenschaften, sogar die Mathematik, wenn man sie auf die Realwelt anwendet, nicht „die Dinge an sich“, sie betreiben keine Ontologie, wie die Philosophen sagen. Die Bedeutung der Begriffe erklärt sich aus den Zusammenhängen, in denen sie stehen, sozusagen „relational“. So erklärt die Physik nicht, was Kraft oder Energie „an sich“ ist, die Geometrie erklärt nicht, was Punkt und Gerade „an sich“ sind, die Stochastik erklärt nicht, was Zufall und Wahrscheinlichkeit „an sich“ sind.

Insbesondere kann die Mathematik auch nicht beweisen, dass es so etwas wie „objektiven Zufall“ gibt.

- Physik als Basiswissenschaft der Naturwissenschaften behandelt Ma-

terielles, und zwar nur Materielles, d.h. materiell ablaufende Prozesse und materielle Wechselwirkungen.

- Naturwissenschaften versuchen zu beantworten, wie diese Welt funktioniert. Sie geben keine Antworten auf die Fragen nach existenziellem Sinn und der Deutung von Phänomenen, also Fragen der Art: Warum existiert diese Welt, warum existieren Menschen, die so sind, wie wir sie erleben, warum gibt es mich, wo kommen wir her und wo gehen wir hin? Diese Fragen betreffen die Metatheorien oder die Metaphysik. Antworten dort setzen eine personale Glaubensentscheidung voraus. Diese Entscheidungen können sehr verschieden ausfallen und demzufolge spricht Alfred Gierer von einer „Deutungsvielfalt“.
- Eine Konsequenz des bis jetzt Vorgetragenen ist, dass meine Ausführungen *nicht* betreffen die Weiterentwicklung der mathematischen Stochastik. Es geht eben im Folgenden um das, was möglicherweise hinter den Phänomenen des Zufalls steht bzw. von welcher Qualität er ist. Man kann erfolgreich mathematische Stochastik betreiben, generell Mathematik und Naturwissenschaften, ohne eine bestimmte metaphysische Einstellung zu haben.

Nach diesem wissenschaftstheoretischen Exkurs möchte ich mit etwas Anschaulichem fortfahren.

## **2. Problem: Stehen die Hauptgewinner einer Ausspielung im Zahlenlotto „6 aus 49“ schon vorher fest?**

Ende April dieses Jahres war ich auf einer Tagung an der Bischöflichen Akademie Aachen zum Thema „Hirnforschung und Menschenbild“. Bei der abschließenden Podiumsdiskussion am Samstagnachmittag um 16 Uhr waren noch 2 der 4 Referenten anwesend. Um diese zu einer klaren und kurzen Aussage zu veranlassen zu der Frage, ob menschliches Verhalten determiniert im Sinne von „materiell vorprogrammiert“ sei oder nicht, stellte ich

folgende Frage: „Stehen die Hauptgewinner der heute abend stattfindenden Ausspielung im Zahlenlotto jetzt um 16 Uhr schon fest oder nicht?“ Es ist klar, dass keiner von uns die Namen der Glücklichen benennen kann, aber das bedeutet ja nicht, dass die Hauptgewinner eventuell objektiv schon feststehen.

Ich gab gleich 3 Antwortalternativen vor:

- a) Sie stehen jetzt schon fest. Aber das bedeutet dann, dass sie schon seit dem Urknall feststehen, wenn es ihn denn gegeben hat, weil alles andere total unlogisch wäre.
- b) Sie stehen jetzt noch nicht fest, sondern erst nach Ziehung der Gewinnzahlen, weil die Ziehung der konkreten Gewinnzahlen von zufälligen, d.h. noch nicht vorbestimmten, Aktionen der Menschen abhängen, die die Ziehungsprozedur durchführen.
- c) Die Frage ist wegen der eingeschränkten Erkenntnismöglichkeit des Menschen unentscheidbar.

Was denken Sie selbst darüber, für welche Alternative entscheiden Sie sich? Ich werde dieses Beispiel im Folgenden wieder aufnehmen.

Ein Referent, der Neuroinformatiker Christoph von der Malsburg, entschied sich für „zufällig“ wegen „materiell zufälliger Prozesse im Gehirn“, wie er begründete, der andere Referent, Jan Hendrik Heinrichs, ein Philosoph, entschied sich vorsichtshalber für die Unentscheidbarkeit.

Was stößt diese Frage bei jedem, der darüber nachdenkt, an?

1. Eine klare Definition muss her, was „zufällig“ und „determiniert“ bedeuten. Diese Definitionen sollten dann auch gleich in einer „idealen Situation“ gegeben werden, so wie auch Naturgesetze für eine ideale Situation formuliert sind, unabhängig von einer konkreten Situation in der Realwelt, der Welt des empirisch Fassbaren.

2. Eine solche idealtypische Definition ermöglicht dann auch eine Modellierung, die für eine mathematische Behandlung zugänglich ist, denn die Mathematik insgesamt ist eine Idealwelt, mathematische Begriffe und Modelle sind in einer Idealwelt angesiedelt.
3. Generell gilt für die naturwissenschaftliche Erkenntnisweise und die Anwendung der Mathematik zur „Erschließung der Welt“, dass ein Problem in der Realwelt idealisiert werden muss. Das ist nur mit einer gewissen Näherung oder Genauigkeit möglich, es können sich Fehler einschleichen. Umgekehrt betrachtet, ist jede reale Situation eine „verschmutzte“ ideale.
4. Damit haben wir es mit 2 Qualitäten von Wahrheit bzw. wahren Aussagen zu tun: In der Idealwelt der Mathematik gibt es wahre und falsche Aussagen, seit Gödels Unvollständigkeitssatz von 1931 auch unentscheidbare, aber letzteres „ist selten“ sage ich hier einmal lapidar. Die Idealwelt ist klarer und sauberer strukturiert als die Realwelt. Wahrheit und ihr Auffinden bzw. ihre Formulierung in der Realwelt ist komplexer. Damit komme ich zu den coniecturae, d.h. den Vermutungen.

### **3. Die coniecturae (= Vermutungen) des Nicolaus Cusanus**

Der universelle Denker Nicolaus Cusanus (1401 - 1464) geht von einer prinzipiellen Ungenauigkeit aller menschlichen Erkenntnis aus. Er legt das insbesondere dar in seinen zwei Schriften „De docta ignorantia“ (= Über die belehrte Unwissenheit) und „De coniecturis“ (= Über die Vermutungen). Die prinzipielle Ungenauigkeit der menschlichen Erkenntnis hat nach Cusanus zwei Aspekte: Erstens die Endlichkeit und Begrenztheit des Menschen, zweitens ein objektives Messproblem bedingt durch die „Nicht-Gleichheit zweier Dinge“. Er sagt: „Es stimmt also kein Ding mit einem anderen in Gewicht,

Länge und Dichte überein. Alles unterscheidet sich von allem. Genau gleich ist nicht möglich, denn eine solche Genauigkeit ist vom All losgelöst.“ Demzufolge stellt er fest, dass sich nie total-identische Zustände des Alls wiederholen und dass nie total-identische Anfangs- und Durchführungsbedingungen für die Wiederholung ein und desselben Experimentes herstellbar sind.

Er kommt schließlich zu der Erkenntnis: „Eine bejahende Feststellung über das Wahre, wenn sie von Menschen ausgesprochen wird, ist immer nur Vermutung, eben *coniectura*.“

Zur Bewertung verschiedener *coniecturae* zieht er die *verisimilitudo* (= Wahrheitsähnlichkeit) heran. Auf Grund von a priori Kenntnissen, theoretischen Überlegungen und eventuell experimentellen Befunden (Cusanus hat das Experimentieren hochgeschätzt) formuliert man ein Modell oder eine Aussage im Sinne einer Vermutung. Anschließend versucht man durch den Abgleich mit anderen Erkenntnissen, durch weitere Experimente und Beobachtungen, diese Vermutung zu falsifizieren, also als unrichtig oder unangemessen zu ermitteln. Gelingt das, muss man die Vermutung verbessern, d.h. anpassen, oder eine neue, besser passende Vermutung formulieren. Gelingt die Falsifizierung nicht, stützt das die Vermutung, sie wird „wahrheitsähnlicher“. Einen Beweis der Wahrheit im positiven Sinne gibt es nicht im Gegensatz zu den Beweisen in der Idealwelt der Mathematik. Die versuchte Falsifikation, die möglicherweise und hoffentlich irgendwann nicht mehr gelingt, ist der Weg zur „Wahrheitsfindung“ in Anführungszeichen. Man könnte hier wieder sagen, dass die Bewertung der Vermutungen in Form von Modellen, Aussagen, eventuell ganzen Theorien geschieht nach dem Prinzip: „An ihren Früchten werdet ihr sie erkennen“. Das ist genau die Vorgehensweise, die wir bei der Anwendung der Stochastik auf reale Probleme praktizieren, ja generell bei der Anwendung von Mathematik auf reale Probleme, das ist die Methodologie der naturwissenschaftlichen Erkenntnisgewinnung generell, und als Spezialfall möchte ich hinzufügen, die medizinische Diagnostik komplexer Krankheitsbilder. Im 20. Jahrhundert ist diese Erkenntnistheorie als „Kritischer Rationalismus“ bekannt und aus-

gearbeitet worden, ihr Begründer ist Karl Popper. Ich werde diese Methode der Erkenntnisgewinnung später zur Bewertung zweier wichtiger Hypothesen zum Zufall in der belebten Natur heranziehen.

