## Trigonometrie ohne Winkelfunktionen

Aristarch hatte keine tabulierten Winkelfunktionen zur Verfügung. Dennoch ist es ihm gelungen, das Verhältnis $d_{ES}/d_{EM}$ für seinen Winkelwert von 87° bei der Erde (bzw. 3° bei der Sonne) mit bemerkenswerter Genauigkeit abzuschätzen.

Aristarch hat seine Abschätzung durch systematische Anwendung zweier nützlicher Ungleichungen und einiger geometrischer Tricks gefunden.

Für den Beweis der Behauptung, dass die Sonne weniger als 20 mal so weit wie der Mond von der Erde entfernt ist, benutzte er die Tatsache, dass, modern formuliert, $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ für wachsende $\alpha$ zwischen 0° und 90° eine monton fallende Funktion ist.

Dies kann man sich an der **Abbildung 5** plausibel machen. Wenn der Radius des Viertelkreises gleich 1 ist, dann repräsentieren die Ordinaten gerade die Sinus-Werte. Bei gleichmäßigem Wachstum des Winkels wird der Zuwachs der Sinus-Werte immer kleiner, folglich fällt $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ monoton.

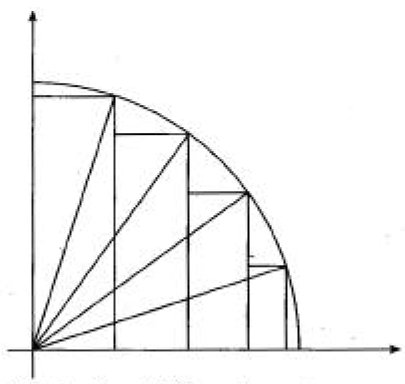

**Abb. 5:** $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ ist für wachsende $\alpha$ zwischen 0° und 90° eine monton fallende Funktion

Nun ziehen wir aus der Originalfigur von Aristarch eine Teilfigur heraus (**Abb. 6**). Hier soll $AKD$ das Dreieck Erde–Mond–Sonne repräsentieren. Aristarch wendet nun den Umfangswinkelsatz an. Da $\angle AKD = 3°$ ist, ist $AK$ eine Sehne zum Mittelpunktswinkel 6° (gestrichelte Linie). Der Punkt $L$ ist so konstruiert, dass die Sehne $AL$ gleich dem Radius des Kreises ist. Dies ist im vorliegenden Fall der halbe Abstand der Erde von der Sonne. $\overline{AL}$ ist zugleich die Seite des in den Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks. Daher gehört zu $\overline{AL}$ der Mittelpunktswinkel 60°. Nach der obigen Sinus-Ungleichung folgt mithin

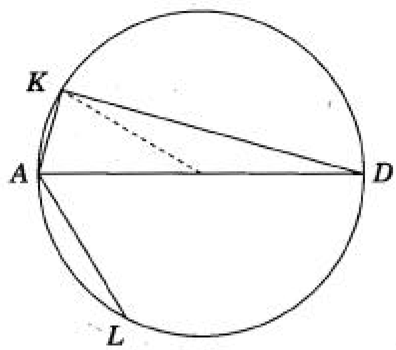


**Abb. 6:** AKD repräsentiert das Dreieck Erde–Mond–Sonne

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{AK}} < \frac{60°}{6°} = 10.$$

Also ist $\overline{AL} < 10 \cdot \overline{AK}$ und daher

$d_{ES} = \overline{AD} = 2 \cdot \overline{AL} < 20 \cdot \overline{AK} =$

$20 \cdot d_{EM}$, also $d_{ES} < 20 \cdot d_{EM}$.

Die Abschätzung, dass $d_{ES} > 18 \cdot d_{EM}$, folgt auf analoge, wenn auch etwas kompliziertere Weise.

## Aristarch – der antike Kopernikus

Aristarchs Auffassung vom Aufbau des Weltalls stand im Widerspruch zur Mehrheitsmeinung der damaligen Fachleute, während wir heute seine Auffassung teilen. Nach Aristarch steht die Sonne im Mittelpunkt des Weltalls, und die Erde dreht sich um die Sonne (heliozentrisches im Gegensatz zum geozentrischen System). Als Kopernikus (1473–1543) im Jahre 1530 erstmalig sein heliozentrisches System vorschlug, berief er sich ausdrücklich auch auf Aristarch. Wie Giordano Bruno, der im Jahre 1600 in Rom wegen dieser Auffassung verbrannt wurde, und Galileo Galilei (1564–1642), der 1632 vor der Inquisition abschwören musste, scheint auch Aristarch gewisse Schwierigkeiten mit den religiösen Autoritäten gehabt zu haben. Jedenfalls berichtet uns Plutarch, dass Kleanthes der Stoiker meinte, „die Griechen müßten Aristarch von Samos anklagen, weil er den Herd des Kosmos [gemeint ist die Erde] sich hat bewegen lassen." (zitiert nach van der Waerden 1988, S. 131–132)

