Johann Bernoulli

Aufgabe: Über ein physikalisches Extremwertproblem

Aus der
„Vorlesung über das Rechnen mit Differentialen“
(1691/92)

Quelle: Schafheitlin, Paul (Hrsg.): Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92.Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft. - Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. - 1924

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Aufgabe 19.

Das Gewicht (Fig. *21) A* hänge an dem Seile *AC*, das in *C* befestigt ist und über die Rolle *E* geht, die frei beweglich an dem in *B* befestigten Seile hängt; es wird gefragt, wo die Rolle *E* und das Gewicht *A* zur Ruhe kommen.

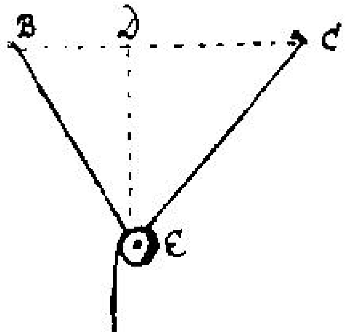

Fig. 21.

Unter der Voraussetzung, daß die Seile und die Rolle kein Gewicht besitzen, kommt die Rolle und das Gewicht dort zur Ruhe, wo der Abstand *AD* des Gewichts *A* von der wage rechten Linie *BC* ein Maximum ist. Um diesen zu finden sei die Seillänge $AC = a$, $BC = b$, $BE = c$ und $DE = x$, so wird $BD = \sqrt{c^2 - x^2}$, $DC = b - \sqrt{c^2 - x^2}$, $CE = \sqrt{b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - x^2}}$

$$AE = a - \sqrt{b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - x^2}}$$

und es wird
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

$$AD = x + a - \sqrt{b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - x^2}} \text{ ein Maximum.}$$

Sein Differential

$$dx - \frac{bxdx}{\sqrt{c^2 - x^2}\sqrt{b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - x^2}}} = 0\,.$$

Folglich

$$\sqrt{b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{bx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$$

und

$$b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - x^2} = \frac{b^2x^2}{c^2 - x^2}$$

oder

$$b^2 + c^2 - \frac{b^2x^2}{c^2 - x^2} = 2b\sqrt{c^2 - x^2} = \frac{b^2c^2 + c^4 - 2b^2x^2 - c^2x^2}{c^2 - x^2}\,,$$

also

$$b^4c^4 + c^8 + 4b^4x^4 + c^4x^4 + 2b^2c^6 - 4b^4c^2x^2 - 6b^2c^4x^2 - 2c^6x^2$$
$$+ 4b^2c^2x^4 = 4b^2c^6 - 12b^2c^4x^2 + 12b^2c^2x^4 - 4b^2x^6\,.$$

A u f   a n d e r e   A r t.

Sei $BD = x$, so wird

$$DC = b - x,\ DE = \sqrt{c^2 - x^2},\ CE = \sqrt{b^2 - 2bx + c^2},$$

$$AE = a - \sqrt{b^2 - 2bx + c^2}.$$

$$AD = a - \sqrt{b^2 - 2bx + c^2} + \sqrt{c^2 - x^2} = \text{Maximum.}$$

Sein Differential wird

$$\frac{bdx}{\sqrt{b^2 - 2bx + c^2}} - \frac{xdx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = 0\text{, also}$$

$$x\sqrt{b^2 - 2bx + c^2} = b\sqrt{c^2 - x^2}$$

und

$$b^2x^2 - 2bx^3 + c^2x^2 = b^2c^2 - b^2x^2$$

$$\text{und } x^3 = \frac{2b^2x^2 + c^2x^2 - b^2c^2}{2b}\ [36].$$

---

[36] Vergleiche de l'Hospital, Analyse des infiniment petits §60:

Soit une poulie F qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D suspendu par la corde DFB qui passe au dessus de la poulie F, et qui est attachée en B, en sorte que les points C, B sont situés dans la même ligne horizontale CB. On suppose que la poulie et les cordes n'ayent aucune pesanteur ; et l'on demande en quel endroi le plomb D ou la poulie F doit s'arrêter (Fig.33).

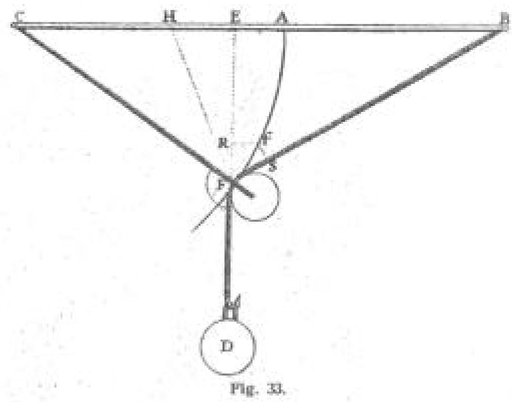

Fig. 33.

Wie schon im Vorwort erwähnt wurde, hat de l'Hospital bemerkt, dass die Gleichung dritten Grades die Wurzel $x = b$ (bei de l'Hospital $x = c$) zulässt. Nach Weglassung dieser Wurzel erhält man

$$2bx^2 - c^2x - bc^2 = 0\text{, oder } x = \frac{c}{4b}\left(c \pm \sqrt{c^2 + 8b^2}\right).$$