6. Elektrizität und Magnetismus

6.1 Elektrostatik

Coulomb-Gesetz

Körper können neben der Masse auch **elektrische Ladungen** tragen. Es gibt positive und negative Ladungen. Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab. Ungleichnamige Ladungen ziehen sich an. Kraft zwischen zwei Ladungen ist proportional dem Produkt der beiden wechselwirkenden Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \qquad \textbf{Coulomb-Gesetz}$$

Die Richtung der Kraft ist stets entlang der Verbindungslinie. Bei mehreren Ladungen addieren sich die Einzelkräfte vektoriell.

Ladungen werden in C (Coulomb) gemessen.

Das Kraftfeld F_r um eine Ladung Q auf eine kleine Probeladung q_0 wird durch das elektrische Feld beschrieben:

$$\overrightarrow{E}(\vec{r}) = \frac{\overrightarrow{F}}{q_0} \qquad \textbf{elektrisches Feld}$$

Das elektrische Feld kann auch von mehreren Ladungen erzeugt werden. Darstellung des Feldes erfolgt durch die Feldlinien, die vom + Pol zum – Pol weisen. Die Dichte der Feldlinien ist ein direktes Maß für die Feldstärke $\overrightarrow{E}(\vec{r})$.

Eine Punktladung erzeugt ein Radialfeld, zwei ungleichnamig geladene Punktladungen ein Dipolfeld, zwei ungleichnamig geladene Platten ein homogenes konstantes elektrisches Feld $\overrightarrow{E}(\vec{r}) = konst$

Elektrostatisches Potential

Die Bewegung einer Ladung q_0 im elektrischen Feld erfordert mechanische Arbeit. Die Ladung q_0 erfährt die Kraft $\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}(\vec{r})$ längs des Weges $\Delta\vec{s}$:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F_{\parallel} \cdot \Delta s = q_0 \cdot E_{\parallel} \cdot \Delta s \qquad \textbf{elektrisches Feld}$$

ΔW ist unabhängig vom Weg der Ladung q_0. Die Ladung ändert bei der Bewegung ihre potentielle Energie $E_{pot}(r)$.

Das elektrostatische Potential

$$V(\vec{r}) = \frac{E_{pot}(\vec{r})}{q_0} \qquad \textbf{elektrostatisches Potential}$$

als Eigenschaft des Raumes in dem ein elektrisches Feld vorhanden ist. Die elektrische **Spannung** U_{AB} ist die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten A und B:

$$U_{AB} = V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B) \qquad \textbf{elektrische Spannung}$$

Die Dimension der Spannung ist Arbeit/Ladung

Maßeinheit: $J/C = V$ (Volt)

Plattenkondensator

Wenn zwischen den Platten eines Plattenkondensators ein elektrisches Feld der Stärke E herrscht, so liegt an den Platten die Spannung

$$U = E \cdot d$$

an. Bei bekannter Spannung herrscht folgendes elektrisches Feld:

$$E = U/d$$

Dimension von E : Spannung/Länge

Maßeinheit V/m

Das elektrische Feld im Kondensator wird von elektrischen Ladungen Q auf den Platten erzeugt. Dabei gilt:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} \quad \text{oder} \quad Q = \varepsilon_0 \cdot A \cdot \frac{U}{d}$$

mit der Dielektrizitätskonstante ε_0 = 8,8 x 10^{-12} C/Vm. Der Plattenkondensator **speichert** also **Ladungen** $Q = C \cdot U$, wobei

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

die **Kapazität** des Kondensators darstellt.

Maßeinheit in $C/V = F$ (Farad), mit A der Fläche des Kondensators und d dem Plattenabstand. Die **gespeicherte potentielle Energie** ist

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

Beachte die Spannung zum Quadrat!

6.2 Elektrischer Strom und Ohmsches Gesetz

Verbindet man die Platten eines Kondensators durch ein **elektrisch leitfähiges Medium**, so kommt es zum Ausgleich der Ladungen durch **Ladungstransport**. Der **elektrische Strom I** ist definiert als **transportierte Ladung pro Zeiteinheit**

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

und fließt vom **Pluspol zum Minuspol** einer Spannungsquelle (technische Stromrichtung). Die Maßeinheit ist **Ampere**:

$$1A = 1C/1s$$

Die Ladungen in einem elektrischen Leiter werden auf Grund der im elektrischen Feld wirkenden Kraft $\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}(\vec{r})$ bewegt. Der Stromfluss I ist damit proportional zur Potentialdifferenz U

$I = \frac{U}{R}$ oder $U = R \cdot I$ oder $R = \frac{U}{I}$ **Ohmsches Gesetz**

Die Konstante nennt man Widerstand. Der Widerstand eines Drahtes ist proportional zur Länge L und invers proportional zum Querschnitt A:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A}$$

mit dem materialabhängigen **spezifischen Widerstand** ρ

Serienschaltung von Widerständen: Schließt man zwei oder mehr Widerstände **nacheinander** (in Reihe oder Serienschaltung) an eine Spannungsquelle an, so **addieren** sich die **Einzelwiderstände** zum **Gesamtwiderstand**:

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

Beispiel: Drei Widerstände a 120 Ω:

R_{ges} = 120 Ω + 120 Ω + 120 Ω = 360 Ω

Parallelschaltung von Widerständen: Schließt man zwei oder mehr Widerstände **nebeneinander** (parallel) an eine Spannungsquelle an, so **addieren** sich die **Kehrwerte der Einzelwiderstände** zum **Kehrwert des Gesamtwiderstands**:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$$

Beispiel: Drei Widerstände a 120 Ω:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{120\Omega} + \frac{1}{120\Omega} + \frac{1}{120\Omega} = \frac{3}{120\Omega} = \frac{1}{40\Omega}$$

$\Rightarrow R_{ges} = 40\ \Omega$

Elektrische Leistung:

Strom leistet **Arbeit pro Zeiteinheit = Leistung**:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot U = I \cdot U$$

Mit der Maßeinheit Watt = V A

Die dabei in der Zeit geleistete Energie = Leistung x Zeit hat die Maßeinheit:

1W x 1s = 1 Ws=1 VAs

Da gleichzeitig gilt:

W = VA = J/C x A = J/(As) x A = J/s

Ergibt sich folgende Äquivalenz:

1 J = 1 Ws = 1 Vas = 1 Nm

der Energieformen.