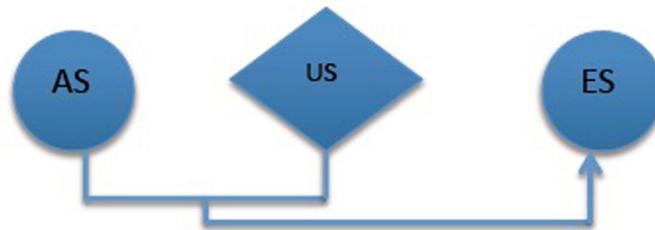
Jetzt komme ich konkret auf den Zufall zu sprechen.

#### 4. Deterministisch-zufällig: Idealtypisch und empirisch

Idealtypisch

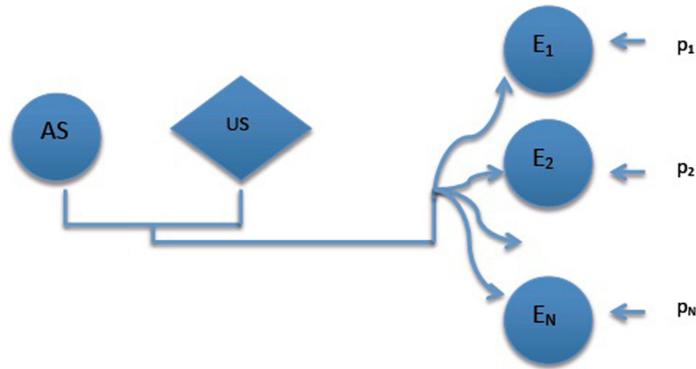
Ich beginne bei meiner Begriffssystematik mit den Ereignissen, und zwar mit ihrer idealtypischen Darstellung. Diese setzt nicht eine Realisierung des Ereignisses voraus, d.h. eine Durchführung bzw. Beobachtung in der Realwelt.

Ereignisse, die aus einem bestimmten Paar von (Ausgangs- und Umgebungssituation), auch Versuchsbedingung genannt, zu einer eindeutig (vor-) bestimmten Endsituation führen, heißen deterministisch.



Diese Endsituation muss nicht von einem Beobachter voraussagbar sein. Wegen mangelnder Kenntnis der Naturgesetze, unzureichender Messung bzw. Bestimmung der Versuchsbedingung, damit zusammenhängend undurchschaubarer Einbindung des betrachteten Ereignisses in andere Ereignisabläufe, somit insgesamt wegen unbeherrschbarer Komplexität kann die objektiv vorbestimmte Endsituation praktisch nicht vorhersagbar sein. Diese Überlegung steht am Anfang des Einstiegs in empirische Untersuchungen. Doch zunächst zu der idealtypischen Darstellung der komplementären Sorte von Ereignissen, den nicht-vorbestimmten, den unterbestimmten, den

nicht kausal-verursachten, den sogenannten zufälligen Ereignissen: Ist zu einer wohlbestimmten Versuchsbedingung die Endsituation a priori, d.h. vor Realisierung des Ereignisses, nicht eindeutig (vor-)bestimmt, sondern sind mehrere Endsituationen möglich, z.B.  $E_1, E_2, \dots, E_N$ , so heißt das Ereignis zufällig. An den  $E_1, \dots, E_N$  haften die Wahrscheinlichkeiten  $p_1, \dots, p_N$ .



Jedes realisierte Ereignis hat natürlich genau eine Endsituation. Bei einem deterministischen Ereignis sind die Endsituation des idealtypischen und eines jeden realisierten Ereignisses gleich. Bei einem zufälligen Ereignis ist die Endsituation einer jeden Realisierung eine der möglichen Endsituationen des idealtypischen Ereignisses. Dabei tritt die konkrete mögliche Endsituation  $E_i$  bei einer Realisierung des Ereignisses auf mit der Wahrscheinlichkeit  $p_i$ . Der Begriff der „Wahrscheinlichkeit“ wird ganz natürlich und passend im umgangssprachlichen Sinne verwandt. Formal sind die Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_N$  Zahlen zwischen 0 und 1, die sich zu 1 aufsummieren, d.h.  $0 \leq p_i \leq 1, p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$ . Die Wahrscheinlichkeiten  $p_i, i = 1, \dots, N$ , sind Komponenten oder Bestandteil des Idealmodells. Ihre Entsprechung im Empirischen oder der Realwelt sind die sogenannten relativen Häufigkeiten  $f_i, i = 1, \dots, N$ . Diese sind dann empirisch ermittelbar, wenn die Möglichkeit besteht, dass sich das zufällige Ereignis in sehr vielen, sagen wir  $n$ , sogenannten Kopien realisiert bzw. realisieren lässt. Sind diese Kopien nicht herstellbar, so sind die  $p_i$  nicht direkt empirisch belegbar. Eventuell gelingt das über eine Zerlegung des Ereignisses in einfachere

Ereignisse, deren Zufallseinfluss empirisch fassbar ist, und die dann wieder zum interessierenden Ereignis zusammengefügt werden.

#### Deterministisch

In der Realwelt beobachtet man reale, d.h. realisierte Ereignisse einschließlich ihrer Endsituationen. Unter Umständen ist es fraglich, ob ein Ereignis deterministisch oder zufällig ist. Theoretisches Wissen und empirisches Überprüfen stehen gegebenenfalls zur Ermittlung, d.h. zur Klassifizierung „deterministisch oder zufällig“ zur Verfügung. Auch der passende Referenzrahmen muss geklärt sein. Ich werde im Folgenden den Zufall auf der Ebene der Phänomene innerhalb des Referenzrahmens der Physik untersuchen, d.h. also, dass Ursachen und Bestimmtheit physikalisch begründet und erklärt werden müssen, somit nach dem vorher Gesagten durch materiell ablaufende Prozesse bzw. Wechselwirkungen. Da die Klassifizierung auf der Modell- bzw. Theorieebene stattfindet, also mit Bezug auf die idealtypischen Definitionen, muss das zu untersuchende Ereignis passend definiert bzw. modelliert werden hinsichtlich Anfangs-, Umgebungs- und Endsituation. Generell gilt: Jedes Ereignis ist über seine Vorgeschichte und räumlich sowie zeitlich „benachbarte“ Ereignisse eingebunden in Ereignisketten, die seit Anbeginn der Welt ablaufen. Wegen dieser Eingebundenheit ist jedes Ereignis rein prinzipiell „bedingt“. Die Bewertung eines Ereignisses als deterministisch bzw. zufällig verlangt aber, das Ereignis „unbedingt“ zu betrachten. Das bedeutet, dass das Ereignis hinreichend gut vom „Rest der Welt“ in räumlicher sowie zeitlicher Hinsicht abgeschnitten oder isoliert werden muss. Man könnte sagen, es muss aus dem „Gewirr und Gewimmel“ von benachbarten und somit interagierenden Ereignissen herausgelöst werden. Ist ein Ereignis von chaotischen Effekten beeinflusst, so kann das besonders schwierig sein. Im Falle der Wirksamkeit chaotischer Effekte ist es auch schwierig, bei Wiederholungen eines Ereignisses total identische Versuchsbedingungen einzurichten oder sie vorzufinden. So können auch vermeintliche Kopien des Ereignisses mit real nicht-total identischen Versuchsbedingungen auf die Endsituation des Ereignisses „durchschlagen“ und ein objektiv determinis-

tisches Ereignis als zufällig erscheinen lassen. Deterministisches Chaos und Zufall sind unter Umständen nur schwer unterscheidbar.

Die Betrachtungsweise der Ereignisse soll prospektiv sein, d.h. in die Zukunft gerichtet, da eine retrospektive Betrachtung Gefahr läuft, Abläufe nur zu protokollieren und unter Umständen aus einem „danach“ (posthoc) ein „deswegen“ (propterhoc) zu machen, z.B. weil ein (strenges) Kausalitätsprinzip einfach axiomatisch oder a priori unterstellt wird. Bei der prospektiven Betrachtungsweise eines (idealisierten) Ereignisses muss a priori, d.h. unabhängig von einer konkreten Realisierung, eventuell aber unter Verwendung von früheren Beobachtungen eine Prognose über die möglichen Endsituationen gestellt werden. Man betrachte etwas folgendes Experiment: Es wird mit einem geeigneten Messgerät gezählt, wieviele Atome eines 1 Kilogramm schweren Klumpens eines radioaktiven Elementes innerhalb von 24 Stunden zerfallen. Bei der prospektiven Betrachtung dieses Ereignisses weiß man auf Grund früherer Erfahrungen anderer Experimentatoren und theoretischer Begründungen, dass die gesuchte Anzahl „zufällig“ ist, d.h. sie kann mehrere verschiedene Werte annehmen und denjenigen Wert, der sich bei der aktuellen Realisierung ergeben wird, kann man zumindest nach heutigem Kenntnisstand nicht vorherbestimmen.

