

Obersenior (Buttergruppen)

6.6.08

I: Einige Vorbemerkungen und Definitionen

II: State of the art picture

III: Buttergruppen endlicher Ränge

IV: Buttergruppe unendlicher Ränge
(Hawaiian groups, endomorphism rings)

I: • Gruppe $\equiv$ abelsche Gruppe (außer $\text{Aut}(G)$)

• G torsionsfrei $\Leftrightarrow (ng=0 \Rightarrow n=0 \vee g=0)$

• G torsion $\Leftrightarrow \forall g \in G \exists n \in \mathbb{N}$ mit $ng=0$
 $\text{ord}(g) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid ng=0\}$

G torsion $\Rightarrow G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} G_p$ Primätkomponenten
zerlegung

• M gemischt $\Rightarrow t(M) = \text{Torsionsteil von } M$

allgemein: G ff. $\Rightarrow G \subseteq G \otimes \mathbb{Q}$

$G \otimes \mathbb{Q}$ Vektorraum über $\mathbb{Q}$

" $\{ \frac{n}{m} g \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ reduziert} \}$ "

$\text{rk}(G) = \dim (G \otimes \mathbb{Q}) = \# \{ \text{max. linear unabhängige Teilmenge} \}$

Bsp:

① $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, R \subseteq \mathbb{Q} \quad \text{rk}(R) = 1, \bigoplus_{i \in I} R_i$

② $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$(3) \quad P = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad , \quad t(P) = \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Def: Sei $A \subseteq G$. Dann heißt A rein in G , falls gilt: $(A \subseteq_* G)$

Ist $nx = a \in A$ lösbar in G , so ist $nx = a$ auch lösbar in A ($n \in \mathbb{N}$)

Bsp: $\mathbb{R} \subseteq_* \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{Q}$

Lemma: G torsionsfrei, dann gilt $A \subseteq_* G$
 $\Leftrightarrow G/A$ torsionsfrei

Def: G heißt frei (^{projektiv} ~~injektiv~~) $\Leftrightarrow G = \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Z}$

$\bullet$ G heißt halbfrei (injektiv) $\Leftrightarrow$

$$G = \bigoplus_{x_0} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \pi} \bigoplus_{x_p} \mathbb{Z}(p^\infty)$$

mit $\mathbb{Z}(p^\infty) = \langle x_0, x_1, \dots \rangle$ mit

$$px_0 = 0, \quad px_1 = x_0, \quad \dots$$

— • —

Nam in der Butlergruppe:

②

Def. M.C.R. Butler 1965

Eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges heißt Butlergruppe, falls sie eine Untergruppe einer vollständig zerlegbaren Gruppe endlichen Ranges ist, d.h.

$$G \subseteq_* \bigoplus_{i=1}^n R_i$$

Δ: G mt immer vollständig zerlegbar!

$R_i = R_j$ für alle $i \neq j \Rightarrow G$ c.d.

(z.B. $G \subseteq_* \bigoplus \mathbb{Q}$ oder $G \subseteq_* \bigoplus \mathbb{Z}$

$\Rightarrow G$ ist teilbar bzw. frei)

Bsp. Eine Gruppe G heißt fast vollständig zerlegbar, wenn gilt

$$nG \subseteq \bigoplus_{i=1}^m R_i \subseteq G$$

für gewisse $n, m \in \mathbb{N}$ und $R_i \subseteq \mathbb{Q}$.

Wie sieht sowas aus?

$$G = \left\langle \bigoplus_{i=1}^m R_i, d_1, \dots, d_h \right\rangle, d_i \in \mathbb{Q}^{(m)}$$

$$\Rightarrow \exists f: \bigoplus_{i \in m} R_i =: A \longrightarrow G, \quad G/f(A) \text{ endlich}$$

$$\Rightarrow G = A + \mathbb{Z}x_1 + \dots + \mathbb{Z}x_n$$

$$\Rightarrow \text{Setze } h: \mathbb{Z}^{(n)} \longrightarrow \mathbb{Z}x_1 + \dots + \mathbb{Z}x_n. \quad \text{Es}$$

$$\text{folgt } \text{id} \oplus h: A \oplus \mathbb{Z}^{(n)} \longrightarrow G$$

$$(a, \vec{z}) \longmapsto a + \vec{z}h$$

ist Epimorphismus

Satz (Butler)

G ist Butlergruppe $\Leftrightarrow G$ ist epimorphes Bild einer vollständig zerlegbaren Gruppe endlichen Ranges.

Beim/Satz: Wie kann man diese Def.

auf unendlichen Rang verallgemeinern?

A) G ist B_{cd} -Gruppe $\overset{G \in B_{\text{cd}}}{\text{falls } G \in \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i}$

B) G ist B_0 -Gruppe $\overset{G \in B_0}{\text{falls gilt}}$

$$H \leq_x G, \text{ rk}(H) < \aleph_0 \Rightarrow H \text{ ist Butler}$$

C) G ist B_2 -Gruppe $\overset{G \in B_2}{\text{falls gilt}}$

$$G = \bigcup_{\alpha < \lambda} G_\alpha \quad \text{stetig aufsteigend, } G_{\alpha+1} = G_\alpha + H_\alpha$$

$$G_\alpha \leq_x G_{\alpha+1}$$

mit H_x Butlergruppe endlichen Ranges ⁽³⁾
für $x \leq 1$

D) G ist B_1 -Gruppe ^{$G \in B_1$} , falls $\text{Bext}_2^T(G, T) = 0$
für alle Torsionsgruppe T .

