Johann Bernoulli

Aufgabe: Eine dritte Methode zur Auffindung von Wendepunkten von Kurven

Aus der
„Vorlesung über das Rechnen mit Differentialen“
(1691/92)

Quelle: Schafheitlin, Paul (Hrsg.): Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92.Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft. - Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. - 1924

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Eine dritte Art, den Wendepunkt zu finden.

Die vorgeführten Beispiele genügen, um zu zeigen, wie die Methode zur Ermittelung der Wendepunkte auf die der Maxima und Minima zurückgeführt werden kann. Zugleich erkennt man, daß es immer nötig ist, daß die Beziehung zwischen *x* und *y* durch eine Gleichung gegeben sei, wenn der Wendepunkt durch die vorgetragene Methode zu finden ist. Wir werden nun eine Art, die Wendepunkte zu finden, zeigen, nur aus der Erzeugung der Kurven, ohne daß nach einer Beziehung zwischen *x* und *y* gefragt wird. Zuvor aber werde ich sagen, wie der Wendepunkt aufzufassen sei.
Ich nehme an, daß jede beliebige Kurve aus unendlich vielen, unendlich kleinen geraden Stückchen besteht, *ab, bc, cd* usw. (Fig. 27), und daß die Tangente in irgendeinem Punkte *d* nichts anderes als das gerade Stückchen *dcm*; es ist dann offenbar, daß, wenn die Kurve nach außen konvex ist, die Tangente *de* des folgenden Teilchens nach außen fällt und den unendlich kleinen Winkel *ldm* bildet; wenn dagegen die Kurve nach außen kon-

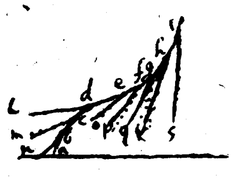

Fig. 27.

kav ist, liegt die Tangente des folgenden Teilchens innen; der Wendepunkt liegt dort, wo die Tangente weder auf die Außen- noch Innenseite des folgenden Teilchens und daher mit derTangente des vorangehenden Teilchens zusammenfällt, d. h. wo zwei aufeinanderfolgende Teilchen wie *de, fg* in eine Gerade fallen.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Nachdem dies begriffen ist, kann man durch eine allgemeine Gleichung den etwaigen Wendepunkt aller Kurven bestimmen, deren Natur durch Erzeugung und Linienbeziehung von einem gemeinsamen Punkte zu beliebigen anderen bekannt ist.
Sei also (Fig. 28) *ABC* eine beliebige Kurve, die in *B* einen Wendepunkt hat, der zu ermitteln ist.
Von dem gegebenen Punkte *F* (von wo aus die zur Kurve gezogenen Geraden deren Entstehung oder Natur bestimmen) denkt man sich Gerade *FB*, *Fb* gezogen, die einen unendlich kleinen Winkel *bFB* miteinander bilden, und nachdem auf *FB, Fb* die Lote *FD, Fd* errichtet sind, ziehe man im Punkte *B* die Tangente *BdD*, die (weil *B* Wendepunkt ist) zugleich Tangente in *b* ist. Um den Mittelpunkt *F* beschreibe man die kleinen Bogen *Be, gd* und sei *FB* oder *Fb=z*, *FD* oder *Fd=t*, *Be=dy*, so wird *be=dz, gD=dt*. Da nun $\angle BFe = gFd$

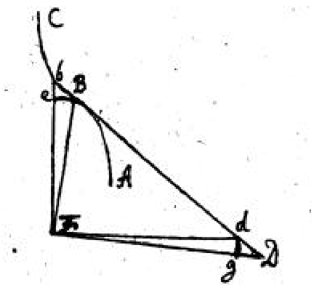

Fig. 28.

=gFd, so wird *FB:Fd=Be:gd* also $gd = \frac{tdy}{z}$ und (weil $\Delta beB\, gdD$) es ist *be:Be=gd:gD*, d.h. $dz:dy = \frac{tdy}{z}:dt$ also $\frac{tdy^2}{z} = dz\,dt$ oder weil *t:z=dy:dz* ist $\frac{dy^3}{dz} = dz\,dt$ und $dy^3 = dz^2 dt$ und aus dieser Gleichung, da *dy* und *dt* in *dz* gegeben werden können, wird ermittelt, was *z* oder *FB* ist und sobald *FB* bekannt ist, kennt man auch den Wendepunkt *B* [47].

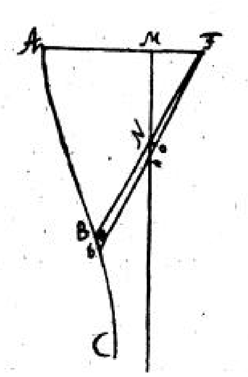

Fig. 29.

Sei z.B. *ABC* (Fig. 29) die erste Konchoide des Nikomedes, worin *A* der Scheitel, *F* das Zentrum, *MN* die Asymptote sei; es wird der Wendepunkt gesucht ohne die Beziehung zwischen Abszisse und Ordinate zu benutzen, sondern nur die Entstehung der Konchoide, wonach bei einer beliebigen Geraden *FB* das Stück *NB* immer gleich *AM* ist.

Zu dem Ende sei *AM=NB=a, FM=b, FB* oder *Fb=z, be=dz, Be=dy,* sei *NoBe,* so wird *FN=z-a, no=dz,* $NM=\sqrt{z^2-2az+a^2-b^2}$. Aus ΔNMF Non folgt *NM:MF =no:oN,* also $oN=\dfrac{bdz}{\sqrt{(z-a)^2-b^2}}$ und weil *FN:FB=No:Be,* wird $Be=\dfrac{bz\,dz}{(z-a)\sqrt{(z-a)^2-b^2}}=dy$. Ebenso aus *be:Be=bF:t* folgt $t=\dfrac{bz^2}{(z-a)\sqrt{(z-a)^2-b^2}}$ und sein Differential -*dt* (NB. es wird -*dt* genommen, weil *t* bei wachsendem *z* abnimmt und daher sein Differential eine negative Größe ist)

$$=\frac{-2abz^3dz^3+4a^2bz^2dz^3-b^3z^2dz^3-2a^3bzdz^3+2ab^3zdz^3}{\left[(z-a)^2-b^2\right]^{\frac{3}{2}}(z-a)^2}.$$

Die allgemeine Gleichung $dy^3=dz^2dt$ wird daher verwandelt in:

$$\frac{b^3z^3dz^3}{\sqrt{\left[(z-a)-b^2\right]^3\cdot(z-a)^3}}$$

$$=\frac{2abz^3dz^3-4a^2bz^2dz^3+b^3z^2dz^3+2a^3bzdz^3+2ab^3zdz^3}{(z-a)^2\left[\sqrt{(z-a)^2-b^2}\right]^3}$$

Nach Multiplikation der Gleichung mit $\left\{(z-a)\sqrt{(z-a)^2-b^2}\right\}^3$ und Division durch $bz\,dz^3$ ergibt sich:

$$2az^3-6a^2z^2+6a^3z-3ab^2z-2a^4+2a^2b^2=0.$$

Ist *a=b*, so entsteht

$$2z^2-6az+3a^2=0 \qquad \text{und} \qquad z=\frac{3}{2}a+\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=FB \qquad [48].$$