## **5. Verschiedene Quellen und Arten von Zufall**

Schließlich stellt sich jetzt die wesentliche Frage nach den Quellen bzw. den Arten des Zufalls. Ich beziehe mich wieder auf den Referenzrahmen der Physik, gehe dann aber auch darüberhinaus, weil meines Erachtens der Mensch und Lebewesen darüber hinausgehen.

Eine erste Frage besteht darin, ob es in der unbelebten Natur, der basalen Schicht des Materiellen, unabhängig von einem Beobachter oder Experimentator, zufällige Ereignisse gibt, d.h. ob der Zufall in der Natur intrinsisch ist. Wenn ja, dann spreche ich vom „objektiven Zufall“ bzw. von „objektiv zufälligen“ Ereignissen. Diese sind von ihrer Qualität her „eigentlich zufällig“. Werner Heisenberg und viele andere Quantenphysiker glaubten,

diesen objektiven Zufall auf der Ebene der Quanten als existent bewiesen zu haben, d.h. ohne ihn die Quantenphysik nicht erklären zu können. Heute vertreten viele Physiker die Auffassung, z.B. unter Berufung auf die von David Bohm entwickelte Quantenmechanik, dass für die Annahme des intrinsischen Zufalls in der Natur kein Anlass bestehe. Auf dem Symposium 2014 wurden verschiedene Auffassungen zu dieser heute strittigen Frage von Physikern dargelegt, z.B. von Gühne (Uni Siegen) „pro Zufall“ und Schnakenberg (RWTH Aachen) „contra Zufall“.

Wenn es den objektiven Zufall auf der Ebene der Quanten gibt, so kann er sich meines Erachtens über „divergierende Kettenreaktionen“ auf die makroskopische Ebene fortsetzen. Damit meine ich, dass bestimmte Zustände von Quanten, die sich objektiv zufällig ergeben haben, eine irreversible Änderung des sie enthaltenden Systems hervorrufen, z.B. ein technisches Bauteil defekt gehen lassen oder ein Gen mutieren. Eine Ausmittlung der individuellen objektiv zufälligen Ereignisse könnte bei einer divergierenden Kettenreaktion erst über viele Kopien der entsprechenden Ereigniskette zustande kommen. Dazu wird aber vielfach weder ein Anlass sein noch die Möglichkeit bestehen. Festzuhalten bleibt, dass die Frage nach dem objektiven Zufall heute unter den Physikern strittig ist.

Die nächste Frage besteht darin, ob es in der belebten Natur zufällige Ereignisse gibt, die durch Handlungen oder Verhalten von Lebewesen ausgelöst werden. Da es keine geschlossene, allgemein akzeptierte Theorie über das Zustandekommen von Verhalten und Handlungen von Lebewesen, insbesondere des Menschen, gibt, diskutiere ich dazu zwei verschiedene Hypothesen, wenn man so will, Vermutungen:

Hypothese (D), (D) für deterministisch, nimmt an, dass alle Handlungen von Lebewesen einschließlich des Menschen, materiell vorbestimmt, also determiniert sind.

Hypothese (W), (W) für Wahlmöglichkeit, nimmt an, dass viele Handlungen von Lebewesen einschließlich des Menschen materiell unterbestimmt sind,

somit bezüglich des Referenzrahmens der Physik zufällig.

Solche zufälligen Ereignisse nenne ich dann „subjektiv zufällig erzeugt“. Sie haben wie die objektiv zufälligen Ereignisse die Qualität „eigentlich zufällig“. Unter der Hypothese (D) gibt es solche zufälligen Ereignisse nicht. Da (W) sowohl wie (D) Hypothesen, d.h. nicht bewiesene Thesen sind, bleibt die Existenz des subjektiv erzeugten Zufalls ebenfalls strittig.

Völlig unstrittig ist die Existenz von Ereignissen, die für einen Beobachter oder Experimentator „ungewiss“ sind, weil ihre Endsituation unvorhersehbar und damit unvorhersagbar ist. Diese Ungewissheit kann mehrere verschiedene Gründe haben: Falls es objektiv zufällige und/oder subjektiv zufällig erzeugte Ereignisse gibt, werden diese natürlich insbesondere als ungewiss erfahren. Aber auch viele (objektiv) deterministische Ereignisse werden von einem Beobachter oder Experimentator als ungewiss erfahren wegen eines möglichen unvollständigen Wissens über die Naturabläufe, wegen eines Informationsdefizits über Versuchsbedingungen und Umgebungssituation, insgesamt wegen einer zu hohen Komplexität der Ereignisabläufe sowohl des zu beobachtenden Ereignisses als auch benachbarter Ereignisse, siehe die Bemerkungen im Anschluss an die Definition des idealtypisch deterministischen Ereignisses. Da die Bezeichnung „ungewiss“ für Ereignisse immer ein beobachtendes und bewertendes Subjekt voraussetzt, nenne ich solche Ereignisse „subjektiv zufällig bewertet“. Sind die so bewerteten Ereignisse objektiv deterministisch, so sind sie von ihrer Qualität „uneigentlich zufällig“.

Damit präzisiert sich die Frage nach der Existenz des Zufalls auf die Frage nach dem eigentlichen Zufall in seinen zwei oben beschriebenen Arten. Zufälligkeit in Ereignissen, egal welcher Art, pflanzt sich natürlich über Ereignisketten fort.

Damit ergibt sich das Tableau an Möglichkeiten für zufällige Ereignisse der verschiedenen Arten je nach zugrunde gelegten Annahmen gemäß Abbildung 2, Seite 34.

Besonders interessant ist die folgende Kombination von Annahmen: Verneint man den objektiven Zufall in der unbelebten Natur, aber bejaht Hypothese (W), so wird „Eigentlich Zufälliges“ nur durch Lebewesen erzeugt, d.h. nur sie eröffnen neue Kausalketten.

## **5. Diskussion der Hypothese (W) und persönliche Entscheidung**

Dass Lebewesen mehr sind als materielle Einheiten, die auf Grund ihrer inneren Verfassung und äußerer Reize, rein physikalisch betrachtet, Bewegungen ausführen und in Gang setzen können, scheint mir klar. Insbesondere der Mensch verfügt über Geist und Bewusstsein. Wie diese mit seinem physiologischen, also materiellen Apparat, insbesondere dem Gehirn zusammenspielen, das ist eine gerade in den letzten Jahrzehnten heftig diskutierte Frage. Hinsichtlich der rein naturwissenschaftlichen Möglichkeiten zur Beschreibung und Erklärung des Menschen setzt Martin Heisenberg (2007) mit großartigen Worten Fundament und Rahmen. Er schreibt dazu: „Die Naturgesetze sind nicht die Natur. Unser persönliches Dasein ist ein existenzielles Ereignis, ein Einzelfall . . . Unsere Wahrnehmungen und Gefühle, unsere Gedanken und Erinnerungen, unser Bewusstsein und unsere Freiheit sind zunächst solche singulären Lebensmomente. Sie gibt es einfach, wie es diesen Baum und jenen Bach, diese Wolke oder den Abendstern gibt. Das ist der metaphysische Hintergrund, vor dem sich das Dasein abspielt. Untrennbar davon, aber doch erst in zweiter Linie, können wir unser Dasein reflektieren, unsere Erfahrungen in Begriffe fassen, darüber nachdenken, miteinander reden und schließlich auch Wissenschaft betreiben“.

Im Rahmen dieser Untersuchungen geht es um die Frage, wie Verhalten und Handlungen bzw. Entscheidungen von Lebewesen zustande kommen. Es gibt in den letzten Jahrzehnten Hirnforscher, die Verhalten und alle Entscheidungen auch von Menschen für materiell vorbestimmt, d.h. für determiniert halten, somit die Hypothese (D) annehmen. Ich spreche hier bewusst von einer Hypothese, da ich Aussage (D) nicht für bewiesen ansehe. Ich befinde mich damit in guter Gesellschaft zahlreicher Neurobiologen und Mediziner,

wie Martin Heisenberg, Alfred Gierer, Günter Rager, Hans-Albert Braun, Boris Kotchoubey, um nur einige zu nennen. Wenn ich Hypothese (W) annehme, die auch nicht bewiesen ist, so möchte ich das mit Bezug auf Heisenbergs oben zitierte Sätze folgendermaßen begründen, wobei ich meine Erklärungen auf den Fall des Menschen beschränke.