(Was ist Bext ? $\leadsto$ Bext ist Subfaktor von Ext (Stepan))

Wir wollen ein Bild erstellen:

Satz (Bica / Salce): Ist G abzählbar,
so gilt

$$G \text{ ist } B_0 \Leftrightarrow G \text{ ist } B_1 \Leftrightarrow G \text{ ist } B_2$$

abc:

Satz (Arnold + Hodel / Str.)

$D_0 \not\subseteq D_{cd}$ ist nicht leer!

Beweis: Baumkonstruktion (Daniel)

Was passiert im überabzählbaren Fall?

Satz: (Bica / Salce)

$$D_2 \subseteq D_0 \text{ und } D_2 \subseteq D_1$$

Klar: $D_{cd} \subseteq D_0$

Satz (Fuchs-Meyer) ($V=L$)

Es gilt $B_1 = B_2$

Später dann:

Satz (Shulati-Str.)

$\exists$ Modell von ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_4$ und

$B_1 \neq B_2$ in $\mathcal{M}$

II Vollständig zerlegbare Gruppen

-3-

Definition II 1: Eine torsionsfreie Gruppe G heißt vollständig zerlegbar, falls $G = \bigoplus_{i \in I} R_i$ für Gruppen $\gamma \in R_i \subseteq \mathbb{Q}$ und eine Kardinalzahl I .
 G heißt rationale Gruppe, falls $G = R$ mit $\gamma \in R \subseteq \mathbb{Q}$.

Lassen sich vollständig zerlegbare Gruppen klassifizieren? ja!

Definition II 2: Eine Isomorphieklasse einer rationalen Gruppe heißt Typ, etwa $(R, \cong)$.

$\Rightarrow$ Die Typen bilden einen Verband mit
 $(R, \cong) \leq (R', \cong)$ genau dann wenn
es eine Einbettung $R \hookrightarrow R'$ gibt.
(oder: $(R, \cong) \wedge (R', \cong) = (R \cap R', \cong)$
 $(R, \cong) \vee (R', \cong) = (R + R', \cong)$)

Definition II 3: Sei G eine torsionsfreie Gruppe.
Für $x \in G$ ist $(\langle x \rangle_x^G, \cong)$ der Typ von x in G .

$\Rightarrow$ Baer hat Typen anders beschrieben!

Definition II 4: Sei G torsionsfrei und $x \in G$.

- 4 -

Für $p \in \pi$ sei $h_p^G(x) = \max \{n \mid x \in p^n G\}$, falls dies existiert und sonst $h_p^G(x) = \infty$. Dann heißt $h_p^G(x)$ die p -Höhe von x in G . Die Funktion $\chi^G(x) = \{h_p^G(x) \mid p \in \pi\}$ heißt die Charakteristik von x in G .

Anmerkung: ① Jede Funktion $\{n_p : p \in \pi\}$ mit $n_p \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ ist die Charakteristik einer rationalen Gruppe R , d.h. $\chi^R(1) = \{n_p : p \in \pi\}$.

② Sind zwei Elemente $x, y \in G$ linear abhängig, so gilt $h_p^G(x) = h_p^G(y)$ wann immer $h_p^G(x) = +\infty$ oder $h_p^G(y) = \infty$ und $\sum_p h_p$ so gilt $\sum_p |h_p^G(x) - h_p^G(y)| < \infty$.

Definition II 5: Zwei Charakteristiken $\{n_p : p \in \pi\}$ und $\{m_p : p \in \pi\}$ heißen äquivalent, falls $\sum_p |n_p - m_p| < \infty$. Die Äquivalenzklasse einer Charakteristik heißt Typ. Für $x \in G$ schreiben wir $tp^G(x) = [\chi^G(x)]$ für den Typen von x in G .

Satz II 6: (Baer)

Die Zuordnung $(R_i) \mapsto [\chi^R(1)]$ ist ein ^{Verbands-}Isomorphismus zwischen den Verbanden von

rationalen Gruppen und Typen.

- 5 -

Verbandsstruktur: Seien τ, σ zwei Typen.

Dann gilt $\tau \leq \sigma$, falls $\tau(p) \leq \sigma(p)$ für alle p .

Wie sieht der Typenverband aus? Schwierig!

Baer: $\exists$ Antikette der Länge $2^{\aleph_0}$

Eda: $\exists$ absteigende Kette überabzählbarer
Kofinalität.

Aber: Kettenlänge etwa hängt von der Mengen-
lehre ab!

Definition II 7: Sei G eine torsionsfreie Gruppe
und τ ein Typ.

$$i) G(\tau) = \{x \in G \mid \text{tp}(x) \geq \tau\} \subseteq_x G$$

$$ii) G^\#(\tau) = \langle \{x \in G \mid \text{tp}(x) > \tau\} \rangle_x \subseteq_x G$$

$$iii) G[\tau] = \{x \in G \mid \text{tp}(x) \neq \tau\} \subseteq_x G$$

$$iv) G^\#[\tau] = \{x \in G \mid \text{tp}(x) \neq \tau\} \subseteq_x G$$

Lemma II 8: Sei G torsionsfrei. Dann gelten

$$1) G(\tau) \supset G^\#(\tau), \quad G[\tau] \subset G^\#[\tau]$$

$$2) \varphi \in \text{Hom}(G, H) \Rightarrow G(\tau)\varphi \subseteq H(\tau), \quad G^\#(\tau)\varphi \subseteq H^\#(\tau), \\ \text{und } G[\tau]\varphi \subseteq H[\tau], \quad G^\#[\tau]\varphi \subseteq H^\#[\tau].$$

$$3) \text{ Gilt } G_d = G_1 \oplus G_2, \text{ so folgt}$$

$$G(\tau) = G_1(\tau) \oplus G_2(\tau), \quad G^\#(\tau) = G_1^\#(\tau) \oplus G_2^\#(\tau)$$

und analog für $G[\tau], G^\#[\tau]$.