6.3 Magnetismus

Magnetische Kraftwirkung wird über das **Magnetfeld B(r)** beschrieben. Ein Magnet hat einen **Nord- bzw. Südpol**. Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an. Es gibt keine magnetischen Monopole, Magnetismus tritt immer als **Dipolfeld** (Nord- und Südpol) auf!

Dimension von B: Kraft / (Länge x Strom)

Maßeinheit von B: $N/(m \cdot A) = VAs/(m^2 \cdot A) = Vs/m^2 = T$ (Tesla)

Beispiele:

Erdmagnetfeld: 10^{-4} T — Kernspintomograph: 1 – 1,5 T

Supraleitender Magnet: 20 T — Neutronenstern: 10^{10} – 10^{15} T

Eine **bewegte Ladung q** erfährt im Magnetfeld eine zur Geschwindigkeit proportionale ablenkende Kraft, die **senkrecht** auf der **Magnetfeldrichtung** und der **Geschwindigkeit** steht:

$F_L = q \cdot v \cdot B$ **Lorentzkraft**

Beim Stromfluss I_0 durch einen Leiter der Länge L werden viele Ladungsträger gleichzeitig bewegt. Damit ergibt sich eine makroskopische Kraft:

$$F = L \cdot I_0 \cdot B$$

die den Leiter wiederum senkrecht zum Magnetfeld und zur Stromrichtung (**Rechte Hand-Regel**) auslenkt. Diese Kraft ist die Grundlage des **Elektromotors**.

Magnetfelder werden ihrerseits durch **elektrische Ströme I erzeugt** (auch im Dauermagneten, bei dem die Elektronen um Atomkerne kreisen). Ein gerader stromdurchflossener Leiter erzeugt im Abstand r ein tangentiales Magnetfeld:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_0}{r}$$

mit der **Induktionskonstante**

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$$

Die Richtung des Magnetfelds ist durch **Umfassen des Leiters mit der rechten Hand**, wobei der **Daumen in Stromrichtung** zeigt, gegeben!

Eine **Spule** (Elektromagnet) besteht aus vielen **Leiterschleifen** und erzeugt ein weitgehend homogenes Magnetfeld in ihrem Innern.

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot I_0$$

mit der Windungszahl N, der Länge L und dem Strom I_0

6.4 Elektromagnetische Induktion

Bei der **mechanischen Bewegung** eines Leiters mit Geschwindigkeit v in einem Magnetfeld B wirkt auf die bewegten Ladungsträger die Lorentzkraft. Dies führt zu einer **Verschiebung der Ladungsträger** entlang des Leiters:

- ⇨ **Induktionsstrom I** (falls der Stromkreis geschlossen ist)
- ⇨ **Induktionsspannung U_{ind}** (falls der Stromkreis offen ist)

Dabei kommt es zur Induktion wenn sich die Fläche A verändert (z.B. im **Wechselstromgenerator**):

$$U_{ind} = -B \cdot \left.\frac{dA}{dt}\right|_{B=konst}$$ bei **zeitlicher Änderung der Fläche $A(t)$**

oder sich das Magnetfeld zeitlich verändert (z.B. im **Transformator**):

$$U_{ind} = -A \cdot \left.\frac{dB}{dt}\right|_{A=konst}$$ bei **zeitlicher Änderung des Magnetfeldes $B(t)$**

Selbstinduktion:

Bei **Anschalten** einer **Spannungsquelle** an eine **Spule** bewirkt die **zeitliche Änderung des Stroms** (der vorher null war) eine **zeitliche Änderung** des in der Spule entstehenden **Magnetfelds B**. Dies bewirkt nun (siehe oben) die Induktion einer **Induktionsspannung**

$$U_{ind} = -A \cdot \left.\frac{dB}{dt}\right|_{A=konst} = -L \frac{dI}{dt}$$ **L: Induktivität der Spule**

die der **angelegten äußeren Spannung entgegengesetzt** ist: der Strom steigt nur **langsam** an!

Dimension von L: Spannung x Zeit / Strom

Maßeinheit von L: Vs/A = H (Henry)

6.5 Wechselströme

Bei Wechselspannung ändert sich die Spannung mit der Kreisfrequenz ω:

$$U = U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Dabei kommt es beim ohmschen Widerstand R zu einem Wechselstrom:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Bei Wechselspannungen an Kondensator oder Spule sind jedoch Spannung und Strom nicht mehr in Phase und der Widerstand hängt von der Kreisfrequenz ω ab:

Kondensator	**Spule**
$I(t) = -C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$I(t) = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Strom eilt Spannung voraus	Strom eilt Spannung voraus
Wechselstromwiderstand $Z = U/I$:	
$Z = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$Z = \omega \cdot L$

Im elektrischen Schwingkreis bestehend aus C und L kommt es nach Anstoß zu elektrischen Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω :

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

und der Frequenz f:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$