Archimedes

Auszug aus
„Über den Schwerpunkt ebener Flächen“
(um 250 v.C.)

Quelle: Archimedes: Die Quadratur der Parabel und Ueber das Gleichgewicht ebener Flächen oder ueber den Schwerpunkt ebener Flächen. Übers. u. mit Anm. vers. von Arthur Czwalina-Allenstein. - Leipzig: Akad. Verl.-Ges. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften), 1923

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

1. Buch.

1. Wir setzen voraus, daß gleiche Gewichte an gleichen Hebelarmen im Gleichgewicht sind, daß aber gleiche Gewichte an ungleichen Hebelarmen nicht im Gleichgewicht sind, sondern ein Uebergewicht nach der Seite des längeren Hebelarmes haben.

2. Wenn irgend zwei Gewichte an irgendwelchen Hebelarmen im Gleichgewicht sind und zu einem Gewicht etwas hinzugefügt wird, so entsteht ein Übergewicht nach der Seite, auf der etwas hinzugefügt wurde.

3. In gleicher Weise entsteht, wenn auf einer Seite etwas fortgenommen wird, ein Übergewicht, und zwar nach der Seite, auf der nichts weggenommen wurde.

4. In kongruenten ebenen Figuren decken sich auch die Schwerpunkte.

5. In ähnlichen Figuren haben die Schwerpunkte ähnliche Lage. Darunter, daß zwei Punkte ähnliche Lage haben, verstehen wir, daß, wenn wir die Punkte mit entsprechenden Punkten der Figuren verbinden, die Verbindungslinien mit den entsprechenden Seiten der Figuren gleiche Winkel bilden.

6. Wenn zwei Größen an irgendwelchen Hebelarmen im Gleichgewicht sind, so werden auch Größen, die ihnen gleich sind, an denselben Hebelarmen im Gleichgewicht sein.

7. Wenn der Umfang einer Figur stets nach der gleichen Seite konkav ist, so liegt der Schwerpunkt innerhalb der Figur.

Unter diesen Voraussetzungen gelten folgende Sätze:

§ 1.

Wenn Gewichte an gleichen Hebelarmen im Gleichgewicht sind, so sind sie gleich.

Denn, wenn sie ungleich sein würden, so würde nach Fortnahme des Überschusses des einen Gewichts über das andere (nach Vor. 3) das Gleichgewicht gestört sein. Daher[1] sind Gewichte an gleichen Hebelarmen gleich.

§ 2.

Ungleiche Gewichte an gleichen Hebelarmen sind nicht im Gleichgewicht, sondern haben ein Uebergewicht nach der Seite des größeren Gewichts.

---

[1] Nach Vorauss. 1
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Denn, wenn man den Ueberschuß fortnimmt, so wird Gleichgewicht herrschen, da ja gleiche Gewichte an gleichen Hebelarmen im Gleichgewicht sind (Vor. 1). Wenn wir nun das Fortgenommene wieder hinzufügen, so wird ein Übergewicht nach der Seite des größeren Gewichts entstehen (Vor. 2).

§ 3.

Wenn ungleiche Gewichte im Gleichgewicht sind, so sind die Hebelarme ungleich, und zwar entspricht dem größeren Gewicht der kleinere Hebelarm (Fig. 1).

A und *B* seien ungleiche Gewichte, *A* sei das größere, *AC* und *BC* seien die Hebelarme. Dann ist zu beweisen, daß $AC < CB$ ist.

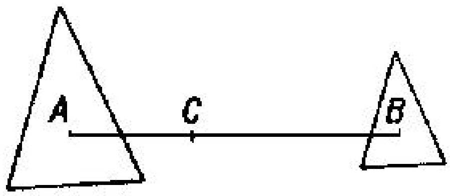

Fig. 1

Angenommen nämlich, es sei *AC* nicht kleiner als *CB*. Man nehme alsdann den Ueberschuß, um den *A* größer ist als *B*, fort. Dann wird, da die Gewichte sich im Gleichgewicht befanden und von dem einen Gewicht etwas weggenommen ist (Vor. 3) ein Übergewicht nach der Seite von *B* entstehen. Andererseits kann ein solches Uebergewicht nicht entstehen, denn entweder ist $AC = CB$, dann herrscht (nach Vor. 1) Gleichgewicht, oder es ist $CA > CB$, dann besteht ein Übergewicht nach der Seite von *A*. Denn gleiche Gewichte an ungleichen Hebelarmen sind nicht im Gleichgewicht, sondern haben ein Uebergewicht nach der Seite des längeren Hebelarmes (Vor. 1). Deshalb ist $AC< CB$.