Beweis: Folgt sofort aus den Eigenschaften 6-
für Typen und der Definition II.7. $\square$

Sei nun A vollständig zerlegbar

$\Rightarrow A = \bigoplus A_\tau$ mit A_τ τ -homogen vollst. zerl.

$$\Rightarrow A(\tau) = \bigoplus_{\sigma \geq \tau} A_\sigma, \quad A^\#(\tau) = \bigoplus_{\sigma > \tau} A_\sigma$$

$$\Rightarrow A(\tau)/A^\#(\tau) \cong A_\tau.$$

Satz II.9: (Baer, 1937)

Ist A vollst. zerlegbar, so bildet die Menge
 $\{A(\tau)/A^\#(\tau) : \tau \text{ Typ}\}$ eine vollständige
Menge von Invarianten für A .

Beweis: Trivial. $A(\tau) = A_\tau \oplus A^\#(\tau)$ und somit
beschreibt $\langle A(\tau)/A^\#(\tau) : \tau \in T \rangle$ vollständig
 A . $\square$

Anmerkung: Es gilt auch

$$\bullet G(\tau) = \sum \{ \tau \varphi : \varphi \in \text{Hom}(\tau, G) \}$$

$$\bullet G[\tau] = \bigcap \{ \text{Ker } \varphi : \varphi \in \text{Hom}(G, \tau) \}$$

$$\bullet G^*(\tau) = \sum_{\sigma \geq \tau} G(\sigma)$$

$$\bullet G^\#(\tau) = \bigcap_{\sigma > \tau} G[\sigma]$$

- 7 -

Definition II 10: Sei G torsionsfrei.

i) $Tst(G) = \{tp(x) \mid x \in G\}$ heißt Typen von G

ii) $T_c(G) = \{ \tau \in Tst(G) \mid G(\tau)/G^\#(\tau) \neq 0 \}$ heißt
kritische Typenmenge von G .

Lemma II 11: Sei G torsionsfrei und $\tau \in T$.

i) $T_c(G(\tau)) = \{ \sigma \in T_c(G) : \sigma \geq \tau \}$

ii) $T_c(G^\#(\tau)) = \{ \sigma \in T_c(G) : \sigma > \tau \}$

iii) Ist $eG \leq H \leq G$ mit $e \in W$, so gilt $T_c(G) = T_c(H)$

iv) $T_c(G \oplus H) = T_c(G) \cup T_c(H)$

Beweis: einfach.

Satz II 12: (Baer - Kötter's)

Sei G τ -homogen vollständig zerlegbar. Ist
 $H \leq G$ τ -homogen, so ist H ebenfalls voll-
ständig zerlegbar.

Beweis: Sei $G = \bigoplus_{\alpha \in A} A_\alpha$ mit $tp(A_\alpha) = \tau$.

Setze $C_\mu = \bigoplus_{\alpha < \mu} A_\alpha$ und $H_\mu = C_\mu \cap H$ für $\mu < 1$.

$\Rightarrow H_\mu = H_{\mu+1} \cap C_\mu \subseteq_* H$

$\Rightarrow H_\mu$ ist τ -homogen

$$\Rightarrow H_{\mu+1}/H_{\mu} = \frac{H_{\mu+1}}{H_{\mu+1} \cap C_{\mu}} = \frac{H_{\mu+1} + C_{\mu}}{C_{\mu}}$$

$$\subseteq C_{\mu+1}/C_{\mu} = A_{\mu} \cong \tau$$

$$\Rightarrow H_{\mu+1} = H_{\mu} \text{ oder } H_{\mu+1}/H_{\mu} \cong \tau, \text{ da}$$

$$\tau \leq \text{tp}(H_{\mu+1}/H_{\mu}) \leq \tau$$

Baer-Levi

$$\Rightarrow H_{\mu+1} = H_{\mu} \oplus \tau$$

Levi

$$\Rightarrow H = \bigoplus \tau \text{ vollständig zerlegbar } \tau\text{-homogen} \quad \square$$

Satz II 13 (Baer - Kuhlmann - Kaplansky)

Direkte Summanden von vollständig zerlegbaren Gruppen sind wieder vollständig zerlegbar.

Beweis: Machen wir nicht. $\square$

Wir liefern nun noch die Verallgemeinerung des Pontryagin Kriteriums für freie Gruppen.

Satz II 14: Ist A τ -homogen vollständig zerlegbar und $B \subseteq_* A$, $\text{rk}(B) < \infty$, dann ist B ein Summand von A .

Beweis: Machen wir auch nicht $\square$

III Buttergruppen endlichen Ranges

- 9 -

Wir betrachten nun eine interessante Klasse von Gruppen, die die vollständig zerlegbaren Gruppen enthalten.

Definition III 1: Eine ~~torsionsfrei~~ Buttergruppe Gruppe Eine reine Untergruppe einer vollständig zerlegbaren Gruppe endlichen Ranges heißt Buttergruppe endlichen Ranges.

