

Veränderung der Höhen von Automorphismentürmen durch Forcing mit Souslin-Bäumen

Gunter Fuchs

30.05.2008

Zutaten

- Pseudo-Forcing
- Forcing mit Souslin-Bäumen
- Diamond
- Kanonische Automorphismen des binären Baumes
- Realisieren von Äquivalenzrelationen

1 Pseudo-Forcing

Ein Beispiel:

Definition 1.1. Sei $f : X \times X \rightarrow X$. Dann ist $A \subseteq X$ frei für f genau dann, wenn für alle $(x, y) \in A \times A$ gilt: $f(x, y) \notin A$.

Theorem 1.2. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x, y) \notin \{x, y\}$. Dann existiert eine dichte Teilmenge D von \mathbb{R} , die frei für f ist.

Beweis. Die Idee ist, eine Folge $(\bar{q}^n \mid n < \omega)$ zu definieren, $(\bar{q}^n) = (q_0^n, q_1^n, \dots)$, in der immer längere Anfangsstücke der Elemente der gesuchten dichten Menge spezifiziert werden. Schließlich setzt man:

$$D = \left\{ \bigcup_{n < \omega} q_m^n \mid m < \omega \right\}.$$

Man braucht dann ein bookkeeping, das sicherstellt, dass man alle Anforderungen erfüllt. Welches bookkeeping man wählt, ist ziemlich egal, deshalb ist der pseudo-forcing-Ansatz natürlicher:

Sei \mathbb{P} das ω -fache Produkt von ${}^{<\omega}\omega$, mit endlichem support. Betrachte Elemente von \mathbb{P} als Funktionen $p : \omega \rightarrow {}^{<\omega}\omega$, die fast überall den Wert \emptyset annehmen. Die Ordnung ist die inverse Inklusion.

Spezifiziere abz. viele dichte Teilmengen von \mathbb{P} : Für $q \in {}^{<\omega}\omega$ sei

$$D_q = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists i < \omega \quad q \subseteq p(i)\}.$$

Offensichtlich ist D_q dicht (wg. endlichem support).

Für $i, j, k < \omega$ mit $k \notin \{i, j\}$ sei

$$D_{i,j,k} = \{p \in \mathbb{P} \mid \forall s, t \in {}^\omega\omega \quad (p(i) \subseteq s \wedge p(j) \subseteq t \implies p(k) \not\subseteq f(s, t))\}.$$

$D_{i,j,k}$ ist dicht.

Für $i, j < \omega$ sei

$$D_{i,j} = \{p \in \mathbb{P} \mid |p(i)| > j\}.$$

Sei jetzt G pseudo-generisch, d.h., generisch für die erwähnten dichten Teilmengen von \mathbb{P} . Dann ist die Menge

$$D = \{\bigcup\{p(i) \mid p \in G\} \mid i < \omega\}$$

eine dichte Teilmenge von \mathbb{R} , die frei ist für f . Da nur abzählbar viele dichte Mengen spezifiziert wurden, existiert ein solcher Filter. \square

Später wird Pseudo-Forcing in der folgenden Form angewendet werden: Sei λ eine reguläre Kardinalzahl und \mathbb{P} ein $<\lambda$ -abgeschlossenes Forcing. Sei \mathfrak{D} eine Menge dichter Teilmengen von \mathbb{P} mit $\overline{\mathfrak{D}} \leq \lambda$. Dann existiert ein \mathfrak{D} -generischer Filter für \mathbb{P} .

2 Forcing mit Souslin-Bäumen

Definition 2.1. Sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Ein normaler κ -Baum ist ein Baum der Höhe höchstens κ , dessen levels allesamt weniger als κ Elemente haben, der die Eigenschaft hat, dass jeder Punkt x Nachfolger auf jedem Level β zwischen der Höhe von x und der Höhe des Baumes hat, und dessen Knoten auf Limeshöhe durch deren Vorgängermengen bestimmt sind. Ein κ -Souslin-Baum ist ein normaler κ -Baum T der Höhe κ , der keine Antikette von Mächtigkeit κ hat.

Ein κ -Souslin-Baum ist auch κ -Aronszajn. Souslin-Bäume können als forcings betrachtet werden. Dabei wird die Ordnung herumgedreht. Da es keine Antiketten von Mächtigkeit κ gibt, ist das forcing $<\kappa$ -c.c. Es gilt sogar:

Lemma 2.2. κ -Souslin-Bäume sind $<\kappa$ -distributiv.

Beweis. Zunächst eine Beobachtung: Sei D eine dichte, offene Teilmenge eines κ -Souslin-Baums T . Sei A die Menge der $<_T$ -minimalen Elemente von D . Dann ist A eine maximale Antikette. Insbesondere hat A Mächtigkeit $< \kappa$. Da κ regulär ist, ex. $\gamma < \kappa$, so dass $A \subseteq T|\gamma$ ist. Es folgt dann, dass $T|[\gamma, \kappa) \subseteq D$ ist: Sei $p \in T$ mit $|p| \geq \gamma$. Sei $a \in A$ kompatibel mit p . Dann ist $a <_T p$. $a \in D$ und D ist offen, also ist $p \in D$.