## Wie weit ist der Mond von der Erde entfernt?

Im rechtwinkligen Dreieck Erde–Mond–Sonne konnte Aristarch nur die relativen Abstände bestimmen, weil ihm nur die Winkel bekannt waren. Ohne irgendeine direkt gemessene (Längen-) Entfernung gibt es keine Möglichkeit, aus Angaben über Winkel absolute Längenangaben zu gewinnen. Diese können wir aber nur auf der Erde messen. Die Entfernungsbestimmung im Weltall erfordert es also, irgendein astronomisches Dreieck zu vermessen, dessen eine Seite eine irdische Länge ist und daraus mit Hilfe trigonometrischer Berechnungen eine Entfernung im Weltraum, z. B. den Abstand Erde–Mond zu erhalten. Hat man eine astronomische Distanz gewonnen, kann man sich von da aus schrittweise weiter vorarbeiten.

Beim Vermessen verfahren die Astronomen also im Prinzip wie die Geodäten auf der Erde. Wenn letztere ein Gebiet kartographieren, dann zerlegen sie es in Dreiecke, deren Winkel sie bestimmen. In einem einzigen Dreieck wird dann sehr sorgfältig die Länge einer Seite gemessen, die so genannte „Standlinie", z. B. $\overline{AB}$ in **Abbildung 7**. Dann ergibt sich nach dem Sinussatz

$$\overline{AS} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin(180° - \beta)}{\sin\phi}$$

und entsprechend $\overline{BS}$.

Nun stellen wir uns vor, $ABS$ in Abbildung 7 sei ein „astronomisches Dreieck", wobei $A$, $B$ Punkte auf der Erdoberfläche sind und $S$ irgendein Himmelsobjekt. $\alpha$ und $\beta$ seien die in $A$ und $B$ gemessenen Winkel von $S$

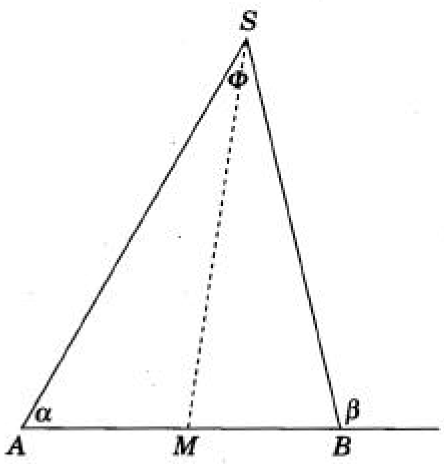


**Abb. 7:** Man muss die Länge einer Seite messen, um die anderen Seitenlängen zu bestimmen

über dem Horizont. Dann ist der Unterschied $\phi = \beta - \alpha$ dieser beiden Winkel genau gleich dem Winkel bei $S$. Diesen Winkel nennt man in der Astronomie den Parallaxenwinkel des Himmelsobjektes.

Wir kehren zur Abbildung 7 zurück und rücken den Stern $S$ in Gedanken längs der gestrichelten Geraden $MS$ immer weiter von $AB$ weg. Dann wird $\phi$ immer kleiner werden, und schließlich so klein, dass man ihn nicht mehr messen kann. Als Mathematiker können wir uns vorstellen, der Stern stehe „unendlich weit entfernt". Dann sind $AS$ und $BS$ parallel, und $S$ erscheint von $A$ und $B$ aus unter demselben Winkel $\alpha = \beta = \angle SMB$, also $\phi = 0$.

Nun hat man bereits in der Antike die Erfahrung gemacht, dass man für den Mond durchaus einen merkbaren Parallaxenwinkel beobachtet. Niemals aber war es möglich, für die so genannten Fixsterne eine von Null verschiedene Parallaxe festzustellen, auch wenn man gleichzeitig an weit entfernten Punkten der damals bekannten Erde gemessen hat. Folglich sind die Fixsterne sehr viel weiter entfernt als der Mond.

Wenn man nun mit Aristarch annimmt, dass die Erde nicht feststeht, sondern sich bewegt, dann sollte man eine Parallaxe feststellen können, wenn man die Position eines Fixsternes einmal im Winter und dann im Sommer, also bei zwei diametral entgegengesetzten Stellungen der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne, misst. In Abbildung 7 wäre dann $M$ die Sonne und etwa $A$ die Stellung der Erde im Winter, $B$ ihre Stellung im Sommer, $AM = MB$ die Entfernung der Erde von der Sonne.