Beispiele:

- vollständig zerlegbare Gruppen endlichen Ranges sind Buttergruppen.
- Sei $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$, $R_i \subseteq \mathbb{Q}$ und $A \subseteq B$ mit $eB \subseteq A$ für ein $e \in \mathbb{N}$. Dann ist B eine Buttergruppe. Solche Gruppen heißen fast vollständig zerlegbar.

Für das zweite Beispiel brauchen wir eine der Äquivalenzen aus Satz III 2.

Sei B fast vollständig zerlegbar

$\Rightarrow \exists f: A \hookrightarrow B$, $B/f(A)$ endlich

$\Rightarrow B = A + \mathbb{Z}x_1 + \dots + \mathbb{Z}x_n$

$\Rightarrow$ mit $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}x_1 + \dots + \mathbb{Z}x_n$ epimorph

folgt $\text{id} \oplus h: A \oplus \mathbb{Z}^n \rightarrow B$ ist Epimor-

$(a, \vec{z}) \mapsto a + \vec{z}h$

phismus

$\Rightarrow B$ ist Butlergruppe.

Satz III 2: Die folgenden Aussagen sind äqui-
valent für eine torsionsfreie Gruppe G endlichen
Ranges:

- i) G ist eine Butlergruppe.
- ii) G ist epimorphes Bild einer vollständig zerlegbaren Gruppe endlichen Ranges
- iii) $Tst(G)$ ist endlich, $G(\tau)/G^*(\tau)$ ist T -homogen vollständig zerlegbar und $G^*(\tau)/G^*(\tau)$ ist endlich für alle $\tau \in T$.

Beweis: Wir beginnen mit i), ii) $\Leftrightarrow$ iii)

i), ii) $\Rightarrow$ iii): Sei G eine Butlergruppe

$\Rightarrow G \subseteq_* X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, $X_i \subseteq \mathbb{Q}$

$\Rightarrow Tst(G)$ ist endlich, da $Tst(X_1 \oplus \dots \oplus X_n)$ endlich

und G rein in $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$

- 11 -

$\Rightarrow$ $\exists f: \bigoplus_{i=1}^m C_i \rightarrow G$ balanzierte Epimorphism
(man $i) \Leftrightarrow ii)$

$$\Rightarrow f(C(\tau)) = G(\tau) \neq \tau$$

$\Rightarrow$ da $C(\tau) = C_\tau \oplus C^\#(\tau) = C_\tau \oplus C^*(\tau)$ mit
 C_τ τ -homogen vollständig zerlegbar folgt
 $D_\tau := f(C_\tau)$ ist τ -homogen vollst. zerlegbar

$\Rightarrow$ da $D_\tau \cap G^\#(\tau) \subseteq_\star D_\tau$ folgt $D_\tau = G_\tau \oplus (D_\tau \cap G^\#(\tau))$
mit G_τ τ -homogen vollständig zerlegbar

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(\tau) &= f(C(\tau)) = D_\tau + f(C^\#(\tau)) = D_\tau + G^*(\tau) \\ &= D_\tau + G^\#(\tau) = G_\tau \oplus G^\#(\tau) \end{aligned}$$

Da $G^\#(\tau) \subseteq_\star G$ und G Butler folgt $G^\#(\tau)$ Butler

$$\Rightarrow G^\#(\tau) = \gamma_1 + \dots + \gamma_m + G^*(\tau), \quad \gamma_i \subseteq_\star G, \quad \gamma_i \subseteq \mathcal{Q}$$

$$\Rightarrow G^\#(\tau) / G^*(\tau) \text{ verssem und } \text{tp}(\gamma_i) = \tau$$

$\Rightarrow$ da $\gamma_i \cap G^*(\tau) \subseteq_\star G^*(\tau)$ folgt $\gamma_i \cap G^*(\tau)$
hat Typ τ

$\Rightarrow \gamma_i / \gamma_i \cap G^*(\tau)$ ist beschränkt

$\Rightarrow G^\#(\tau) / G^*(\tau)$ beschränkt als epimorphes Bild
von $\bigoplus \gamma_i / \gamma_i \cap G^*(\tau)$
 $\Sigma \gamma_i / \Sigma \gamma_i \cap G^*(\tau)$

iii) $\Rightarrow$ i). Der Beweis erfolgt durch Induktion ⁻¹²
über $Tst(G)$. ($\emptyset Tst(G)$ ist endlich)

Sei τ maximal in $Tst(G)$

$\Rightarrow G(\tau) = G_\tau$ τ -homogen vollst. zerlegbar

$\Rightarrow G(\tau)$ Butlergruppe

ang. $\tau \in Tst(G)$ und $G(\sigma)$ Butler für alle $\sigma > \tau$

$\Rightarrow G^*(\tau) = \sum_{\sigma > \tau} G(\sigma)$ ist Butler

da $G(\tau) / G_\tau \oplus G^*(\tau)$ beschränkt ist folgt

$G(\tau)$ ist Butlergruppe (wobei fast vollst. zerlegbar Gruppe)

Sei nun $IT(G) = \min Tst(G)$

$\Rightarrow G = G(IT(G))$ ist Butlergruppe.

i) $\Rightarrow$ ii). Sei G Butlergruppe, d.h. $G \subseteq_* X_1 \oplus \dots \oplus X_n$
mit $X_i \subseteq \mathbb{Q}$.