Es ist aber auch klar, daß Gewichte, die an ungleichen Hebelarmen im Gleichgewicht sind, ungleich sind, und zwar entspricht dem kleineren Hebelarm das größere Gewicht.

§ 4.

Wenn zwei gleiche Größen nicht denselben Schwerpunkt haben, so wird der Schwerpunkt der aus ihnen zusammengesetzten Größe der Mittelpunkt der die Schwerpunkte verbindenden Strecke sein. (Fig. 2).

Es sei *A* der Schwerpunkt der Größe *A*, *B* der der Größe *B*. Die Verbindungsgerade *AB* werde in *C* halbiert. Ich behaupte, daß *C* der Schwerpunkt der aus beiden Größen zusammengesetzten Größe ist.

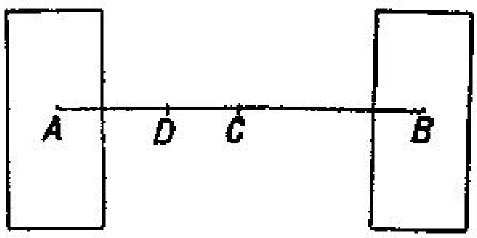

Fig. 2

Angenommen, es sei nicht der Fall, so sei *D* der Schwerpunkt, falls dies möglich. Da nun *D* der Schwerpunkt ist, so wird das System, wenn es in *D* unterstützt ist, im Gleichgewicht sein. Die Größen *A* und *B* werden sich also an den Hebelarmen *AD* und *DB* im Gleichgewicht befinden. Dies ist aber unmöglich (Vor. 1). Es ist also klar, daß *C* der Schwerpunkt des aus den Größen *A* und *B* zusammengesetzten Systems ist.

§5.

Wenn die Schwerpunkte dreier Größen auf einer Geraden liegen und die drei Größen gleiche Gewichte haben, ferner die Abstände der Schwerpunkte diesen drei Größen gleich sind, so wird der Schwerpunkt des aus diesen drei Größen zusammengesetzten Systems mit dem Schwerpunkt der mittleren Größe zusammenfallen (Fig. 3).

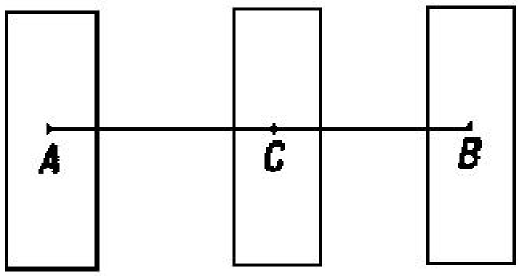

Fig. 3

Die Schwerpunkte der drei Größen *ABC* seien die Punkte *A*, *B*, *C*. Sie mögen auf einer Geraden liegen. Die Größen *A*, *B*, *C* seien untereinander gleich, und es sei $AC = CB$. Ich behaupte, daß *C* der Schwerpunkt des aus allen drei Größen zusammengesetzten Systems ist.

Denn da die Größen *A* und *B* gleiches Gewicht haben, so wird *C* ihr Schwerpunkt sein, da ja $AC = CB$ ist. *C* ist aber aber auch der Schwerpunkt der Größe *C*. Es ist also klar, daß der Schwerpunkt des aus allen drei Größen zusammengesetzten Systems derselbe Punkt ist, der auch der Schwerpunkt der mittleren Größe ist.

Zusatz 1.

Hieraus ist auch klar, daß, wenn die Schwerpunkte beliebig vieler, an Zahl ungerader Größen, die untereinander gleich sind, auf einer und derselben Geraden in gleichen Abständen liegen, der Schwerpunkt des aus allen Größen zusammengesetzten Systems mit dem Schwerpunkt der mittleren Größe zusammenfällt.

Zusatz 2.