Aber auch bei Messungen im Winter und im Sommer ergab sich für die Fixsterne keine merkbare Parallaxe, so dass mit der Hypothese des Aristarch die Fixsternkugel sogar im Vergleich zum Durchmesser der Erdbahn unermesslich groß sein müsste. Das schien so unglaublich, dass die Theorie des Aristarch einfach nicht plausibel war. Je genauer man damals gemessen hat, um so weniger akzeptabel war sie. Noch für Tycho Brahe (1546–1601 n. Chr.), der die genauesten zu seiner Zeit möglichen astronomischen Messungen ausgeführt hat, war dies das entscheidende Argument gegen die Auffassung, dass die Erde sich um die Sonne dreht. Erst im 19. Jahrhundert war die Beobachtungstechnik so weit entwickelt, dass man Parallaxen von Fixsternen messen und zur Bestimmung ihrer Entfernung nutzen konnte.

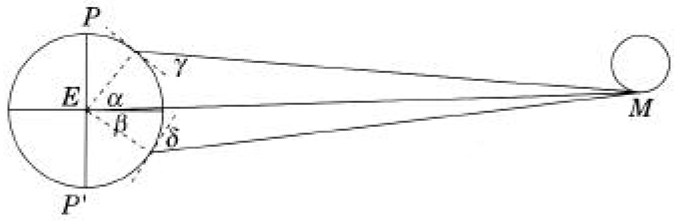


**Abb. 8:** Die Entfernung Erde–Mond kann man mit Hilfe der Mondparallaxe bestimmen

In der abschließenden Aufgabe 8 wird eine Messung der Mondparallaxe aus dem 18. Jahrhundert beschrieben. Die Aufgabe ist der Kürze halber als „Schulbuchaufgabe" formuliert. Ich empfehle, sie nicht als solche zu behandeln. Man sollte den Schülerinnen und Schülern den Text der Aufgabe geben, nicht aber die zugehörige Abbildung. Der Reiz liegt gerade darin, gemeinsam eine der **Abbildung 8** entsprechende Skizze zu erstellen. Dazu sollte man einen Globus mitbringen, an dem man sich die ganze Situation vergegenwärtigt.

**8.** *Berlin (B in Abb. 8) und das Kap der guten Hoffnung an der Südspitze Afrikas (C) liegen ziemlich genau auf demselben Längengrad, zugleich sind beide Orte geographisch weit voneinander entfernt. Man nennt den Großkreis, der durch den Nordpol P, den Beobachtungsort und den Südpol P' geht, den Meridian des Beobachtungsortes. Da Berlin und das Kap der guten Hoffnung auf demselben Längenkreis liegen, haben sie denselben Meridian. Wenn man sein Beobachtungsinstrument genau in Nord-Süd-Richtung justiert, kann man sehr gut beobachten, wann ein Himmelsobjekt genau auf dem Meridian (das heißt genau im Süden) steht. Dann hat es den höchsten Punkt seiner durch die Erddrehung verursachten täglichen Bahn erreicht. Man nennt dies die Kulmination des Objektes. Am 23. Februar 1752 befanden sich die französischen Astronomen Lalande und Lacaille in Berlin bzw. am Kap der guten Hoffnung. Zum Zeitpunkt der Kulmination des Mondes peilte Lalande von Berlin aus den unteren Rand des Mondes an, Lacaille hingegen, da er sich am Kap auf der südlichen Halbkugel befand, den oberen. Mond (M), Erdmittelpunkt (E) und die Beobachtungsorte B und C befanden sich zu diesem Zeitpunkt in derselben Ebene, die durch den gemeinsamen Meridian von B und C aufgespannt wurde. Lalande maß $\gamma$ = 57°55'12" für die Stellung des unteren Mondrandes über dem Horizont, Lacaille am Kap maß $\delta$ = 34°17'12" für den Abstand des oberen Mondrandes vom Horizont. Die nördliche Breite des Berliner Beobachtungspunktes betrug $\alpha$ = 52°31'13", die südliche Breite des Beobachtungspunktes am Kap war $\beta$ = 33°56'13". Berechne aus diesen Angaben die Entfernung EM, ausgedrückt in Vielfachen des Erdradius R, und in Kilometern (R ≈ 6370 km).*

### Literatur


Heath, T.: Aristarchus of Samos the ancient Copernicus. A history of Greek astronomy together with Aristarchus' treatise on the sizes and distances of the sun and the moon. A new Greek text with translation and notes (Reprint of the Second Edition ed.). – The Clarendon Press, Oxford 1913.

Lermer, R.: Grundkurs Astronomie. – Bayerischer Schulbuchverlag, München 1993.

Nokk, A.: Aristarchos über die Größen und Entfernungen der Sonne und des Mondes. Übersetzt und erläutert. – Freiburger Lyceum, Freiburg 1854.

Stückelberger, A.: Einführung in die antiken Naturwissenschaften. – Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1988.

van der Waerden, B. L.: Die Astronomie der Griechen. Eine Einführung. – Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1988.