Beh. $\exists f: \bigoplus D_i \rightarrow G$ balanciert, d.h. $D_i \subseteq$
und $f(D(\tau)) = G(\tau)$ für alle τ

Da $G \subseteq_* \mathbb{C}$ ist $Tst(G)$ endlich. Sei $x \in G$ und

setze $c(x) = \{i \mid x_i \neq 0\}$ (wobei $x = \sum_{i=1}^n x_i \in \mathbb{C}$ (support

und $c(G) = \{c(x) \mid 0 \neq x \in G\}$

- $\Rightarrow c(G)$ ist partiell geordnet mit $\subseteq$
 $\Rightarrow$ sei $S = \{I \in c(G) \mid I \text{ minimal}\}$
 $\Rightarrow S$ ist endlich und für $I \in S$ existiert $x_I \in G$
 mit $c(x_I) = I$
 $\Rightarrow$ Sei $D_I = \langle x_I \rangle_* \subseteq G$
 $\Rightarrow c(y) = I$ für alle $y \in D_I$

Setze $D = \bigoplus_{I \in S} D_I$ und $f: D \rightarrow G, \bigoplus x \mapsto \sum x$

Beh: $f(D(\tau)) = G(\tau)$ für alle τ

($\Rightarrow$) speziell $f(\bigoplus D) = f(D(\pi(G))) = G(\pi(G)) = G$

① Ist τ ein Typ $\Rightarrow D(\tau) = \bigoplus \{D_I \mid h(D_I) \geq \tau\}$

$\Rightarrow H = f(D(\tau)) = \sum \{D_I \mid h(D_I) \geq \tau\} \subseteq G(\tau)$

② z.z.: $G(\tau) \subseteq H$

es reicht zu zeigen, dass $G(\tau)_p \subseteq H_p \quad \forall p \in \pi$

(hier ist G_p die Lokalisierung von G an $p \in \pi$, d.h.

$$G \otimes \mathbb{Q}_p : \bigcap_{p \in \pi} G_p)$$

Sei $x = q_1 x_1 + \dots + q_n x_n \neq 0$, $x \in G(\tau)_p$, $q_i \in \mathbb{Q}_p$
 $x_i \in x_i$

Wähle $I \in S$ mit $I \subseteq c(x)$

$\Rightarrow$ wähle $x_I \in D_I$ mit $c(x_I) = I$ und

$x_I = h_1 x_1 + \dots + h_n x_n$, $h_i \in \mathbb{Z}$ und $(h_i, p) = 1$ für ein

das gilt, da $0_I \in_x G$

$$\Rightarrow \phi(x_I) = \bigcap \{ \phi(x_i) : i \in I \} \supseteq \bigcap \{ \phi(x_i) : q_i \neq 0 \} \supseteq \tau$$

da $I \subseteq c(x)$ und $x \in G(\tau)_p$

$$\Rightarrow x_I \in G(\tau)_p$$

außerdem ist $y = x - \frac{q_I}{h_I} x_I \in G(\tau)_p$, wobei

$$c(y) \subseteq c(x) \setminus \{I\} \subset c(x)$$

$\Rightarrow$ per Induktion über $|c(x)|$ folgt $y \in H_p$, denn falls $|c(x)| = 1$, dann gilt $x = x_I \in H$.

$$\Rightarrow x = \frac{q_I}{h_I} x_I + y \in H_p \text{ und } G(\tau)_p \subseteq H_p$$

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $\pi: C \rightarrow G$ epimorphismus mit

$$C = X_1 \oplus \dots \oplus X_n, \quad X_i \subseteq \mathbb{Q}.$$

Für $f: G \rightarrow \mathbb{Q}$, $f \neq 0$ setze $c(f) = \{i \mid \pi f|_{X_i} \neq 0\}$

$$\text{und } c(G) = \{c(f) \mid 0 \neq f \in \text{Hom}(G, \mathbb{Q})\}$$

$\Rightarrow (c(G), \subseteq)$ partiell geordnet

$\Rightarrow$ sei $S = \{I \in c(G) \mid I \text{ maximal}\}$

und wähle $f_I \in \text{Hom}(G, \mathbb{Q})$ für $I \in S$ mit $(f_I)_I \neq 0$

$\Rightarrow$ setze $D = \bigoplus \{f_I(G) \mid I \in S\}$ und

$$\varphi: G \rightarrow D, \quad x \mapsto \bigoplus \{f_I(x) \mid I \in S\}.$$

Analog zu i) folgt, dass φ eine reine Einbettung ist. $\square$

Korollar III 3: Sei G eine Butlergruppe mit linear geordneter Typenmenge. Dann ist G vollständig zerlegbar.

Beweis: Wir zeigen per Induktion über $\text{Tst}(G)$, dass $G(\tau)$ vollst. zerlegbar ist für $\tau \in \text{Tst}(G)$.

Sei $\text{Tst}(G) = \{\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n\}$.

$\Rightarrow G(\tau_n) = A_{\tau_n}$ mit $A_{\tau_n} \cong G(\tau_n) / G^{\#}(\tau_n)$ vollst. zerleg.

Ang: $G(\tau)$ vollst. zerlegbar für alle $\tau > \tau$

$\Rightarrow G(\tau) = A_{\tau} \oplus G^{\#}(\tau) = A_{\tau} \oplus G(\tau')$ mit

$\tau' = \tau_{m+1}$, falls $\tau = \tau_m$

Ind.
 $\Rightarrow G(\tau')$ ist vollst. zerlegbar

$\Rightarrow G(\tau)$ vollst. zerlegbar

$\Rightarrow G = G(\tau_0)$ ist vollständig zerlegbar. $\square$

Es gibt noch viele interessante und auch komplizierte Resultate über Butlergruppen endlichen Ranges, aber wir wenden uns nun den Butlergruppen unendlichen Ranges zu.

