Johann Bernoulli

Postulate
über das Rechnen mit Differentialen
(1691/92)

Quelle: Schafheitlin, Paul (Hrsg.): Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92.Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft. - Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. - 1924

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Postulate.

1. Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.
2. Jede krumme Linie besteht aus unendlich vielen Geraden, die selbst unendlich klein sind.
3. Eine Figur, die zwischen zwei Ordinaten, der Differenz derAbszissen und dem unendlich kleinen Stück einer beliebigen Kurve enthalten ist, wird als Parallelogramm betrachtet [[12]].

Über Addition und Subtraktion der Differentiale.

Regel 1. Das Differential einer Summe ist die Summe der Differentiale jedes einzelnen Summanden.

Zum Beispiel: Das Differential von $x+y$ ist $dx+dy$. Es sei nämlich $e = dx$ gleich dem Differential der Variablen x und $f=dy$ gleich dem der Variablen y. Werden die Minuenden $x+e$ und $y+f$ addiert, so wird deren Summe $x+y+e+f$; wird davon die Summe der Subtrahenden $x+y$ abgezogen, so bleibt die Differenz $e+f= dx + dy$ Q. E. D.

Das Differential der Größe $a+x$ ist dx, wenn a eine Konstante bedeutet, wie wir hier und im folgenden annehmen. Nämlich wird $a+0$ und $x+e$ addiert, so wird die Summe $a+x+e$; wird davon der Subtrahend $a+x$ abgezogen, so wird der Rest $e=dx$. Q. E. D.

Was von Summanden gesagt worden ist, kann auch mit sinngemäßer Änderung auf Größen angewendet werden, die voneinander abgezogen werden.

Über die Differentiale von Produkten.

Das Differential von ax ist dx. Das wird so bewiesen: Man multipliziere $x+e$, worin $e=dx$ sei, mit $a+0$, d. h. a und nichts, weil a eine Konstante ist, die kein Differential besitzt, so entsteht das
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Produkt *ax+ae;* wird hiervon *ax* abgezogen, so bleibt *ae=a dx. Q.* E. D.

Das Differential von x^2 ist *2x dx*, was so bewiesen wird [13]: Multipliziert man *x+e* mit *x+e*, so wird das Produkt $x^2+2ex+e^2$ .Wird davon x^3 abgezogen, so bleibt $2ex+x^2$ und dies ist wegen des ersten Postulates gleich $2ex=2xdx$. *Q.* E. D.

Das Differential von x^3 ist $3x^2dx$. Multipliziert man *x+e, x+e, x+e, so* wird das Produkt $x^3+3ex^2+3e^2x+e^3$, nach Subtraktion von x^3 bleibt $3ex^2+3e^2x+e^3$ nach dem ersten Postulat gleich $3ex^2=3x^2dx$. Ebenso wird bewiesen, daß x^4 das Differential $4x^3dx$ und x^5 das Differential $5x^4dx$ und x^6 das Differential $6x^5dx$ *usw.* hat.

Hieraus kann folgende allgemeine Regel gewonnen werden:

Rege1 *2:* Das Differential einer Potenz mit beliebigem Exponenten ist das Produkt aus derselben Potenz mit einem um eine Einheit geringeren Exponenten und dem mit dem Exponenten vervielfachten Differential der Grundgröße oder, wenn es besser gefällt, die Regel in Zeichen auszudrücken:

$$d(x^p)=px^{p-1}dx.$$

Das Differential der Größe *xy* ist *x dy+y dx.* Multipliziert man *x+e* mit *y+f* (wobei *e=dx* und *f= dy*), so ist das Produkt *xy+ey +fx+ef,* nach Abzug von *xy* bleibt *ey+fx+ef* nach Postulat1 gleich *ey+fx=y dx+x dy. Q.* E.D.

Das Differential von *xyz=xy dz+zx dy+zy dx.* Multipliziert man *x+e, y+f, z+g,* wobei *g=dz, so* wird das Produkt *xyz+zye+zxf+xyg+zef+yeg+xfg+gef,* nach Abzug von *zxy* bleibt *zye+zxf+xyg+zef+yeg+xfg+gef* nach Postulat l: *zye+zxf+xyg= zy dx+zx dy +xy dz.* Ebenso wird gezeigt, daß das Differential von *xyzu* ist *xyz du+xyu dz+xzu dy+yzu dx* usw.

Hieraus kann auch gebildet werden:

Rege1 3. Das Differential des Produktes mehrerer Größen ist gleich der Summe der Produkte des Differentials irgend einer derselben und dem Produkte der übrigen.