Innerhalb der Klasse der subjektiv zufällig erzeugten Ereignisse gibt es zunächst eine Sorte von ganz unauffälligen oder banalen, die ich als Sorte (W1) bezeichne. Dies sind Handlungen, die ich auf die unermessliche Individualität des Menschen zurückführe, zu der auch Fluktuationen oder Schwankungen seines Befindens gehören. Diese betreffen seine Sinne, seine Stimmung, seine Aufmerksamkeit und Entschlusskraft und anderes mehr. Er gehorcht jedenfalls keinen standardisierten „Sollwerten“. Selbst wenn man diese Fluktuationen weitgehend als physiologisch verursacht ansieht, so sind sein Verhalten und daraus erwachsende Handlungen meines Erachtens nicht in allen Details materiell determiniert. Andernfalls könnte man den Menschen als eine biochemische Marionette oder einen Roboter ansehen. So halte ich z.B. den Entschluss eines Menschen, zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt eine Handlung zu ergreifen, für nicht materiell vorbestimmt, d.h. die Ausführung der Handlung zu einem ganz konkreten Zeitpunkt für ein subjektiv zufällig erzeugtes Ereignis. Der darin enthaltene Zufall pflanzt sich fort über das Ergebnis dieser Handlung, die Anfangssituation eines neuen Ereignisses ist. Denn hätte der Mensch die Handlung etwas früher oder später ausgeführt, hätte das Ergebnis anders ausfallen können, da seine Befindlichkeit etwas anders gewesen wäre. Man mag als Beispiele dabei denken an die Durchführung von Experimenten einschließlich Versuchsaufbau und Feststellung von Messwerten als Ergebnisse, aber auch an ganz Alltägliches: Wäre der Mensch an einem Morgen einige Minuten später aufgestanden, hätte er ein bestimmtes Musikstück im Radio nicht mehr gehört und so nicht mehr den Elan gehabt, eine wichtige Entscheidung zu treffen. In den folgenden Beispielen werden solche Verhaltensweisen bzw. Zufälle weiter diskutiert.

Für bewusste, wesentliche Entscheidungen gilt nach meinem Verständnis: Der Mensch als individuelle Ganzheit hat zumindest in sehr vielen Situationen für eine zu treffende Entscheidung eine wirkliche oder eigentliche Möglichkeit der Wahl zwischen verschiedenen Alternativen, passend zu den verschiedenen möglichen Endsituationen beim zufälligen Ereignis. Danach lässt sich bei der Durchführung oder Realisierung des Entscheidungsprozesses die real getroffene Entscheidung im Allgemeinen auch nicht durch genaue und immer genauere Auswertung aller Umstände und Faktoren im oben beschriebenen Sinne materiell determinieren. Sie wird vom Menschen getroffen mittels autonomer geistiger Fähigkeiten, die ich ihm auf Grund lebenswirklicher Erfahrungen zumesse oder/und unter Einschaltung eines Randomisators. Unter einem Randomisator verstehe ich eine Vorrichtung bzw. einen Mechanismus im Gehirn, der zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, die, eventuell unbewusst, an ihn herangetragen wird, eine Realisierung erzeugt. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung kann die Gleichverteilung über  $N$  Handlungsalternativen sein, muss es aber nicht. Die Bedeutung des Randomisators ist, wie unten gezeigt wird, wichtig für Lern- und Entwicklungsprozesse und „operantes Verhalten“ im Sinne von Heisenberg (2007). Auch in den im Folgenden abzuhandelnden Beispielen (1) bis (3) erscheint die Annahme eines Randomisators naheliegend.

Nebenbei gesagt: Wenn z.B. die Fledermaus so ausgestattet ist, dass sie sich beim Fliegen per Ultraschall orientieren kann, dann scheint die Ausstattung des Menschen mit einem Randomisator nicht vermessen.

Der entscheidende Punkt ist, dass gemäß Hypothese (W) zumindest sehr viele Entscheidungen des Menschen nicht im oben beschriebenen Sinne determiniert sind.

Die autonomen geistigen Fähigkeiten sind Teil des Bewusstseins des Menschen, charakteristisch für seine Person, für sein „Ich“ und die Voraussetzung für eine gewisse Freiheit. Mit dem Adjektiv „autonom“ möchte ich zum Ausdruck bringen, dass diese Fähigkeiten ihn instandsetzen, Denkprozesse auszuführen, die nicht als materielle Kettenreaktion zwangsläufig

im Gehirn ablaufen, ausgelöst und gesteuert nur durch äußere Einflüsse und innere Zustände. Der Mensch setzt sie ein, um zwischen verschiedenen Handlungsalternativen abzuwägen, ihre Vor- und Nachteile und ihre Konsequenzen zu bedenken, sie nach seinen individuellen, persönlichen Werten und Maßstäben zu bewerten und so eine Entscheidung zu treffen. Die Handlung, zu der diese vom Subjekt bewusst begründete Entscheidung führt, wäre Sorte (W2) für ein auf der Ebene der Phänomene erscheinendes subjektiv zufällig erzeugtes Ereignis. Die Annahme dieser Fähigkeiten entspricht der Lebenserfahrung und dem Selbstverständnis zumindest sehr vieler Menschen, Begriffe wie Verantwortung und Schuld basieren darauf. Es stellt sich weiter die Frage, wie ohne diese das Gewissen des Menschen mit seinen Werten und Maßstäben ausgebildet werden sollte, warum bzw. wodurch er befähigt sein sollte, nach dem Sinn zu fragen, auch und gerade nach dem Sinn seiner eigenen Existenz, woher er kommt und wohin er geht. Es bleibt die Frage, wo im Menschen diese geistigen Fähigkeiten verortet sind, wie sie zustandekommen und insbesondere wie ihre Wechselwirkung mit dem Gehirn bzw. dem materiell erfassbaren Wahrnehmungs-, Gefühls- und Denkkapazität ist. Da die Naturwissenschaften hinsichtlich ihres Gegenstandes und ihrer Methodik auf Materielles eingegrenzt sind, wird man diese autonomen geistigen Fähigkeiten mit den naturwissenschaftlichen Methoden nicht erfassen, ergründen und erklären können, insbesondere auch nicht ihre Wechselwirkungen mit dem physiologisch bzw. physikalisch erfassbaren Teil des Menschen. Leugnet man autonome geistige Fähigkeiten, weil man glaubt, sie mit den Naturwissenschaften nicht vereinbaren zu können, so stellt sich die Frage, auf welcher Ebene man Nicht-Materielles überhaupt als existent akzeptiert.

Schließlich lernt der Mensch auch, mit seiner Umwelt zu seinem Überleben und zu seinem Vorteil zurechtzukommen, nicht zuletzt durch das Ausprobieren verschiedener Alternativen. Der Mensch kann aus Einsicht und Absicht oder unbewusst in Lern- und Entscheidungsprozessen zwischen verschiedenen Alternativen randomisieren, d.h. zufällig auswählen. Eventuell setzt er

zur Realisierung seiner Absicht zu randomisieren ein Zufallsexperiment ein, wie etwa den Münzwurf zur Entscheidung der Seitenwahl beim Fußballspiel. Der Zufallscharakter dieses Experiments bleibt natürlich zu klären. Möglicherweise bedient sich der Mensch aber auch beim bewussten oder unbewussten Randomisieren direkt seines Randomisators bzw. dieser wird tätig. Handlungen, die auf Grund von Randomisierungen irgendwelcher Art zustande kommen, sind Sorte (W3) für auf der Ebene der Phänomene erscheinende subjektiv zufällig erzeugte Ereignisse.

Ein wichtiger Spezialfall der Situation von Sorte (W3) besteht darin, dass ein Experimentator bewusst eine Gleichverteilung über  $N$  Alternativen realisieren will (Sorte (W4)), wie etwa bei der Ziehung der Gewinnzahlen im Zahlenlotto oder beim Ziehen einer Kugel aus einer Urne. Dafür werde ich das nochmals genauer ausführen. Nach heutigem Stand der Wissenschaft spielt ein zeitweises zufälliges Ausprobieren zwischen verschiedenen Alternativen eine wichtige Rolle bei Lern- und Entwicklungsprozessen. Das ist auch nicht als ein planloses oder unintelligentes Verhalten zu sehen, sondern als eine intelligente Strategie. Man betrachte eine beliebig lange Serie von Versuchen oder Situationen, in denen der Mensch jeweils die Wahl zwischen verschieden vorteilhaften Alternativen hat. Würde er nach relativ wenigen Versuchen für die Zukunft immer nur noch die nach bisheriger Erfahrung vorteilhafteste Alternative ergreifen, liefe er Gefahr, die objektiv vorteilhafteste Alternative zu verpassen, d.h. nie herauszufinden. Wählt er im Laufe seiner Versuchsserie immer wieder einmal nach bisheriger Erfahrung nicht so vorteilhafte Alternativen, mag er „etwas verspielen“, bewahrt sich damit aber die Chance, die objektiv vorteilhafteste Alternative zu finden. Heisenberg (2007, S. 50) spricht in diesem Zusammenhang vom „Verhalten um zu“ oder vom „operanten Verhalten“. Er ergänzt: „Darunter fallen die verschiedensten Formen des Suchens und Ausprobierens. Operantes Verhalten gehört zu den elementarsten Grundlagen des Verhaltens überhaupt“. Die Evolutionsbiologie hebt auch zufällige Mutationen als Vehikel der Evolution hervor. Neues von „besserer Qualität“ als bisher Bekanntes kann eventuell

nur so zustandekommen (siehe Lüke (2008), Monod (1971)).

Die Dreiheit Lebewesen, Zufall und Lernen bzw. Evolution passt zusammen. Die Analyse und Erklärung solcher Zusammenhänge im Bereich „Gehirn-Bewusstsein-Geist“ bereitet eine prinzipielle Schwierigkeit, da sie mit Mitteln eben daraus vorgenommen wird: Der menschliche Geist muss sich selbst analysieren, das denkende Subjekt ist gleichzeitig Objekt.