IV: Butlergruppen unendlichen Ranges

- 76 -

Definition IV 1. Sei G eine torsionsfreie Gruppe.
Dann heißt G

- 1) B_0 -Gruppe, falls jede reine Untergruppe endlichen Ranges von G eine Butlergruppe ist;
- 2) B_1 -Gruppe, falls $\text{Bext}^1(G, T) = 0$ für alle Torsionsgruppen T ;
- 3) B_2 -Gruppe, falls $G = \bigcup_{\alpha < \lambda} G_\alpha$ für eine stetige aufsteigende Kette von reinen Untergruppen $G_\alpha \subseteq_* G$ ($\alpha < \lambda$) mit der Eigenschaft, dass $G_{\alpha+1} = G_\alpha + B_\alpha$ ($\alpha < \lambda$) für eine Butlergruppe endlichen Ranges B_α und $G_{\alpha+1}/G_\alpha \subseteq \mathbb{Q}$, $G_0 = 0$.

Bevor wir erläutern, was $\text{Bext}^1(G, T) = 0$ bedeutet, wenden wir uns zunächst den Kriterien der B_0 - und B_2 -Gruppen zu.

Trivial: jede Butlergruppe ist auch eine B_0 - und B_2 -Gruppe.

-16-

Lemma IV.2: Sei G abzählbar torsionsfrei.

a) $G \subseteq_* \bigoplus_I R_i$, $R_i \subseteq Q \Rightarrow G$ ist B_0 -Gruppe

b) G ist B_0 -Gruppe $\Leftrightarrow G$ ist B_2 -Gruppe

c) G homogene B_0 -Gruppe $\Rightarrow G$ vollständig zerlegt

Beweis:

a) Sei $H \subseteq_* G \subseteq_* \bigoplus R_i$, $\text{rk}(H) < \infty$

$\Rightarrow H \subseteq_* \bigoplus_{i=1}^n R_i \Rightarrow H$ Butlergruppe

b) " $\Rightarrow$ ": Sei G B_0 -Gruppe und $G = \langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$

Setze $G_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_* \subseteq G$ für $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$, $G_n \subseteq_* G_{n+1}$

B_0 -Gruppe $\Rightarrow G_n$ ist Butlergruppe und $B_{n+1}/G_n \subseteq Q$

" $\Leftarrow$ ": Ang. $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ und $G_{n+1} = G_n + B_n$

mit B_n Butlergruppe

$\Rightarrow$ da $G_0 = \{0\}$ folgt $B_1 = G_1, \dots, G_n = \sum_{i=1}^n B_i$

$\Rightarrow G_n$ ist Butlergruppe für alle $n \in \mathbb{N}$

Ist nun $H \subseteq_* G$, $\text{rk}(H) < \infty \Rightarrow \exists n, H \subseteq_* G_n$

$\Rightarrow H$ ist Butlergruppe.

-17-

c) G homogene B_0 -Gruppe

b)
 $\Rightarrow G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$, G_n Butlergruppe

$\Rightarrow G_n$ homogen

$\Rightarrow G_n$ vollständig zerlegbar nach Var. III 3

$\Rightarrow G_n \subseteq G_{n+1}$ für alle n nach Satz II 14

$\Rightarrow G$ vollständig zerlegbar

□

Beispiel IV 3 Die Umkehrung in Lemma IV 2 a) gilt nicht, d.h. es existiert eine abzählbare B_0 -Gruppe, die nicht isomorph zu einer Untergruppe einer vollst. zerlegbaren Gruppe ist.

Sei $S = \{s : n \rightarrow \{0,1\} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(Wörter über dem Alphabet $\{0,1\}$)

Für $s \in S$ sei $R_s \subseteq \mathbb{Q}$ mit $R_s \subsetneq R_{s1} \cap R_{s0}$

(die Gruppen R_s ($s \in S$) bilden einen Baum)

Außerdem gelte :

(*) $\omega \in \omega$ und σ_i ($0 \leq i \leq h$) Typen, so dass (18)
 für $n \in \mathbb{N}$ Wörter $s_i^n \in S$ existieren mit
 Länge $\geq n$ und $\sigma_i \geq X_{s_i^n}$.

$$\Rightarrow \bigcap_{i=0}^h \sigma_i > X_\emptyset$$

Definition $G_n = \bigoplus \{X_s \mid s \in S, \text{Dom}(s) = n\}$

für $n \in \omega$

Wir setzen $f_n: G_n \rightarrow G_{n+1}$ mittels

$$X_s \in X_s \mapsto (X_{s_0}, X_s) \in X_{s_0} \oplus X_{s_1}$$

$\Rightarrow \text{Dom}(s) = n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ und f_n ist wohl-
 definiert durch $R_s \subseteq R_{s_0} \cap R_{s_1}$

Sei $G := G_\chi = \varinjlim \{G_m, f_m \mid m \in \omega\}$

also $G = A/B$ mit $A = \bigoplus_{m \in \omega} G_m$ und

$$B = \langle g_m - g_n \mid m, n \in \omega, g_m \in G_m \rangle$$

$\Rightarrow G = \bigcup_{n \in \omega} G_n'$ mit $G_n' = (A_n + B)/B \cong A_n/B$

wobei $A_n = \bigoplus_{m=0}^n G_m$, $B_n = \langle g_m - g_n \mid m, n \leq n, g_m \in G_m \rangle$

