Johann Bernoulli

Aufgabe: Über Maxima und Minima und Extremwertprobleme

Aus der
„Vorlesung über das Rechnen mit Differentialen"
(1691/92)

Quelle: Schafheitlin, Paul (Hrsg.): Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92.Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft. - Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. - 1924

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Aufgabe 12.

Über Maxima und Minima [34].
Um den größten Wert zu finden, werden die Größen als Ordinaten irgendeiner gegen die Achse konkaven Kurve wie *ABC* (Fig.14) und umgekehrt um den kleinsten zu finden,werden sie als Ordinaten einer gegen die Achse konvexen Kurve wie *GDE* betrachtet, wo *GE* die Achse ist. Hierauf wird die Tangente im Maximum oder Minimum gezogen, die der Achse parallel wird. Weil nun $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}$ und y unendlich viel kleiner als die Subtangente ist, so wird auch dy gegen dx Null. Wenn z. B. das größte Rechteck zu finden ist, das die beiden Teile x und a-x einer gegebenen Strecke a bilden, so betrachte ich $ax - x^2$ als Ordinate einer gewissen gegen die Achse konkaven Kurve und setze deren Differential $adx - 2xdx = 0$,

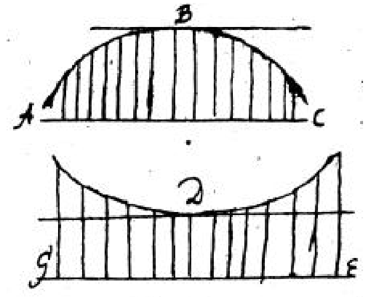

Fig. 14.

daher $adx = 2xdx$ und $x = \frac{a}{2}$. Es entsteht also das größte Rechteck, wenn $x = \frac{a}{2}$ genomen wird.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Aufgabe 13.

Eine gegebene Strecke so in drei Teile teilen, daß das Produkt der Teile den größten Quader ergibt, der aus drei Teilen dieser

Fig. 15.

Strecke gebildet werden kann. Sei (Fig. 15) *AB*=*x* und werde der Rest in *D* geteilt, so ist nach Aufgabe *12* das Quadrat über *BD* oder *DC* das größte Rechteck beider Teile der Strecke *BC*, folglich mit *AB* multipliziert auch der größte Quader der drei Teile jener Strecke. Also $a^2x - 2ax^2 + x^3 =$ dem Maximum und sein Differential $a^2dx - 4axdx + 3x^2dx = 0$ und $x^2 = \frac{4}{3}ax - \frac{1}{3}a^2$ und $x = \frac{1}{3}a$.
Ebenso wird, wenn die Strecke in vier Teile geteilt werden soll, so daß das Produkt der Teile einen größten Wert vierter Dimension annimmt, $x = \frac{1}{4}a$ gefunden. Bei Fünfteilung wird $x = \frac{1}{5}a$ usw. gefunden.

Aufgabe 14.

Das größte Rechteck zu finden, das von den Abszissen und Ordinaten eines Kreises gebildet wird.

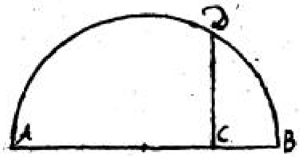

Fig. 16.

Sei (Fig. 16) der Durchmesser *AB*=*a* und *AC*=*x*, dann wird *CB* = *a*-*x* und $CD = \sqrt{ax - x^2}$. Das Rechteck $ACD = \sqrt{ax^3 - x^4}$ = einem Maximum, sein Differential $\frac{3ax^2dx - 4x^3dx}{2\sqrt{ax^3 - x^4}} = 0$ und $3ax^2 = 4x^3$ und 3*a*=4*x*, folglich $x = \frac{3}{4}a$, was zu finden war.