Ich habe bei der Einführung in die Thematik gesagt, dass das Wort „Professor“ vom lateinischen „profiteri“ kommt, das heißt „sich bekennen“. Ich komme dieser Verpflichtung nach und bekenne mich, bezogen auf die beiden sich ausschließenden Hypothesen (D) und (W), zu Hypothese (W). An der Grenze der naturwissenschaftlichen Erkenntnis entscheide ich mich für das Gebiet darüber hinaus, wo Deutungsvielfalt herrscht, zu einer konkreten Deutung. Anders gesagt: Ich treffe eine metaphysische Entscheidung. Ich entscheide mich für Hypothese (W) nach dem Prinzip „An ihren Früchten werdet ihr sie erkennen“. Die nach meiner Ansicht „schönen Früchte“, die Hypothese (W) hervorbringt, habe ich oben schon vorgezeigt.

Nach Hypothese (D) ist der Mensch objektiv, egal wie er sich subjektiv begreift, eine biochemische Marionette, gesteuert von inneren Zuständen und äußeren Reizen. All seine Handlungen und Gedanken sind seit dem Urknall vorbestimmt, Entscheidungsfreiheit ist eine Illusion, wenn auch eine nützliche, wie manche Hirnforscher sagen. Was ist denn Verantwortlichkeit, was gegebenenfalls Schuld oder, was Positives angeht, Leistung? Schlimmer noch: Der Mensch, der Hypothese (D) anhängt, kann für all das, was er tut oder unterlässt, reklamieren, er habe sich so verhalten müssen, seine Handlungen seien ja materiell determiniert, also Naturereignisse. Man möchte fast sagen, er kann tun und lassen, was er will, aber nach (D) ist der Begriff „Wille“ ja praktisch leer, weil er will, was er tut. Entscheidet sich ein Mensch, der vorher von (D) nichts wußte, für (D), kann das sein Verhalten ändern, vielleicht für den Rest der Welt nicht zum Besseren.

Ich sehe also die Konsequenzen von (D) nicht als „sinnhaft“ an. Da ich aber

zutiefst überzeugt bin vom Sinn dieser Welt und des Menschen, das ist meine persönliche Glaubensentscheidung, lehne ich (D) ab und entscheide mich für (W).

## 6. Beispiele

(1) Zufälliges (= absichtsloses) Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit  $N$  durchnummerierten Kugeln (z.B. 1, 2, 3, ..., 49, d.h.  $N = 49$ ).

Ein Experimentator zieht „blind“ oder absichtslos eine Kugel aus einer Urne, in der  $N$  Kugeln mit den jeweiligen Aufschriften 1, 2, 3, ...,  $N$  gut gemischt liegen. Das zugehörige Ereignis ist beschrieben durch die Urne und den daneben stehenden Experimentator als Anfangssituation, die Umgebungssituation der Szene sei „unauffällig“. Der Ziehungsvorgang als Realisierung des Ereignisses führt zu einer konkret gezogenen Kugel bzw. der darauf geschriebenen Zahl als Endsituation. Allein menschliches Handeln entscheidet über den Ausgang des Experiments: Die Ziehung des Experimentators und die Mischung der Kugeln der Urne, die ja auch von Menschenhand erzeugt wird. Formal wählt bei der Realisierung des Ereignisses der Experimentator aus der Menge der unendlich vielen Möglichkeiten der Arm-, Hand- und Fingerbewegungen genau eine aus. Diese führt zu der gezogenen Zahl. Eine minimale Variation der Bewegungen könnte zu einem anderen Ergebnis führen.

Ist das Ereignis, oder hier möchte man sagen, das Experiment zufällig oder deterministisch? Das läuft hinaus auf die Frage, ob der Bewegungsablauf des Experimentators zufällig oder deterministisch ist. „Deterministisch“ bedeutet im Referenzrahmen dieser Untersuchung, dass der Experimentator durch seine „innere Verfassung“ und „äußeren Reize“ seine Arm-, Hand- und Fingerbewegungen materiell vorbestimmt **so** ausführt, dass genau die real gezogene Kugel gezogen werden musste. Er hatte keine Wahl!

Das ist die Schlussfolgerung unter Annahme der Hypothese (D). Vorsicht vor einem Fehlschluss ist geboten bei der retrospektiven Betrachtungsweise: Der Experimentator zieht natürlich eine bestimmte Kugel, weil er bestimm-

te Bewegungen ausgeführt hat, aber diese gingen der Ziehung nur voraus. Eine noch so genaue Protokollierung des Ziehungsvorgangs erklärt ja nicht, **warum** er genau so abläuft.

Meine Interpretation des Experiments, passend zu der von mir befürworteten Hypothese (W), ist die: Sein Verstand führt den Experimentator zu der Erkenntnis, dass sein beabsichtigtes „absichtsloses“ Ziehen der Kugel nichts anderes bedeutet, als dass jede Kugel in der Urne die gleiche Wahrscheinlichkeit haben soll, gezogen zu werden. Dabei versteht er den Begriff der Wahrscheinlichkeit im umgangssprachlichen Sinne und intuitiv richtig. Formal wird das durch die Gleichverteilung über der Menge der  $N$  Kugeln beschrieben, d.h. jede Kugel hat die Wahrscheinlichkeit  $1/N$  gezogen zu werden. Der Experimentator steuert bewusst, bzw. mit Hilfe des Randomisators in seinem Gehirn, seinen Bewegungsablauf mit dem Ziel der „Realisierung der Gleichverteilung“ durch seine jetzt zu realisierende Ziehung. Das Vorhaben der Realisierung einer Gleichverteilung mag in gewisser Weise verglichen werden mit dem, einen Kreis „freihändig“ zu zeichnen. Die meisten Menschen werden näherungsweise einen Kreis zeichnen können. Wegen des Ziels, mit der zu realisierenden Ziehungsprozedur eine Realisierung der Gleichverteilung zu erreichen, nenne ich das Ergebnis der Ziehung bzw. das zugehörige ganze Ereignis der Ziehung „subjektiv zufällig erzeugt“. Es ist ein Beispiel für ein subjektiv zufällig erzeugtes Ereignis der Sorte (W4).

(2) Die Ziehung der Gewinnzahlen im Zahlenlotto „6 aus 49“

Dieses Experiment ist strukturell gleichartig zum obigen Zufallsexperiment. Die Lotto-Gesellschaft hat ein begründetes Interesse daran, dass der Ziehungsmechanismus unverfälscht ist, d.h. dass jede der Zahlen von 1 bis 49 die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, als Gewinnzahl gezogen zu werden. Damit ist die Ziehung der Gewinnzahlen im Zahlenlotto, die für viele Lotospiele, etwa die Hauptgewinner, enorm wichtige Konsequenzen hat, auch ein subjektiv zufällig erzeugtes Ereignis der Sorte (W4). Das Gleiche gilt für die Ausspielung der Gewinnzahl beim Roulette. Ich entscheide mich also bei der Frage, ob die Hauptgewinner der Lotto-Ausspielung schon am

Nachmittag feststehen für „Nein“, da ich sie zu dem Zeitpunkt als zufällig ansehe gemäß Hypothese (W).

### (3) Würfeln

Der Ausgang des Experiments wird bestimmt durch menschliches Handeln und die Gesetze der Mechanik. Letztere werden aber erst wirksam nach Vorgabe für Anfangsbedingungen durch den Experimentator. Die Anfangssituation des zugehörigen Ereignisses sei beschrieben durch das Ergreifen von Würfel und Becher seitens des Experimentators, die Umgebungssituation sei „unauffällig“. Der Ablauf des Ereignisses, das natürlich bei genauere Hinsicht aus einer ganzen Ereigniskette besteht, vollzieht sich durch das Bewegen von Becher und Würfel bis zur Freigabe des Würfels durch den Experimentator und das anschließende Fallen und Rollen des Würfels gemäß den Gesetzen der klassischen Mechanik. Die Endsituation entspricht der oben liegenden Augenzahl des Würfels. Auch dieses Experiment unterliegt chaotischen Einflüssen, da eine geringe Variation in den Bewegungen des Experimentators oder z.B. Unebenheiten der „Aufschlagfläche“ das Ergebnis ändern können. Den beliebig vielen Möglichkeiten, den Becher zu führen, den Würfel im Becher zu schütteln und eine Abwurfposition für den Würfel zu finden, stehen 6 mögliche Auskommen des Versuchs gegenüber. Nach meinem Verständnis wählt analog zu Beispiel (1) der Experimentator aus der Menge aller Abwurfbedingungen eine aus im Bewusstsein, das Ergebnis des Wurfes nicht manipulieren zu können, möglicherweise mittels eines Randomisators. Ab dem Zeitpunkt der Freigabe des Würfels mag man das Geschehen als durch die Gesetze der Physik determiniert ansehen. Die in Hinsicht auf das Ergebnis „ohnmächtige“ Auswahl der konkreten Abwurfbedingungen aus einer Menge von unendlich vielen möglichen lässt mich dieses Experiment bzw. Ereignis als „subjektiv zufällig erzeugt“ der Sorte (W1) klassifizieren bzw. der Sorte (W4), falls der Experimentator bewusst die Gleichverteilung realisieren will.