Leicht: A_n/B_n Butlergruppe (dabei zeige
wir mittels $R_s = R_{s0} \cap R_{s1}$, dass die Ab-
bildungen ℓ_n rein sind):

Bug: $h_{g_{n+1}} \in G_n \ell_n$, $g_{n+1} \in G_{n+1}$

$$\Rightarrow g_{n+1} = \sum_{s \in S} r_s \Rightarrow h_{g_{n+1}} = \sum_{s \in S} h_{r_s} \in G_n$$

$$\Rightarrow \text{für } s = s'_0 \text{ gilt } h_{r_{s'_0}} = h_{r_{s'_1}} \in R_{s'_0} \cap R_{s'_1}$$

$$\Rightarrow \text{da } R_{s'_1} = R_{s'_0} \cap R_{s'_1} \text{ folgt } h_{r_{s'_0}} = h_{r_{s'_1}} \in R_{s'_1}$$

$$\Rightarrow r_{s'_0} = r_{s'_1} \in R_{s'_1}$$

$$\Rightarrow g_{n+1} \in G_n \text{ für } \cdot$$

Bug: $G \subseteq_x C = \bigoplus_{i \in \omega} C_i$, $C_i \subseteq \mathbb{Q}$

O.E.: C_i reduziert für $i \in \omega$

(Sonst sei $I = \{i \mid C_i < \mathbb{Q}\} \Rightarrow G \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i$
mittels Projektion $\pi: G \subseteq C \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i$)

Beh: $B_0 = \{0\}$, $G_0' = A_0/B_0 = X_\emptyset = U$

Wähle $0 \neq x \in G_0' = (X_\emptyset + B)/B \subseteq_x G$

Sei $x = \sum_{j \in J} c_j \in \bigoplus_{j \in J} C_j$ mit $c_j \neq 0$ $\downarrow$ endlich

$$\Rightarrow X_\emptyset \cong G_0' \subseteq \bigoplus_{j \in J} C_j$$

$$\Rightarrow X_\emptyset = \text{type}^G(x) = \bigcap_{j \in J} C_j$$

$\Rightarrow$ für $n \geq 0$ gibt es Representant $\bigoplus \{X_S \mid \text{Dim}(S) = n\}$
 von x in G_n mit $X_S \subseteq X_S \subseteq G_n$ G_n

Sei $X_S + B = C(1, S) \oplus \dots \oplus C(k, S)$ mit $C(i, S) \subseteq C_j$
 für $k \geq \max J$

Da $C_j \neq 0$ ($j \in J$) folgt, dass es $S_n' \in S$ gibt
 mit $\text{Dim}(S_n') = n$, $\mathbb{K} \cdot C(j, S_n') \neq 0$
 $\uparrow$ depends on j and n

Ebenso $X_{S_n'} \subseteq \text{type}^G(X_{S_n'} + B) \subseteq \text{type}^G(C(j, S_n'))$
 für jedes n $= C_j$

$$\Rightarrow C_j = C_j \supseteq X_{S_n'} \quad (j \in J)$$

$$\stackrel{(*)}{\subseteq} \bigcap_{j \in J} C_j \supseteq X_\emptyset \quad \downarrow$$

Lemma: Es gibt einen Baum $\mathcal{X} = \{X_s \mid s \in S\}$
 von reduzierten Gruppen $X_s \subseteq \mathcal{Q}$ mit
 $X_s = X_{s_0} \cap X_{s_1}$ und (*)

Beweis:

Für $s \in S$ sei $\text{inv}(s)$ das umgedrehte Wort, also
 $(\text{inv}(s))(i) = s(n-i-1)$ für $i \in n = \text{Dom}(s) = \text{Dom}(\text{inv}(s))$

Sei $\pi = \{p_n : n \in \omega\}$ und

$\pi_s = \{p_n \mid \text{Binärdarstellung von } n \text{ endet in } \text{inv}(s)\}$

Setze $X_s = \langle 1, \frac{1}{p_n} \mid n \in \omega, p_n \in \pi \setminus \pi_s \rangle \subseteq \mathcal{Q}$
 für $s \in S$.

$\Rightarrow \pi_\emptyset = \pi$, $X_\emptyset = \mathcal{Q}$

$\Rightarrow X_s$ ($s \in S$) sind reduziert, da $\pi_s \neq \emptyset$

Ebenso: $X_{s'} \subseteq X_s$ (falls $s' \subseteq s$ (also $\pi_s \subseteq \pi_{s'}$))

$\Rightarrow \mathcal{X} = \{X_s \mid s \in S\}$ ist Baum, X_s reduziert

Da $\pi_s = \pi_{s_0} \cup \pi_{s_1}$ folgt $X_s = X_{s_0} \cap X_{s_1}$

und $\pi_s \cap \pi_{s'} = \emptyset$ für $s' \not\subseteq s$ und $s \not\subseteq s'$

$\Rightarrow X_s \cup X_{s'} = \mathcal{Q}$ für $s' \perp s$

Bmg: τ Typ, so dass $\forall n \exists s_n \in S$ mit $\text{length}(s_n) \geq n$ und $\tau \geq X_{s_n}$ (19')

$$\Rightarrow \tau \geq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{s_n} \quad (X_{s_n} \text{ idempotent})$$