Sei nun $\langle D_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle$ eine Folge dichter, offener Teilmengen von T , $\beta < \kappa$. Sei für $\alpha < \beta$ nach der Beobachtung eine Ordinalzahl $\gamma_\alpha < \kappa$ so gewählt, dass $T|[\gamma_\alpha, \kappa) \subseteq D_\alpha$ ist. Sei $\gamma = \sup_{\alpha < \beta} \gamma_\alpha$. Dann:

$$T|[\gamma, \kappa) = \bigcap_{\alpha < \beta} T|[\gamma_\alpha, \kappa) \subseteq \bigcap_{\alpha < \beta} D_\alpha,$$

also ist der Schnitt der D_α s nicht leer. □

3 Diamond

Definition 3.1. Sei κ regulär, $S \subseteq \kappa$. Eine Folge $\langle D_\alpha \mid \alpha \in S \rangle$ ist eine $\diamond_\kappa(S)$ -Folge, wenn für jedes $A \subseteq \kappa$ die Menge

$$\{\alpha \in S \mid D_\alpha = A \cap \alpha\}$$

stationär in κ ist. Es gilt $\diamond_\kappa(S)$, wenn eine $\diamond_\kappa(S)$ -Folge existiert.

Definition 3.2. Sei κ regulär. Für $\alpha < \kappa$ sei

$$H_\kappa(\alpha) = H_\kappa \cap V_\alpha.$$

Lemma 3.3. Sei κ regulär. Es gelte $\diamond_\kappa(S)$, für ein $S \subseteq \kappa$. Dann existiert eine Folge $\langle E_\alpha \mid \alpha \in S \rangle$, so dass für jedes $A \subseteq H_\kappa$ gilt:

$$\{\alpha \in S \mid E_\alpha = A \cap H_\kappa(\alpha)\} \text{ ist stationär.}$$

Beweis. Da $\diamond_\kappa(S)$ gilt, ist $2^{<\kappa} = \kappa$, und daher hat H_κ Mächtigkeit κ . Wenn $f : \kappa \rightarrow H_\kappa$ eine Bijektion ist, dann ist die Menge der $\alpha < \kappa$ mit der Eigenschaft, dass $f \upharpoonright \alpha : \alpha \rightarrow H_\kappa(\alpha)$ eine Bijektion ist, club. Jetzt codieren/decodieren. □

4 Kanonische Automorphismen des binären Baumes

Definition 4.1. Sei s eine binäre Folge, $s : \alpha \rightarrow 2$. Sei π_s die Abbildung, die die bits einer beliebigen binären Folge t mit $|t| \leq |s|$ an den Koordinaten verändert, die 1 in s sind. Also $\pi_s(t) = s+t \pmod{2}$. Genauer: $(\pi_s(t))(\xi) < 2$, und $(\pi_s(t))(\xi) = t(\xi)$ gdw. $s(\xi) = 0$.

Diese Operation entspricht der symmetrischen Differenz zwischen den Mengen, deren symmetrische Differenz s bzw. t sind. Diese Kollektion von Automorphismen hat einige praktische Eigenschaften. Zum Beispiel kommutieren die Abbildungen, da $\pi_s\pi_t = \pi_{s+t} = \pi_{t+s} = \pi_t\pi_s$; sie sind selbst-invers, da $\pi_s\pi_s = \pi_{s+s} = \pi_{\vec{0}} = \text{id}$; und sie haben die folgende Kompositions-Eigenschaft: $\pi_{\pi_s(t)} = \pi_s\pi_t$, sofern $|s| \geq |t|$. Für eine Folge $\vec{s} = \langle s_0, \dots, s_{n-1} \rangle$ binärer Sequenzen, sei $\pi_{\vec{s}} = \pi_{s_0} \circ \dots \circ \pi_{s_{n-1}}$.

5 Realisieren von Äquivalenzrelationen

Definition 5.1. Sei κ eine Kardinalzahl und $E \subseteq \kappa \times \kappa$ eine Äquivalenzrelation. Sei $\vec{T} = \langle T_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ eine Folge von starren Bäumen (bspw.). Eine solche Folge \vec{T} realisiert E , wenn für alle $\alpha, \beta < \kappa$ gilt:

$$T_\alpha \cong T_\beta \iff \alpha E \beta.$$

\vec{T} ist in der Lage, eine Äquivalenzrelation E zu realisieren, wenn ein Forcing \mathbb{P} existiert, das \leq_κ -distributiv ist und erzwingt, dass \vec{T} die Relation E realisiert.