Wenn die Schwerpunkte beliebig vieler, an Zahl gerader Größen, die untereinander gleich sind, auf einer und derselben Geraden in gleichern Abstände liegen, so wird der Schwerpunkt des aus allen Größen zusammengesetzten Systems mit dem Mittelpunkt der Strecke zusammenfallen, die die Schwerpunkte der Größen miteinander verbindet.

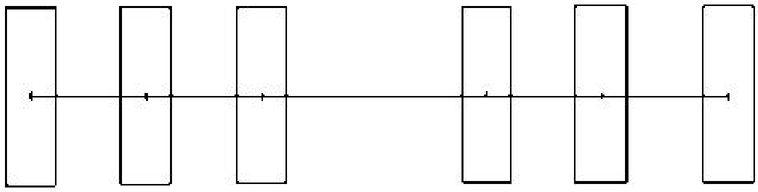

Fig. 4

§ 6.

Kommensurable Größen sind im Gleichgewicht, wenn ihre Gewichte ihren Hebelarmen umgekehrt proportional sind[2] (Fig. 5).

A und *B* seien kommensurable Größen, *A* und *B* ihre Schwerpunkte. *ED* sei irgendeine Länge und es sei $A : B = DE : CE$. Es ist zu beweisen, daß *C* der Schwerpunkt des aus *A* und *B* zusammengesetzten Systems ist.

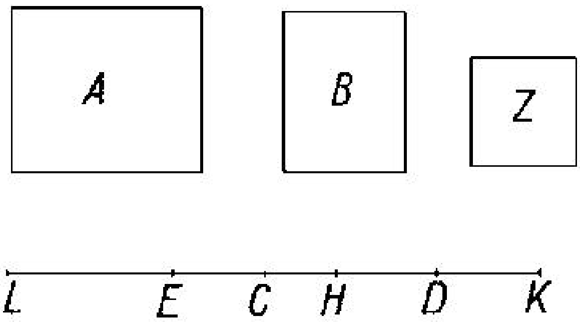

Fig. 5

[2] Der Beweis des §6 ist ein Trugschluß, wie aus folgender Ueberlegung erkant wird: Wenn z.B. das Gesetz gälte. Dass am Hebel Gleichgewicht herrscht, wenn die Gewichte umgekehrt proportional den Quadraten der Hebelarme sind, so würden alle Sätze von §1 bis §5 gelten, jedoch natürlich nicht der Satz des §6. Daraus folgt also, dass der Satz §6 nicht eine logische Folge der vorhergehenden Sätze sein kann. Der Fehlschluß liegt in folgendem: Wenn an einem Hebel zwei Massen *A* und *B* befestigt sind und B ist der Schwerpunkt dieser Massen, so darf man nicht ohne weiteres das System der Massen A und B durch das im Punkte *C* konzentrierte System *A* + *B* ersetzen. Diese Ersetzung ist nur möglich, wenn der Satz des §6 Geltung hat. In Wahrheit ist also §6 das Grundgesetz, von dem die übrigen Gesetze der §§1-5 spezielle Fälle sind.

Der Gedankengang des §6 ist folgender: In *E* und *D* greifen die Massen *A* und *B* an. Die Frage ist die, wo der Unterstützungspunkt sein muß. Behauptet wird, dass *C* der Unterstützungspunkt ist, wenn $EC : CD = B : A$ ist. Es sei $EC = x, CD = y$ genannt. Man verlängert nun den Hebelarm von *A* nach außen um *y*, den von *B* nach außen um *x*. Verteilt man nun die Masse von *A* gleichmäßig zu beiden Seiten von *E* auf die Strecke 2*y*, die von *B* gleichmäßig zu beiden Seiten von *D* auf die Entfernung 2*x*, so ist einerseits die Gesamtstrecke $LK = 2x + 2y$ ausgefüllt, andererseits sind die Schwerpunkte von *A* und *B* unverändert geblieben und drittens sind zufolge der Proportion $A : y = B : x$ die Massen über die Strecke *LK* gleichmäßig verteilt. Demnach müsste also der Mittelpunkt von *LK*, also *C* der Schwerpunkt sein. Wie oben gezeigt, ist der Schluß jedoch ein Trugschluß. Mach hat übrigens dem Schluß eine recht gefällige Form gegeben, indem er den Massen *A* und *B* die Form von Rechtecken gibt, welche gleiche Höhe und eine Länge von *y* bzw. *x* besitzen. Diese Rechtecke stehen zunächst auf dem Hebel senkrecht und werden alsdann in die Hebelrichtung hineingedreht. Auch er weist darauf hin, dass dieser Schluß trügerisch ist.