1. Fall: $\exists s_n, s_{n'} \text{ mit } s_n \perp s_{n'} \Rightarrow \tau = \emptyset$

2. Fall: s_n sind linear geordnet

$$\Rightarrow \bar{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{inv}(s_n) \text{ existiert} \in {}^W 2$$

$\Rightarrow \tau$ ist teilbar durch alle P_n mit Binärdarstellung von n endet meist auf $\text{inv}(\bar{S} \upharpoonright_n)$ für $n \in \mathbb{N}$

Falls also $\bar{D}_i$ ($0 \leq i \leq h$) wie $\text{inv}(\bar{S})$ gegeben sind, so korrespondiert $\bar{D}_i$ zu $S_i \in {}^W 2$

$\Rightarrow$ Da es 2^l versch. Wörter der Länge l gibt für $l \in \mathbb{N}$ muss es ein l geben so dass bei $\text{inv}(\bar{S}_i \upharpoonright_n)$ mit der Binärdarstellung von l übereinstimmt für alle $0 \leq i \leq h$ und $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \tau_i$ ist teilbar durch P_l

$$\Rightarrow \bigcap_{i=0}^h \tau_i \supseteq \tau = X_\emptyset$$

□

$$\Rightarrow \text{type}(x_s) = \bigcap \{ \text{type}(c(i,s)) : 1 \leq i \leq k \}$$

$$\leq \bigcap \{ \text{type}(c(i,s)) : 1 \leq i \leq m \}$$

$$\text{und } X = \bigoplus \{ x_s : \text{dom}(s) = n \}$$

$$= \bigoplus \{ \sum \{ c(i,s) : \text{dom}(s) = n \} : 1 \leq i \leq k \}$$

$$\in C_1 \oplus \dots \oplus C_m.$$

$$\text{Da } x \neq 0 \Rightarrow \exists 1 \leq j \leq m \text{ mit } c(j,s) \neq 0.$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 \exists s \in S \text{ mit } \text{dom}(s) = n$$

$$\text{und } \exists 1 \leq j \leq m \text{ mit } \text{type}(R_s) \leq \text{type}(C_j)$$

$$\text{Wahrl.} \Rightarrow \text{type } C_j = \text{type } R \quad \text{f.} \\ \text{des } R_s$$

□

Wir kommen nun zur Definition von balanciert.

Definition IV 4: Sei G torsionsfrei und

$E: 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow 0$ exakt. Dann heißt

E balanciert exakt, falls für alle Höhen-

sequenzen h die Sequenz $E(h)$ exakt ist,

wobei $E(h) : 0 \rightarrow A(h) \rightarrow B(h) \rightarrow G(h) \rightarrow 0$.

Hunter hat gezeigt, dass die balanciert⁻²⁷⁻
 exakten Sequenzen einen Unterfunctor von
 $\text{Ext}^1(-, -)$ bilden, welchen wir mit $\text{Bext}^1(-, -)$
 bezeichnen.

$\Rightarrow$ Ist $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ balanciert exakt
 und T eine abelsche Gruppe, so steht uns
 homologische Algebra zur Verfügung, d.h.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(C, T) \rightarrow \text{Hom}(B, T) \rightarrow \text{Hom}(A, T) \\ \rightarrow \text{Bext}^1(C, T) \rightarrow \text{Bext}^1(B, T) \rightarrow \text{Bext}^1(A, T) \\ \rightarrow \text{Bext}^2(C, T) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

und analog covariant sind exakt.

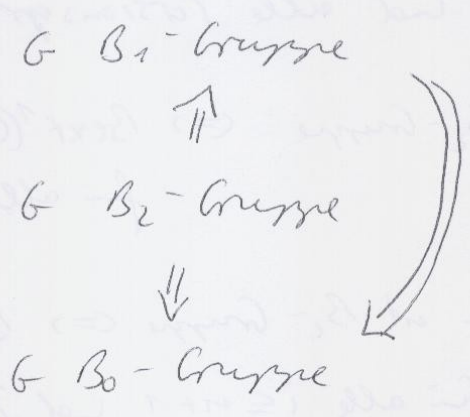
Note: $\text{Bext}^2(-, -)$ kann nicht trivial sein.

Satz IV 5: Sei G torsionsfrei endlichem
 Ranges. Dann ist $\text{Bext}^1(G, T) = 0$ für
 alle Torsionsgruppen T genau dann wenn
 G eine Butlergruppe ist.

Beweis: Siehe Bican - Salce

"Butler groups of infinite rank" Lecture Notes in Math 1006 (1983) $\square$

Satz IV 6: Sei G torsionsfrei. Dann gilt:



Beweis:

- a) B_1 -Gruppe $\Rightarrow$ B_0 -Gruppe folgt aus Satz IV 5:
- b) B_2 -Gruppe $\Rightarrow$ B_1 -Gruppe nach Bican-Satz
- c) B_2 -Gruppe $\Rightarrow$ B_0 -Gruppe folgt aus a) + b)

Korollar IV 7: Sei G torsionsfrei abzählbar. Dann sind äquivalent:

- i) G ist B_0 -Gruppe
- ii) G ist B_1 -Gruppe
- iii) G ist B_2 -Gruppe

Beweis: Folgt aus Satz IV 5 und Satz IV 6

Es gibt noch viele weitere Ergebnisse wie etwa

- $0 \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow 0$ balanciert exakt, C ist B_2 -Gruppe, H, G B_1 -Gruppen
 $\Rightarrow H$ ist B_2 -Gruppe $\Leftrightarrow G$ ist B_2 -Gruppe