### (4) Radioaktiver Zerfall

Der radioaktive Zerfall von Atomen eines passenden Isotops eines radio-

aktiven Elements gilt seit eh und je als das klassische, übersichtliche Zufallsexperiment, über dessen Ausgang die „Natur“ alleine entscheidet ohne Zutun des Menschen. Genauer gesagt besteht das Experiment darin, zu beobachten, wie viele Atome einer bestimmten Menge des Materials in einem bestimmten Zeitintervall zerfallen. Traditionell gilt der Zerfall eines radioaktiven Atoms als ein von der Natur erzeugtes zufälliges Ereignis, also ein „objektiv zufälliges“ Ereignis, das ohne Zutun des Menschen stattfindet, und zu dem auch keine Entwicklung innerhalb des Atoms hinführt, so dass der Zerfallszeitpunkt mittels passender Messinstrumente prinzipiell vorhergesagt werden könnte.

Es gibt zwei Möglichkeiten, dieses Experiment zu definieren:

Die erste besteht darin, die Einrichtung des Experiments in Form des vorliegenden Materialklumpens, des Messinstrumentes und des Startzeitpunktes der Zählung als gegebene Anfangssituation hinzunehmen. Bejaht man den objektiven Zufall auf der Ebene der Quanten, wird man das Ergebnis, eben die Anzahl zerfallener Atome, als „objektiv zufällig“ auffassen, negiert man den objektiven Zufall, wird man es nur als „ungewiss“, d.h. „subjektiv zufällig bewertet“, auffassen.

Die zweite Möglichkeit ergibt sich folgendermaßen: Zieht man die generelle Individualität der am Experiment beteiligten Menschen und aller Materialien in Betracht, wozu etwa Gerd Helmecke in seinem Vortrag auf dem Symposium 2014 auffordert, so setzt man als Anfangssituation die Auswahl der Materialien und des Startzeitpunktes der Beobachtung durch den Experimentator. Unter der Hypothese (W) sind diese Auswahlen „subjektiv zufällig erzeugt“ von der Sorte (W1). Diese Zufälligkeit pflanzt sich auf das Versuchsergebnis fort. Somit ist dieses dann unter der Annahme des objektiven Zufalls zweifach zufällig, bei Negation des objektiven Zufalls immer noch „subjektiv zufällig erzeugt“.

#### (5) Experimente der Quantenphysik

Die bei obigem Beispiel (4) ausgeführte Argumentation zum Einfluss von Menschen auf Durchführung und Ausgang von Experimenten gilt in gewis-

ser Weise für jedes Experiment. Eine besonders wichtige Klasse von Experimenten sind solche an Elementarteilchen, weil bei diesen die Wechselwirkung zwischen den zu untersuchenden Objekten, eben Elementarteilchen, und der Messapparatur wesentlich und seit den Anfängen der Quantenphysik bekannt ist. Werner Heisenberg läßt grüßen, möchte man sagen. Über die Messapparatur und den Zeitpunkt der Beobachtung beeinflusst der menschliche Experimentator das Ergebnis des Experimentes, so dass es „subjektiv zufällig erzeugt“ ist von der Sorte (W1). Ob das Geschehen auf Quantenebene „objektiv zufällig“ ist (Werner Heisenberg) oder nicht (Bohm) ist noch eine andere Frage. Je nach dem, wie man diese letzte Frage beantwortet, ist das Beobachtungs- oder Versuchsergebnis zweifach zufällig („objektiv“ und „subjektiv zufällig erzeugt“) oder nur einfach „subjektiv zufällig erzeugt“.

(6) Die überraschende oder „zufällige“ Begegnung zweier alter Freunde fern der Heimat.

Man betrachte folgendes Ereignis: Zwei „gestandene Männer“ aus Deutschland, die vor Jahrzehnten einmal befreundet waren, sich aber seit langem aus den Augen verloren haben, viele Jahre lang keinen Kontakt miteinander hatten, treffen sich auf einem Parkplatz am Rande eines Highways durch die Rocky Mountains und erkennen sich wieder. Wie ist diese Begegnung als Ereignis zu bewerten?

Die Begegnung mit Wiedererkennen ist die gemeinsame Endsituation zweier Ereignisketten von beträchtlicher Länge. Der Anfang der 1. Ereigniskette besteht darin, dass sich Person A entschließt, in den Ferien im September per Wohnmobil die kanadischen Rocky Mountains zu durchstreifen. Der Anfang der 2. Ereigniskette besteht darin, dass Person B zu einer zweiwöchigen Geschäftsreise nach Vancouver geschickt wird. Am freien Wochenende unternimmt er per Leihwagen einen Ausflug durch die Rocky Mountains. Samstagmittag, um 12 Uhr, treffen die beiden Ereignisketten in Gestalt der Personen A und B aufeinander. A und B haben sich wenige Minuten vorher entschlossen, auf dem nächsten Parkplatz anzuhalten, der eine, um die Aussicht zu genießen, der andere, um etwas zu trinken. Die gemeinsame

Endsituation wird herbeigeführt im wesentlichen durch das Verhalten bzw. Handlungen der Personen A und B. Es hängt natürlich von der gestellten Hypothese über das menschliche Verhalten ab, ob das überraschende Wiedersehen der alten Freunde im Referenzrahmen der Physik als zufällig oder determiniert anzusehen ist. Unter Hypothese (D) ist es ein deterministisches (Natur-) Ereignis, unter der Hypothese (W) ein subjektiv zufällig erzeugtes der Sorte (W1), wie gleich begründet wird.

An diesem Beispiel zeigt sich deutlich eine Unangemessenheit der retrospektiven Betrachtungsweise: Natürlich gibt es eine Abfolge von Entscheidungen und Verhaltensweisen, die zum Zusammentreffen führt. Beide Personen haben irgendwann ihre Kanada-Reise gebucht, beide haben sich irgendwann entschlossen, den bestimmten Highway zu fahren, an dessen Rand sie sich treffen, beide haben irgendwann den Tag ausgesucht, an dem sie diese Etappe auf dem Highway fahren usw.. Hängt man der Hypothese (W) an, so kommt man mittels der prospektiven Betrachtungsweise zu einer verschiedenen Bewertung: Es hätte auf dem Wege bis zum Zusammentreffen 1000 andere mögliche Verhaltensweisen und Entscheidungen gegeben, die **nicht** zum Zusammentreffen geführt hätten, sondern dazu, dass A und B aneinander vorbeigefahren wären. Dazu etwa als Beispiel: Person B, der Geschäftsreisende, sitzt am Samstagmorgen, dem Tag des Zusammentreffens, beim Frühstück in seinem Hotel in Vancouver. Er hat geplant, das Hotel um 9 Uhr zu verlassen, um zum Ausflug durch die Rocky Mountains zu starten. Während seines Frühstücks blättert er in der Zeitung, die ein freundlicher Kellner ihm gereicht hat, findet eine Überschrift, die seine Aufmerksamkeit erregt, liest den folgenden Artikel und stößt dabei aus reiner Unachtsamkeit seine Kaffeetasse um. Der Kaffee läuft über sein Hosenbein, worauf er sich veranlasst sieht, auf sein Zimmer zu gehen und eine neue Hose anzuziehen. Dadurch bedingt startet er erst um 9.20 Uhr zum Ausflug und trifft schließlich um 12.00 Uhr seinen alten Freund. Wäre der Kaffee nicht über seine Hose gelaufen, wäre B etwa 20 Minuten früher gestartet und die beiden alten Freunde hätten sich nicht auf dem Parkplatz getroffen,

sondern wären aneinander vorbeigefahren und sich vielleicht nie wieder im Leben begegnet.

Man mag auch zur weitergehenden Bewertung oder sogar Deutung des Ereignisses fragen, wie es eben weitergeht nach der Begegnung.

Variante 1: A und B tauschen ihre Telefonnummern aus, versichern sich gegenseitig, demnächst einmal anzurufen, aber keiner von beiden wird anrufen. In diesem Fall werden die Personen sich vielleicht beim Urlaub im folgenden Jahr an die Kuriosität des überraschenden Zusammentreffens erinnern, dem aber keine Bedeutung oder Sinn zumessen.

Variante 2: Der Geschäftsreisende B lädt A mit seiner Familie für ein bestimmtes Datum zu sich nach Hause ein, sie wohnen 500 km voneinander entfernt. A reist mit Familie an. Die Tochter von B verliebt sich bei diesem Besuch in den Sohn von A. Einige Jahre später heiraten die beiden jungen Leute und gründen eine Familie. In dem Fall wird die überraschende Begegnung von A und B in die „Annalen“ der beiden Familien eingehen und noch nach Jahrzehnten mögen die Enkelkinder von A und B die erstaunliche Geschichte des Zusammentreffens erzählen. Sie wären „wahrscheinlich“ nicht auf der Welt ohne das geheimnisvolle Zusammentreffen der Großväter. Das Ereignis würde als höchst bedeutsam, als Schicksal bewertet, gläubige Menschen würden von Fügung sprechen.

Selbstverständlich finden die Bewertungen des oben erzählten Ereignisses nicht statt im Rahmen einer naturwissenschaftlichen Betrachtung, da es dort nicht um Deutungen und existenziellen Sinn geht, sondern im Rahmen der Metaphysik. Metaphysische Vorstellungen und Bewertungen setzen eine Glaubensentscheidung voraus, wie auch immer diese ausfallen mag.