Denn, da $A:B = DC:CE$ und A und B kommensurabel sind, so werden auch die Geraden CD und CE kommensurabel sein. N sei das gemeinsame Maß dieser beiden Strecken. H und K seien so bestimmt, daß $CE = DH = DK$ ist, L so, daß $DC = EL$ ist.

Da nun $DH = CE$, so ist auch $DC = EH$, daher auch $LE = CH$. Daher ist $LH = 2DC$ und $HK = 2CE$. Daher ist N ein gemeinsames Maß der Strecken LH und HK, da es ja ein gemeinsames Maß der Hälften ist. Da nun $A:B = DC:CE$ und $DC:CE = LH:HK$, so ist $A:B = LH:HK$. Es sei N der p-te Teil von LH. Der p-te Teil von A werde Z genannt. Es verhält sich also $LH:N = A:Z$. Es ist aber auch $KH:LH = B:A$, daher auch $KH:N = B:Z$. Z ist also in B so oft enthalten, wie N in KH. Z war aber ein Maß von A. Daher ist Z ein gemeinsames von Maß A und B. Wenn nun LH in lauter Teile, die gleich N sind. A in Teile, die gleich Z sind, geteilt ist, so sind in LH soviel Teile N enthalten, wie in A Teile Z. Wenn daher auf jeden Teil N der Strecke LH ein Teil Z so aufgelegt wird, daß sein Schwerpunkt in die Mitte des betreffenden Streckenabschnitts fällt, so werden alle diese Größen zusammen gleich A sein und der Schwerpunkt dieses ganzen Systems wird E sein. Denn die Anzahl der Stücke Z ist gerade und auf jeder Seite des Punktes E liegen gleichviel Stücke Z, da ja $LE = HE$ ist. In gleicher Weise aber wird gezeigt werden, daß auch, wenn auf jeden der Abschnitte von KH ein Stück Z gelegt wird, so daß der Schwerpunkt dieses Stückes in die Mitte des betreffenden Streckenabschnitts fällt, alle diese Größen zusammen gleich B sind und daß der Schwerpunkt dieses ganzen Systems D ist. Es wird also darauf hinauskommen, daß das Stück A in E das Stück B in D konzentriert gedacht wird. Andrerseits liegen aber lauter gleiche Größen so, daß ihre Schwerpunkte auf einer Geraden in gleichem Abstände liegen, und ihre Zahl ist gerade. Es ist also klar, daß der Schwerpunkt des gesamten Systems auf der Mitte dieser Geraden liegt. Da $LE = CD$ und $EC = DK$, so ist auch $LC = CK$. Daher ist CD der Schwerpunkt des ganzen Systems. Wenn also A in E, B in D sich befindet, so werden sie im Gleichgewicht sein, falls C der Unterstützungspunkt ist.

§ 7.

Aber auch, wenn es sich um zwei inkommensurable Größen handelt, so werden sie im Gleichgewicht sein an Hebelarmen, die ihnen umgekehrt proportional sind. (Fig. 6.)

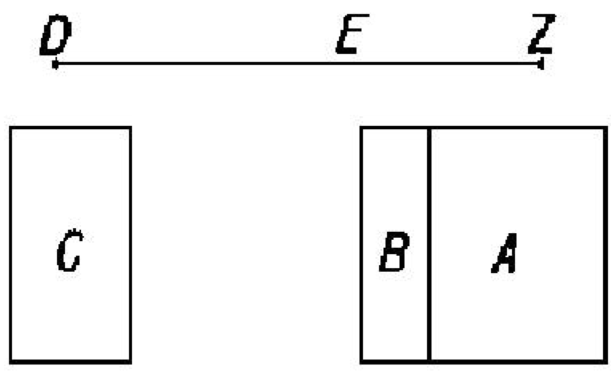

Fig. 6

$A+B$ und C seien inkommensurable Größen. DE und EZ seien die zugehörigen Hebelarme, und es sei $(A+B):C = DE:EZ$. Ich behaupte, daß der Schwerpunkt des aus $A+B$ und C zusammengesetzten Systems E ist.

