Prof. Dr. M. Horn-von Hoegen, Fakultät für Physik, UDE

4. Schwingungen und Wellen

4.1 Harmonische Schwingungen

Schwingung ist eine **periodische** sich wiederholende **Bewegung**, z.B. eine Feder mit Federkonstante D und bewegter Masse m (**Federpendel**). Dabei ist die **Rückstellkraft** $\boldsymbol{F_R}$ bei Auslenkung aus der Ruhelage (Hooke´sches Gesetz)

$$\boldsymbol{F_R = -D \cdot x}$$

zusammen mit der Grundgleichung der Mechanik $F = m \cdot a = m \cdot d^2x/dt^2$ ergibt sich die **Schwingungsgleichung** für die Koordinate $x(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m} \cdot x$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung für die Bewegung $x(t)$ findet man durch gezieltes "Probieren":

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

mit $\omega = \sqrt{D/m}$ der **Kreisfrequenz**, der **Amplitude** A und der **Startphase** φ_0 der Schwingung (durch zweimaliges Differenzieren nach der Zeit kann jeder die Erfüllung der Schwingungsgleichung nachvollziehen). Eine Schwingung dieser Form nennt man "**harmonische Schwingung**".

Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$, Frequenz $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Aus $x(t)$ kann nun durch einmaliges Differenzieren die Geschwindigkeit $v(t)$ bestimmt werden:

$$v(t) = \omega \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Damit lässt sich die Maximalgeschwindigkeit v_{max} des Pendels mit der Amplitude A und Kreisfrequenz ω in Zusammenhang bringen:

$$v_{max} = \omega \cdot A$$

Ein **mathematisches Pendel** (Gewicht an Faden der Länge L schwingend) erfährt eine vom **Auslenkungswinkel** α abhängiges **Rückstellmoment**. Für kleine Auslenkungswinkel α < 10° wird eine harmonische Schwingung ausgeführt:

$$\alpha(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{g/L}$$

Die Masse des Gewichts spielt keine Rolle!

Bei jeder Schwingung bleibt die **Gesamtenergie** aus kinetischer und potentieller Energie ständig gleich. Es kommt während einer Schwingungsperiode zu einer kompletten **Umwandlung** von **potentieller** in **kinetische** Energie und zurück:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}m \cdot v(t)^2 + \frac{1}{2}D \cdot x(t)^2 = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

E_{ges} ist für eine ungedämpfte Schwingung unabhängig von der Zeit.

4.2 Wellen

Bei der **Kopplung** vieler schwingungsfähiger Systeme (**Oszillatoren**) pflanzt sich die Schwingung räumlich (von einem Oszillator zum anderen) fort. Dabei wird keine Materie, wohl aber Energie übertragen. Das ist eine **Welle**!

Beschreibung der Welle erfolgt durch ihre **Auslenkung in Raum und Zeit**:

$$s(x,t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - \omega \cdot t\right)$$

Mit der **Wellenlänge** λ, nach der sich die Welle im Raum periodisch wiederholt, und der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$, nach der sich die Welle in der Zeit periodisch wiederholt. Zusammen führt dies zum Fortschreiten der Wellen mit der Geschwindigkeit (**Phasengeschwindigkeit**):

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Mit Einführung der **Wellenzahl** $k = 2\pi/\lambda$ wird der Ausdruck noch eleganter (und dann mit der vektoriellen Schreibweise $\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)$ erst für eine Ausbreitung im 3-dim. Raum nutzbar):

$$s(x,t) = A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

Dies ist eine **ebene Welle**, die sich mit der Geschwindigkeit $c = \omega/k$ in x-Richtung ausbreitet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist eine Eigenschaft des Mediums, in dem sich die Welle ausbreitet:

Wasserwelle	s = Höhe, f = 1 Hz, $c \cong$ 1 m/s, $\lambda \cong$ 1 m, $c = \sqrt{g \cdot \lambda/2\pi}$
Schallwelle	s = Druck, f = 440 Hz, $c \cong$ 330 m/s, $\lambda \cong$ 0,75 m
Ultraschall im Körper	s = Druck, f = 300 kHz, $c \cong$ 1500 m/s, $\lambda \cong$ 5 mm
Radiowelle	s = El. Feld, f = 100 MHz, c = 300000 km/s, $\lambda \cong$ 3 m
Licht	s = El. Feld, f = 1x10^{15} Hz, c = 300000 km/s, $\lambda \cong$ 500 nm
Röntgenstrahlung	s = El. Feld, f = 1x$10^{18\text{-}19}$ Hz, c = 300000 km/s, $\lambda \cong$ 1 Å -1 nm

Der von einer Welle transportierte **Energiestrom**

$$I \propto \omega^2 \cdot A^2 \cdot c$$

ist die Intensität der Welle, gemessen in W/m^2.

Weitere Eigenschaften:

- Transversalwelle = Auslenkung ⊥ Ausbreitungsrichtung (Wasserwelle, Licht)
  Longitudinalwelle = Auslenkung ∥ Ausbreitungsrichtung (Schallwelle)
- Wellen überlagern sich und können sich gegenseitig ohne Beeinflussung durchdringen
- Wellen werden reflektiert:
  - o “offenes Ende“: ohne Phasensprung
  - o “festes Ende“: mit Phasenspannung um 180°
- **Stehende Wellen** bilden sich bei Reflexion und Überlagerung im geschlossenen Volumen (Resonator). Die Wellenlänge $\lambda = c/f$ muss hierbei zur Resonatorlänge L passen: $L = \lambda/2$
- Bei einer bewegten Welle oder bewegtem Empfänger (Geschwindigkeit v) kommt es zu einer Frequenzverschiebung (**Dopplereffekt**)

$f = f_0 \cdot \frac{1}{1-v/c}$ Quelle nähert sich bei ruhendem Empfänger

$f = f_0 \cdot \frac{1}{1+v/c}$ Quelle entfernt sich bei ruhendem Empfänger

$f = f_0 \cdot (1 \pm v/c)$ Empfänger kommt näher / entfernt sich

4.3 Reflexion, Brechung, Interferenz und Beugung

Wir unterscheiden zwischen verschieden Wellenformen:

$s(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)$ ebene Welle

$s(r, t) = A \cdot \frac{\cos(k \cdot r - \omega \cdot t)}{\sqrt{r}}$ 2-dim. Kreiswelle

$s(r, t) = A \cdot \frac{\cos(k \cdot r - \omega \cdot t)}{r}$ 3-dim. Kugelwelle

Mit der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$

Wellen überlagern sich additiv. Dabei kommt es zu

konstruktive Interferenz bei **Verstärkung**
(Berg und Berg, bzw. Tal und Tal überlagern sich)

destruktive Interferenz bei **Auslöschung**
(Berg und Tal, bzw. Tal und Berg überlagern sich)

Wichtig für die Wellenausbreitung ist das Huygens ´Prinzip:

Jeder Punkt einer Welle ist Ausgangspunkt einer Kugelwelle (“Elementarwelle“)

Die Welle setzt sich aus Überlagerung aller Elementarwellen zusammen

Die führt zu:

Reflexion von Wellen mit **Einfallswinkel = Ausfallswinkel**

Brechung von Wellen: im optisch dichteren Medium (mit der geringeren Ausbreitungsgeschwindigkeit c_2) wird die Welle zum Lot hin gebrochen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

Beugung an kleinen Objekten bzw. kleinen Spalten (siehe Optik)