Johann Bernoulli

Aufgabe: Über die Auffindung des Wendepunktes von Kurven (erste und zweite Methode)

Aus der
„Vorlesung über das Rechnen mit Differentialen“
(1691/92)

Quelle: Schafheitlin, Paul (Hrsg.): Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92.Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft. - Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. - 1924

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Aufgabe 21.

Über die Auffindung des Wendepunktes der Kurven [39]. Es gibt gewisse Kurven, die eine zwiefache Krümmung haben, zuerst nämlich gegen die Achse konkav und nachher konvex gegen sie oder umgekehrt, erst konvex und zuletzt konkav; derjenige Punkt, der jene beiden Krümmungen trennt, der das Ende der ersten und der Anfang der folgenden ist, heißt Wendepunkt oder Rückkehrpunkt. So oft die Kurve ihre Krümmung ändert, so viele Wendepunkte wird sie haben, und wie sie in den Kurven zu bestimmen sind, werden wir jetzt auf zwei Arten behandeln.

Erste Art.

Aus der Betrachtung der Kurven erhellt, daß, solange die Kurven gleichförmige Krümmung besitzen, bei wachsenden Abszissen beständig die Tangenten vom Scheitelpunkt der Kurve zurückweichen, sobald aber die Kurve entgegengesetzte Krümmung annimmt, nähern sich die Tangenten bei wachsenden Abszissen wieder dem Scheitel; das leuchtet, meine ich, jedem die Natur der Krümmung aufmerksam Betrachtenden ein; hieraus wird der Wendepunkt sehr leicht bestimmt. Da nämlich die Tangente im Wendepunkt am weitesten vom Scheitel entfernt ist, wird die Subtangente vermindert um die Abszisse oder die Abszisse vermindert um die Substangente von allen möglichen am größten sein, d. h. $t-x=m$ [40] oder $x-t=m$, also nach der vorgetragenen Methode über Maxima und Minima wird $dt-dx=O$ oder $dx-dt=O$.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Aus dieser Gleichung folgt der Wert der Abszisse x, woraus die Ordinate y den gesuchten Wendepunkt bestimmt.

Zweite Methode.

Derselbe Punkt kann anders so gefunden werden: Ich denke mir, daß er dort liegt, wo die Kurve gleichzeitig konvex und konkav ist, also zugleich das eine und das andere, da sie nun beides nicht sein kann, so muß sie eine Gerade sein, d. h. weder konvex noch konkav. (Das ist nicht so aufzufassen, als ob ein endlicher Teil jener Kurve gerade sei, sondern nur daß zwei unendlich kleine Teilchen in gerade Richtung fallen.) Da nun in jeder Geraden bei konstantem dx auch dy konstant ist und folglich ddy (Differential des Differentials)=0 ist, so wird der Wendepunkt gefunden, indem man $ddy=0$ setzt; aus dieser Gleichung wird die Abszisse x bestimmt und zugleich der gesuchte Wendepunkt [41]. Auf beide Arten zu lösende Beispiele werden die Sache besser beleuchten.
Es sei also (Fig. 23) ABC eine gegebene Kurve, deren Natur ($AD=x$, $BD=y$) durch die Gleichung ausgedrückt sei $ax^2 - yx^2 - a^2 y = 0$; es wird nach dem Wendepunkt gefragt.

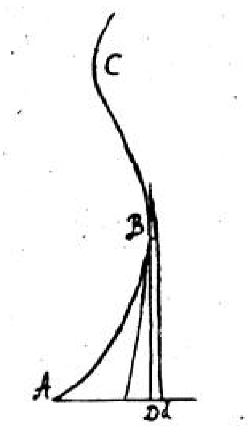

Fig. 23.

Auf die erste Art: Man nehme die Differentiale der Gleichung und erhält: $2ax\,dx - x^2 dy - 2xy\,dx - a^2 dy = 0$ oder $2ax\,dx - 2xy\,dx = x^2 dy + a^2 dy$, folglich $\frac{2ax - 2xy}{x^2 + a^2} = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{t}$; man findet also $t = \frac{x^2 y + a^2 y}{2ax - 2xy} = \frac{ax^2}{2ax - 2yx} = \frac{ax}{2a - 2y} = \frac{a^2 x + x^3}{2a^2}$, weil $y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}$. Daher $x - t = \frac{a^2 x - x^3}{2a^2}$=Maximum. Sein Differential ist daher $\dfrac{a^2 dx - 3x^2 dx}{2a^2} = 0$; mit $2a^2$ multipliziert und durch dx dividiert: $a^2 - 3x^2 = 0$ oder $\dfrac{1}{3}a^2 = x^2$ und $x = a\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

Auf die andere Art: Da $y = \dfrac{ax^2}{a^2 + x^2}$ ist, wird durch Differentiation

$dy = \dfrac{2a^3 x dx}{(a^2 + x^2)^2}$ und

$$ddy = \frac{2a^7 dx^2 - 4a^5 x^2 dx^2 - 6a^3 x^4 dx^2}{(a^2 + x^2)^4} = 0$$

oder mit $(a^2 + x^2)^4$ multipliziert und durch $2a^3 dx^2$ dividiert, folgt: $a^4 - 2a^2x^2 - 3x^4 = 0$ und dividiert man diese Gleichung durch $a^2 + x^2$, so erhält man $a^2 - 3x^2 = 0$ wie oben [42].

Diese beiden Arten sind bei mechanischen Kurven nicht weniger anwendbar als bei geometrischen [43], wenn sie nur richtig angewendet werden, um das Verhältnis von *dy* und *dx* erforscht wird. Sei z. B. (Fig. 24) *ABC* eine solche Kurve, daß in dem um *AF* als Durchmesser beschriebenen Halbkreis *AGF* das Lot *GD* um den Bogen *AG*=*BD* verlängert wird, und es wird der Wendepunkt gesucht [44].

Auf die erste Art: Sei *AD*=x oder *BD*=y, *AF*=2a, so wird (wegen *be*=*Gg*) $dy = \dfrac{a dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Es ist aber $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{t}$

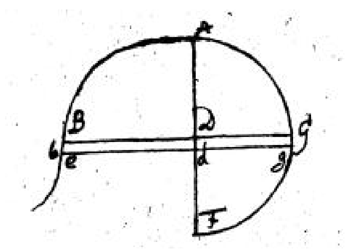

Fig. 24.

also $t = \dfrac{y dx}{dy} = \dfrac{y\sqrt{2ax - x^2}}{a}$ und $t - x = \dfrac{y\sqrt{2ax - x^2}}{a} - x$ =Max.

Folglich das Differential $\dfrac{2ax dy - x^2 dy + ay dx - yx dx}{a\sqrt{2ax - a^2}} - dx = 0$

oder $2ax dy - x^2 dy = yx dx - ay dx + a dx\sqrt{2ax - x^2}$ und

$$dy = \frac{yx dx - ay dx + a dx\sqrt{2ax - x^2}}{2ax - x^2}.$$

Oben fanden wir

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{yx\,dx - ay\,dx + adx\sqrt{2ax - x^2}}{2ax - x^2}\,.$$

Hieraus folgt $yx - ay = 0$ also x=a.