Wenn es nämlich nicht der Fall wäre, so würde, wenn $A+B$ in Z und C in D angreifen, entweder $A+B$ das Uebergewicht haben oder nicht. Es habe $A+B$ das Uebergewicht und es werde von $A+B$ ein Stück B weggenommen, das kleiner ist, als daß dadurch C gegen das übrige Stück A das Uebergewicht erhalten könnte, und zwar soll B so beschaffen sein, daß das übrige Stück A zu C kommensurabel ist. Da nun A und C kommensurabel sind und $A:C < DE:EZ$, so werden A und C an den Hebelarmen EZ und DE nicht im Gleichgewicht sein[3]. Und aus demselben Grunde wird dies auch dann nicht geschehen, wenn C gegenüber $A+B$ das Uebergewicht hat.

[3] Der Schluß ist unvollständig. Er müsste so weitergeführt werden: Das statische Moment von A wäre kleiner als das von C und demnach hätte A das Uebergewicht. Dies ist unmöglich.

§ 8.

Wenn von einer Größe eine andere, die nicht den gleichen Schwerpunkt hat, fortgenommen wird, so wird der Schwerpunkt der Restgröße auf der Verbindungslinie jener beiden ersten Schwerpunkte über den Schwerpunkt der ganzen Größe hinaus liegen und zwar wird er in folgender Weise bestimmt sein: Sein Abstand vom Schwerpunkt der ganzen Größe verhält sich zum Abstand des Schwerpunktes der weggenommenen Größe vom Schwerpunkt der ganzen Größe wie die weggenommene Größe zur Restgröße.

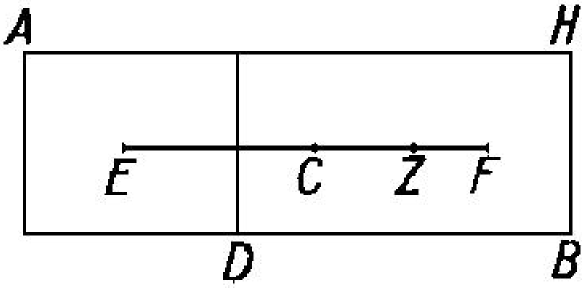

Fig. 7

Es sei *C* der Schwerpunkt einer Größe *AB*. Von *AB* werde *AD* weggenommen, dessen Schwerpunkt *E* sei. *EC* werde über *C* hinaus verlängert bis zu einem Punkte *Z*, so daß $CZ : CE = AD : DH$ sei. Es ist zu beweisen, daß der Punkt *Z* der Schwerpunkt von *DH* ist. (Fig. 7.)

Angenommen, *Z* sei nicht der Schwerpunkt, sondern *F*. Da nun *E* der Schwerpunkt von *AD* und *F* der von *DH* ist, so wird der Schwerpunkt der aus diesen beiden Größen *AD*, *DH* zusammengesetzten Größe auf *EF* so liegen, daß die Abschnitte von *EF* den Größen umgekehrt proportional sind (§ 6 und 7). (Aber der Punkt *C* ist auf *CZ* so gelegen, daß die Abschnitte von *EZ* diesen Größen umgekehrt proportional sind.) Daher kann der Punkt *C* die Strecke *EF* nicht in der angegebenen Weise teilen. *C* ist also nicht der Schwerpunkt der aus den Größen *AD*, *DH* zusammengesetzten Größe, d.h. der Größe *AB*. Andrerseits war er als der Schwerpunkt von *AB* vorausgesetzt. Demnach kann *F* nicht der Schwerpunkt von *DH* sein.

§ 9.

Der Schwerpunkt eines jeden Parallelogramms liegt auf der Geraden, die die Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms miteinander verbindet. (Fig. 8.)