## **7. Resumée**

Das Thema „Zufall“ hat die Menschen zu allen Zeiten auf- und angeregt. Erfahrungen mit ungewissen Ereignissen, d.h. solchen, die nach der oben vorgestellten Systematik subjektiv zufällig bewertet sind, liegen „auf der Hand“ und sind allgemein anerkannt. Ob bzw. in welcher Form eigentlich

zufällige Ereignisse konzipiert werden müssen, ist bis heute strittig.

Rein prinzipiell kann die eigentliche Zufälligkeit von Ereignissen immer angezweifelt werden mit den Argumenten:

- (1) Man kann sagen, dass wir zur Zeit noch nicht alle zur Beschreibung bzw. Vorhersage eines Ereignisablaufs wirksamen Naturgesetze kennen. Somit könnten aus uns heute zufällig erscheinenden Ereignissen in der Zukunft deterministische werden. (Nicht-Wissen von Naturgesetzen)
- (2) Wir können immer nur einen kleinen Ausschnitt der natürlichen Wirklichkeit betrachten. Formal bedeutet das: Ein Ereignis, das wir als unbedingt modelliert zu haben glauben, kann in Wirklichkeit wegen der Komplexität des Geschehens wesentlich bedingt sein, so dass nicht erfasste und berücksichtigte andere Ereignisse das zu untersuchende Ereignis beeinflussen. (Komplexität nach außen)
- (3) Wegen der Individualität aller Dinge und Abläufe, eventuell bis auf die Ebene der Elementarteilchen, können wir alles nur ungenau erfassen, messen und beschreiben. Formal bedeutet das: Es können noch verborgene Parameter oder Variablen im Spiel sein sowie Fehlerterme von Messungen. (Komplexität nach innen)
- (4) Gemäß den Punkten (2) und (3) kann man nie exakte Kopien ein- und desselben Experimentes herstellen. Vermeintliche Kopien sind eventuell etwas verschiedene Experimente. Genauso gilt für Personen, dass total identische Situationen für zu wiederholende Auswahlen nicht möglich sind. Erst verschiedene Auskommen von exakten Kopien eines Experimentes wären der empirisch zwingende Nachweis der Zufälligkeit. (Keine total identische Wiederholbarkeit)

Dazu möchte ich einwenden: Die Argumentation, Probleme seien noch nicht genügend vorbereitet oder formalisierbar für den Einsatz einer (natur-) wissenschaftlichen Analyse, ist unüblich. Bei manchen Naturgesetzen könnte

man fragen, ob ihre reklamierte Allgemeingültigkeit die „finale Version“ ist. Analog zum obigen Einwand (4) ist zu bemerken, dass deterministische Naturgesetze, insbesondere solche in Form einer Gleichung, sich auf idealisierte Versuchsbedingungen beziehen, die in der Realität nie exakt vorhanden bzw. herstellbar sind. Insbesondere beim Urnenexperiment sehe ich obige Argumente (2), (3) und (4) nicht wirksam. Es ist klar, dass (1) nie erfüllt werden kann. Dehnt man das von der klassischen Physik herkommende Prinzip des strengen Ursache-Wirkungs-Mechanismus, also des Determinismus, auf Alles axiomatisch aus, läuft man Gefahr, eine unzulässige Extrapolation zu begehen, sei es in der Quantenphysik oder in Anwendung auf Lebewesen. Die Annahme des objektiven Zufalls impliziert auch keinen Abschied von Naturgesetzen und -gesetzmäßigkeiten, da der Zufall solchen gehorcht, wie die Stochastik zeigt. Die Quantenphysik hat, so meinte man jedenfalls vor einigen Jahrzehnten, gezeigt, dass auf Ebene der Quanten solche eigentlich zufälligen Ereignisse vorkommen. Diese heißen dann, wenn die Zufälligkeit unabhängig vom Eingreifen eines Beobachters sein sollte, objektiv zufällig. Heute gibt es wieder verschiedene kontroverse Meinungen über die Existenz des objektiven Zufalls in der Quantenphysik.

Ich thematisiere in meinem Vortrag speziell den subjektiv erzeugten Zufall. Unter der Hypothese (W) für das Zustandekommen menschlicher Entscheidungen sind viele daraus folgende Handlungen auf der Ebene der Phänomene nach naturwissenschaftlichen Kriterien ebenfalls als eigentlich zufällig anzusehen. Da diese von einem Subjekt ausgeführt werden, nenne ich sie in der obigen Bezeichnungssystematik „subjektiv zufällig erzeugt“ in Unterscheidung zu den objektiv zufälligen Ereignissen. Akzeptiert man die Hypothese (W), so sind eigentlich zufällige Ereignisse in unserer Welt allgegenwärtig, da diese mit Ereignisketten durchsetzt ist, in denen subjektiv zufällig erzeugte Handlungen vorkommen. Unter der Hypothese (D) scheinen eigentlich zufällige Ereignisse eine Randerscheinung zu sein. Außerhalb der Quantenwelt gibt es nur eine Möglichkeit für das Auftreten des eigentlichen Zufalls: Wenn es den objektiven Zufall in der Quantenphysik gibt, können Quanten-

effekte auf die makroskopische Ebene vordringen, z.B. über divergierende Kettenreaktionen, etwa Mutationen im Erbgut. Allerdings können auch solche Effekte durch ihren Eingriff in Ereignisketten und sich daraus wieder abspaltende Ereignisketten eine Lawine von eigentlich zufälligen Ereignissen auslösen.

Unter der Hypothese (W) sind die größte Quelle für den Zufall in der Welt somit der Mensch und allgemein Lebewesen wegen der Vielzahl subjektiv zufällig erzeugter Ereignisse. Es bleiben immer Grenzen für unsere menschliche Erkenntnis, die wir akzeptieren müssen und sollen. Aber wir können bis an diese Grenzen Erkenntnisse sammeln, verstehen, wo und soweit es geht, uns dessen freuen und mit unseren Grenzen bescheiden. „Der Weise versteht es, die Dinge zuzuordnen“ hat einmal jemand gesagt. Daraus kann dann vielleicht eine stolze Bescheidenheit erwachsen, kein bescheidener Stolz. Was kann bei aller Deutungsvielfalt eine gemeinsame Erkenntnis oder Einstellung sein, zu der man beim Nachdenken über den Zufall oder bei der Beschäftigung mit Mathematik und Natur gelangen kann?

Ich möchte hier zum Schluß auf die Haltung des Staunens zu sprechen kommen. Wer offen ist für das Staunen, der genügt sich nicht selbst, ist offen für Neues, für höhere Einsichten, der ist bereit, sich überraschen zu lassen und möglicherweise beschenken zu lassen, der kann sich noch begeistern, wachsen und sich entwickeln.

Ich habe in der Beschäftigung mit der Wissenschaft das Staunen gelernt und erfahren und dafür bin ich dankbar.

## Literatur

Heisenberg, M. (2007), Naturalisierung der Freiheit aus Sicht der Verhaltensforschung. in: Heilinger, J.C.: Naturgeschichte der Freiheit, De Gruyter, Berlin.

Herkenrath, U. (1998), Gott würfelt nicht - oder doch? *Renovatio-Zeitschrift für das interdisziplinäre Gespräch* **54**, 17–29.

Herkenrath, U. (2013), Zufall - Eine Randerscheinung in unserer Welt oder allgegenwärtig?, Schriftenreihe der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen, SM-UDE-766.

Kessler, H. (2009), Evolution und Schöpfung in neuer Sicht, Butzon & Bercker, Kevelaer.

Lüke, U. (2008), Plan Gottes oder alles nur (dummer) Zufall?, In: B. Schwarz-Boenneke (Hg.), *Weiß der Glaube - Glaubte das Wissen?*, Akademie des Bistums Mainz.

Monod, J. (1971), *Zufall und Notwendigkeit*, Piper, München.

Müller, P.H. (Hg.), (1991), *Lexikon der Stochastik*, Akademie Verlag, Berlin.

Müller, P.H. (1994), Zufall oder Notwendigkeit?, In: *Almanach*, Band VII, 137–144, Deutscher Hochschulverband, Bonn.

Mutschler, H.-D. (2014), *Halbierte Wirklichkeit*, Butzon & Bercker, Kevelaer.