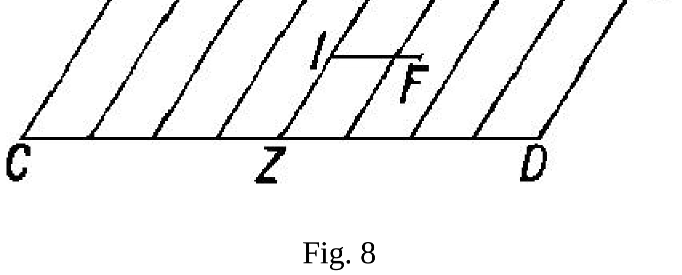

Fig. 8

ABCD sei ein Parallelogramm. *EZ* sei diejenige Gerade, die die Mitten der Seiten *AB* und *CD* miteinander verbindet. Ich behaupte, daß der Schwerpunkt des Parallelogramms *ABCD* auf *EZ* liegt.

Angenommen, es sei nicht der Fall und es sei *F* der Schwerpunkt. Dann werde *FI* parallel *AB* gezogen. Es werde nun *EB* halbiert, die Hälfte wiederum und so weiter, bis sich auf diese Weise ein Teil *EK* ergibt, der kleiner ist als *FI*. Es werde dann sowohl *AE* wie *EB* in Teile geteilt, die *EK* gleich sind und durch die Teilpunkte mögen Parallelen zu *EZ* gezogen werden. Es wird dann das ganze Parallelogramm in Parallelogramme geteilt sein, die flächengleich und ähnlich dem Parallelogramm *KZ* sind. Wenn nun diese *KZ* gleichen und ähnlichen Parallelogramme aufeinander gelegt werden, so werden auch ihre Schwerpunkte aufeinander liegen (4). Es sind also Größen vorhanden, und zwar Parallelogramme, die kongruent *KZ* sind, an Zahl gerade, deren Schwerpunkt auf derselben Geraden liegen, und zwar in gleichen Abständen. Der Mittelpunkt der aus allen diesen Größen zusammengesetzten Größen wird also auf der die Schwerpunkte der beiden mittleren Größen verbindenden Strecke liegen. Dies ist aber hier nicht der Fall, denn der Punkt *F* liegt außerhalb der beiden mittleren Parallelogramme. Es ist daher klar, daß der Schwerpunkt des Parallelogrammes *ABCD* auf der Geraden *EZ* liegt.

§ 10.

Der Schwerpunkt jedes Parallelogrammes ist der Schnittpunkt der Diagonalen (Fig.9).

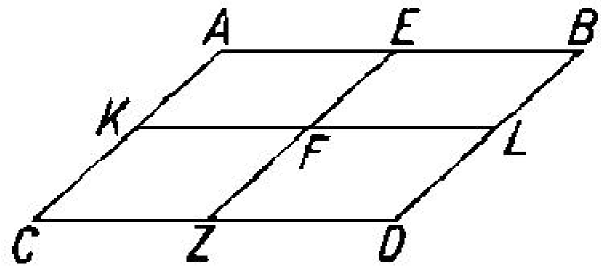

Fig. 9

Es sei *ABCD* ein Parallelogramm und *EZ* die Gerade, die die Mittelpunkte der Seiten *AB* und *CD* miteinander verbindet, *KL* aber die Gerade, die die Mittelpunkte von *AC* und *BD* verbindet Es liegt also der Schwerpunkt des Parallelogramms *ABCD* auf der Geraden *EZ*, denn dies ist bewiesen worden (§ 9). Aus demselben Grunde liegt aber der Schwerpunkt auch auf der Geraden *KL*. Also ist *F* der Schwerpunkt des Parallelogramms. In *F* schneiden einander aber die Diagonalen des Parallelogramms. Daher ist die Behauptung bewiesen.

Andere Art des Beweises.

Es läßt sich dies aber auch anders beweisen (Fig. 10).

Es sei *ABCD* ein Parallelogramm, *DB* eine Diagonale. Die Dreiecke *ABD* und *BDC* sind nun einander flächengleich und ähnlich. Wenn sie daher aufeinander gelegt werden, so decken die Schwerpunkte einander (4). Es sei *E* der Schwerpunkt des Dreiecks *ABD*, und es möge **F** der Mittelpunkt von *DB* sein. *EF* werde gezogen und über *F* um sich selbst verlängert bis *Z*. Wenn nun das Dreieck *ABD* auf das Dreieck

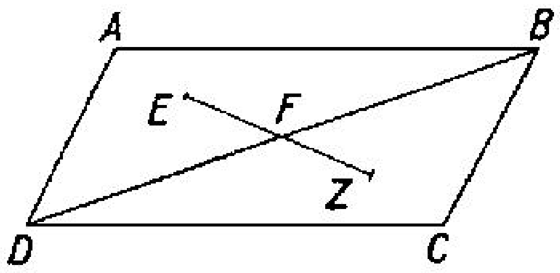

Fig. 10

BDC gelegt wird und *AB* mit *DC*, *AD* mit *BC* zur Deckung kommt, so wird *FE* mit *FZ* und *E* mit *Z* zur Deckung kommen. Andererseits kommen aber auch die Schwerpunkte miteinander zur Deckung. Da nun *E* der Schwerpunkt des Dreiecks *ABD* und *Z* der Schwerpunkt des Dreiecks *DBC* ist, so ist klar, daß der Schwerpunkt der aus beiden Größen zusammengesetzten Größe der Mittelpunkt von *EZ*, also der Punkt *F* ist.

[...]

§ 13.

Der Schwerpunkt jedes Dreiecks liegt auf der Mitteltransversale.

Es sei das Dreieck *ABC* gegeben, *AD* sei die Mitteltransversale. Es ist zu beweisen, daß der Schwerpunkt des Dreiecks *ABC* auf *AD* liegt (Fig. 13).

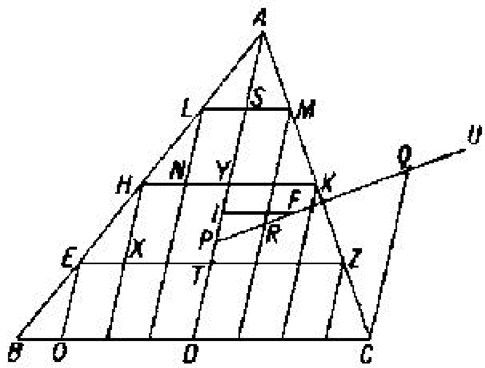

Fig. 13

Angenommen, es sei nicht der Fall, sondern es sei *F* der Schwerpunkt. Dann werde durch $F, FJ \| BC$ gezogen. Indem man nun *DC* fortgesetzt halbiert, wird schließlich ein Teil entstehen, der kleiner ist als *FJ*. Dann werde *BD* und *DC* in lauter solche gleiche Teile geteilt, und durch die Schnittpunkte mögen Parallelen zu *AD* gezogen werden. Ferner mögen *EZ*, *HK* und *LM* gezogen werden. Diese werden parallel *BC* sein. Der Schwerpunkt des Parallelogramms *MN* liegt nun auf *YS*, der des Parallelogramms *KX* auf *TY*, der des Parallelogramms *ZO* auf *TD*. Der Schwerpunkt, der aus allen diesen Parallelogrammen zusammengesetzten Flächen liegt also auf *SD*. Er sei *P*. Es werde *P* mit *F* verbunden, die Strecke *PF* werde über *F* hinaus verlängert und es werde *CQ* parallel *AD* gezogen. Der Inhalt des Dreiecks *ADC* hat zur Summe der Inhalte der über *AM*, *MK*, *KZ*, *ZC* konstruierten Dreiecke, die sämtlich dem Dreieck *ADC* ähnlich sind, dasselbe Verhältnis, wie *CA* zu *AM*, da $AM = MK = KZ = ZC$ ist. Da aber das Dreieck *ADB* zur Summe der über den Strecken *AL*, *LH*, *HE*, *EB* konstruierten ähnlichen Dreiecke dasselbe Verhältnis hat wie *BA* zu *AL*, so wird also das Dreieck *ABC* zur Summe aller genannten Dreiecke dasselbe Verhältnis haben wie *CA* zu *AM*. Aber *CA* hat zu *AM* ein größeres Verhältnis als *QP* zu *PF*. Denn $CA : AM = QP : PR$. Also hat das Dreieck *ABC* zur Summe aller genannten Dreiecke ein größeres Verhältnis als *QP* : *PF*. Indem wir in dieser Beziehung zur Differenz übergehen