Stochastik, in Wikipedia (Internet)

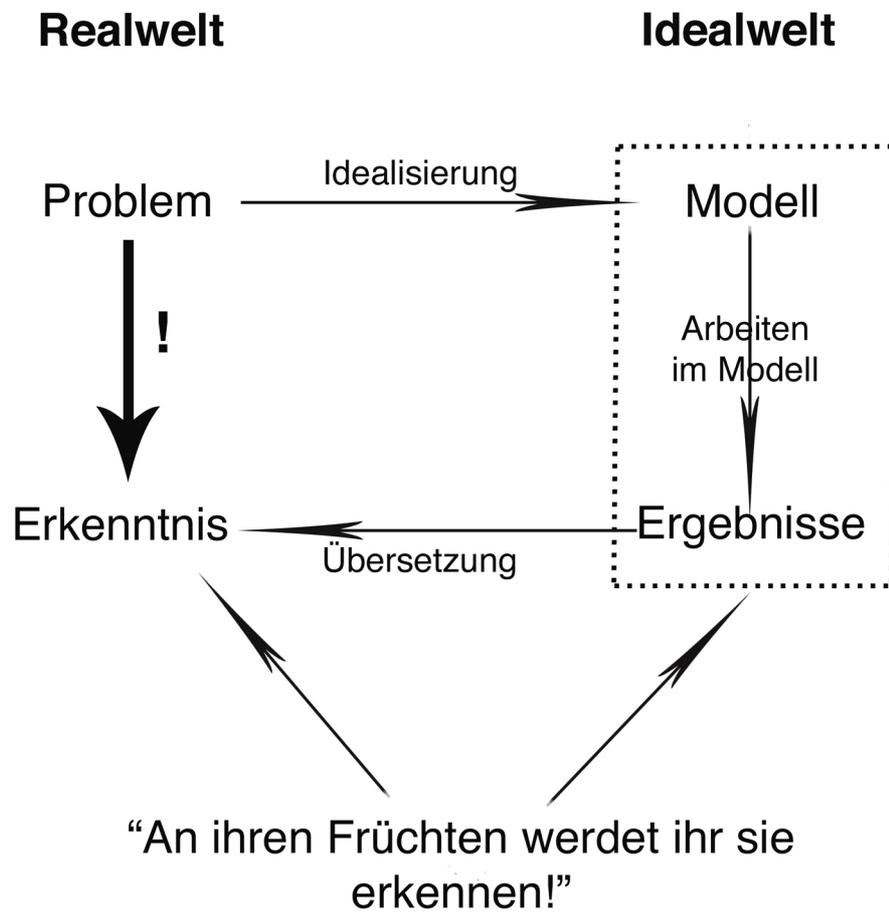


Abbildung 1: Tableau der naturwissenschaftlichen Erkenntnisgewinnung

# NATUR

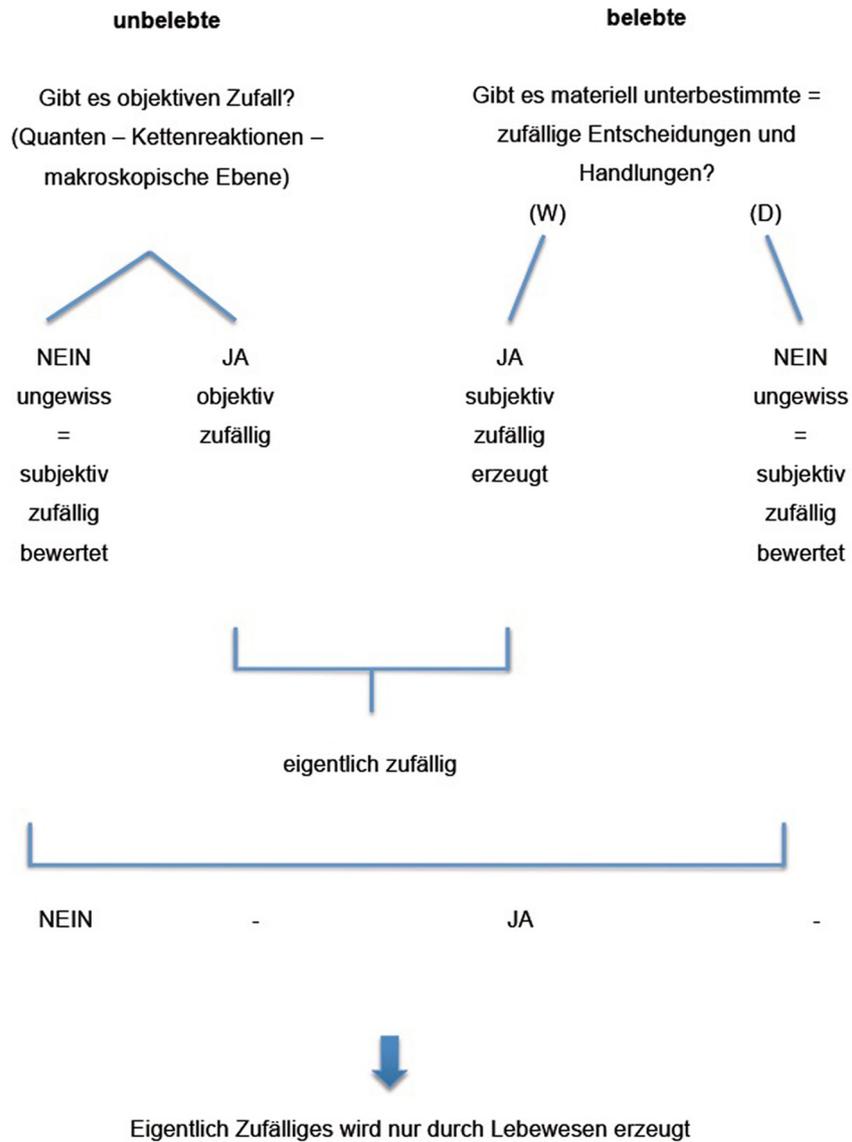


Abbildung 2: Möglichkeiten für zufällige Ereignisse der verschiedenen Arten

IN DER SCHRIFTENREIHE DER FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK ZULETZT ERSCHIENENE  
BEITRÄGE:

- Nr. 769: Mali, O., Muzalevskiy, A., Pauly, D.: Conforming and Non-Conforming Functional A Posteriori Error Estimates for Elliptic Boundary Value Problems in Exterior Domains: Theory and Numerical Tests, 2013
- Nr. 770: Bauer, S., Neff, P., Pauly, D., Starke, G.: Dev-Div- and DevSym-DevCurl-Inequalities for Incompatible Square Tensor Fields with Mixed Boundary Conditions, 2013
- Nr. 771: Pauly, D.: On the Maxwell Inequalities for Bounded and Convex Domains, 2013
- Nr. 772: Pauly, D.: On Maxwell's and Poincaré's Constants, 2013
- Nr. 773: Fried, M. N., Jahnke, H. N.: Otto Toeplitz's "The problem of university infinitesimal calculus courses and their demarcation from infinitesimal calculus in high schools" (1927), 2013
- Nr. 774: Yurko, V.: Spectral Analysis for Differential Operators of Variable Orders on Star-type Graphs: General Case, 2014
- Nr. 775: Freiling, G., Yurko, V.: Differential Operators on Hedgehog-type Graphs with General Matching Conditions, 2014
- Nr. 776: Anjam, I., Pauly, D.: Functional A Posteriori Error Equalities for Conforming Mixed Approximations of Elliptic Problems, 2014
- Nr. 777: Pauly, D.: On the Maxwell Constants in 3D, 2014
- Nr. 778: Pozzi, P.: Computational Anisotropic Willmore Flow, 2014
- Nr. 779: Buterin, S.A., Freiling, G., Yurko, V.A.: Lectures on the Theory of entire Functions, 2014
- Nr. 780: Blatt, S., Reiter, Ph.: Modeling repulsive forces on fibres via knot energies, 2014
- Nr. 781: Neff, P., Ghiba, I.-D., Lankeit, J.: The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy. Part I: Constitutive issues and rank-one convexity, 2014
- Nr. 782: Neff, P., Münch, I., Martin, R.: Rediscovering G.F. Becker's early axiomatic deduction of a multiaxial nonlinear stress-strain relation based on logarithmic strain, 2014
- Nr. 783: Neff, P., Ghiba, I.-D., Madeo, A., Placidi, L., Rosi, G.: A unifying perspective: the relaxed linear micromorphic continuum, 2014
- Nr. 784: Müller, F.: On  $C^{1,1/2}$ -regularity of  $H$ -surfaces with a free boundary, 2014
- Nr. 785: Müller, F.: Projectability of stable, partially free  $H$ -surfaces in the non-perpendicular case, 2015
- Nr. 786: Bauer S., Pauly, D.: On Korn's First Inequality for Tangential or Normal Boundary Conditions with Explicit Constants, 2015
- Nr. 787: Neff, P., Eidel, B., Martin, R.J.: Geometry of logarithmic strain measures in solid mechanics, 2015
- Nr. 788: Borisov, L., Neff, P., Sra, S., Thiel, Chr.: The sum of squared logarithms inequality in arbitrary dimensions, 2015
- Nr. 789: Bauer, S., Pauly, D., Schomburg, M.: The Maxwell Compactness Property in Bounded Weak Lipschitz Domains with Mixed Boundary Conditions, 2015
- Nr. 790: Claus, M., Krätschmer, V., Schultz, R.: WEAK CONTINUITY OF RISK FUNCTIONALS WITH APPLICATIONS TO STOCHASTIC PROGRAMMING, 2015
- Nr. 791: Bauer, S., Pauly, D.: On Korn's First Inequality for Mixed Tangential and Normal Boundary Conditions on Bounded Lipschitz-Domains in  $\mathbb{R}^n$ , 2016
- Nr. 792: Anjam, I., Pauly, D.: Functional A Posteriori Error Control for Conforming Mixed Approximations of Coercive Problems with Lower Order Terms, 2016
- Nr. 793: Herkenrath, U.: "ARS CONJECTANDI" UND DIE NATUR DES ZUFALLS, 2016