$$[\text{aus } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ folgt } \frac{a-b}{b} > \frac{c-d}{d}]$$

folgt, daß die Summe der Parallelogramme *MN*, *KX*, *ZO* zu der Summe der Restdreiecke ein größeres Verhältnis hat als *QF* zu *PF*. Es werde nun *U* so gewählt, daß sich die Summe der Parallelogramme zur Summe der Dreiecke verhalte wie $UF : FP$. Da nun eine Größe, das Dreieck *ABC*, vorhanden ist, deren Schwerpunkt *F* ist und von dieser Größe eine Größe, nämlich die Summe der Parallelogramme *MN*, *KX*, *ZO* weggenommen ist und der Schwerpunkt der weggenommenen Größe *P* ist, so wird also der Schwerpunkt der Restgröße, die aus den Restdreiecken zusammengesetzt ist, auf der Geraden *PF*, und zwar auf deren Verlängerung so liegen, daß sein Abstand vom Punkte *F* sich zu *PF* verhält wie die weggenommenen Größen zur Restfläche (§ 8). *U* ist also der Schwerpunkt der aus den Restdreiecken zusammengesetzten Fläche. Dies ist aber unmöglich, denn wenn man durch *U* die Parallele zu *AD* zieht, so liegen sämtliche Restdreiecke auf einer und derselben Seite dieser Parallelen. Demnach ist die Behauptung bewiesen.

Andere Art des Beweises (Fig. 14).

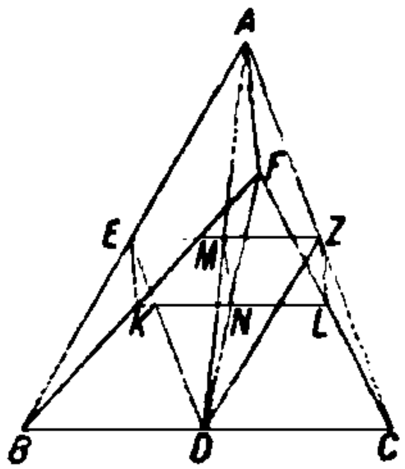

Fig. 14

Es sei das Dreieck *ABC* gegeben, und es werde *AD* als Mitteltransversale gezogen. Ich behaupte, daß der Schwerpunkt des Dreiecks *ABC* auf *AD* liegt.

Angenommen, es sei nicht der Fall, sondern es sei *F* der Schwerpunkt, und es mögen *AF*, *FB*, *FC* gezogen werden, sowie die Verbindungslinien der Mitten der Dreiecksseiten *ED*, *ZE*, *ZD*. Parallel AF mögen gezogen werden *EK*, *ZL*. Ferner werden gezogen *KL*, *LD*, *DK*, *DF*, *MN*. Da nun $BA \| CD$, so ist das Dreieck *ABC* ähnlich dem Dreieck *DZC*, und da F der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist, so ist L der Schwerpunkt des Dreiecks ZDC. Denn F und L sind Punkte, die in den Dreiecken ähnlich gelegen sind. Aus dem gleichen Grunde ist K der Schwerpunkt des Dreiecks EBD. Daher ist der Schwerpunkt der aus den beiden Dreiecken EBD, ZDC zusammengesetzten Fläche der Mittelpunkt der Strecke KL. Es ist aber N der Mittelpunkt von KL. Denn $BE : EA = BK : KF$ und $CZ : ZA = CL : LF$, daher ist $BC \| KL$. Nun ist DF gezogen, und es ist $BD : DC = KN : NL$. Daher ist N der Schwerpunkt der aus den beiden Dreiecken zusammengesetzten Fläche. M ist aber der Schwerpunkt des Parallelogramms $AEDZ$ (§ 10). Daher liegt der Schwerpunkt der aus allen diesen Flächen zusammengesetzten Fläche auf der Geraden MN. Aber der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist der Punkt F. Daher ginge die Gerade MN durch den Punkt F. Dies ist aber unmöglich,

denn $EM = MZ, KN = NL$, daher $MN \| ZL \| AF$.

Daher muß der Schwerpunkt des Dreiecks ABC auf AD liegen.