Über die Differentiale der Brüche.

Das Differential der Größe $\frac{1}{x}$ ist $\frac{-dx}{x^2}$. Das wird so gezeigt: Man subtrahiere $\frac{1}{x}$ von $\frac{1+0}{x+e}$, dann wird der Rest $\frac{-e}{x^2+ex}$ nach Postulat 1 $\frac{-e}{x^2}=\frac{-dx}{x^2}$.Q. E. D. Oder auch: Man setze $\frac{1}{x}=z$, so wird $1=xy$, und nachdem beiderseits das Differential genommen worden ist (weil 1 kein Differential hat)

$0 = x\,dz + zdx$ und $dz = \frac{-zdx}{x} = \frac{-dx}{x^2}$ Q. E. D.

$d\left(\frac{x^2}{a}\right) = \frac{2xdx}{a}$. Der Beweis ist dem vorigen ähnlich.

$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ Subtrahiert man $\frac{x}{y}$ von $\frac{x+e}{y+f}$, so bleibt $\frac{ey - fx}{y^2 + fy}$ = (nach Postulat 1) $\frac{ey - fx}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$. Q.E.D.

Oder es sei $\frac{x}{y} = z$, so wird $x = yz$ und $dx = y\ dz + z\ dy = ydz + \frac{x}{y}dy$ und $dx - \frac{x}{y}dy = ydz$ und $\frac{ydx - xdy}{y^2} = dz$. Q.E.D.

Hieraus wieder wird die Regel gebildet:

Regel 4. Das Differential jedes Bruches ist das Produkt des Nenners mit dem Differential des Zählers vermindert um das Produkt des Zählers mit dem Differential des Nenners geteilt durch das Quadrat des Nenners [14].

So wie $d\left(\frac{x}{a+x}\right) = \frac{adx}{a^2 + 2ax + x^2}$, so ist

$$d\left(\frac{xy + yz}{u+t}\right) = \frac{adx}{a^2 + 2ax + x^2} = uxdy + uydx - xydu + uzdy + tydx - yzdu + \frac{txdy + uydz - xydt + tzdy + tydz - yzdt}{u^2 + 2ut + t^2}$$

und

$$d\left(\frac{x-y}{u-t}\right) = \frac{udx - tdx - udy + tdy - xdu + ydu + xdt - ydt}{u^2 - 2ut + t^2}.$$

Über die Differentiale von Wurzelgrößen.

Die Differentiale von Größen, die unter irgendeinem Wurzelzeichen enthalten sind, werden so gefunden. Es sei z. B. die Größe $\sqrt{ax + x^2}$ gegeben, die ich z nenne, so wird: $ax + x^2 = z^2$ und $adx + 2xdx = 2zdz = 2\,dz\sqrt{ax + x^2}$ also:

$$\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + x^2}} = dz = d\left(\sqrt{ax + x^2}\right).$$

Ebenso wird $d\left(\sqrt[3]{ax + x^2}\right)$ gefunden, das $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{(ax + x^2)^2}}$ ist.

Entsprechend auch $d\left(\sqrt[4]{yx + x^2}\right) = \frac{ydx + xdy + 2xdx}{4\sqrt[4]{(yx + x^2)^3}}$ und

$$d\sqrt[5]{ayx+x^3+zyx}$$
$$=\frac{ay\,dx+3x^2dx+yz\,dx+ax\,dy+zx\,dy+xy\,dz}{5\sqrt[5]{\left(ayx+x^3+zyx\right)^4}}$$

Dieselben Differentiale werden auf andere Weise durch eine Reihe gefunden, worin die Glieder selbst in geometrischer, die Exponenten in arithmetischer Proportion folgen: x^4, x^3, x^2, x^1, $x^0=1$, $x^{-1}=\frac{1}{x}$, $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, $x^{-3}=\frac{1}{x^3}$, $x^{-4}=\frac{1}{x^4}$ usw.

Z. B. Um das Differential von $\sqrt{ax+x^2}$ finden, betrachte ich die Größe $ax+x^2$ als x und erhebe sie zur Potenz $\frac{1}{2}$ und dies ist die mittlere Proportionale zwischen x^1 und $x^0=1$. Aus der zweiten Regel finde ich deren Differential, das ist:

$$\frac{1}{2}(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}(adx+2x\,dx)=\frac{adx+2x\,dx}{2\sqrt{ax+x^2}}.$$

Es ist nämlich x zur Potenz $-\frac{1}{2}$ erhoben die mittlere Proportionale zwischen $x^0=1$ und $x^{-1}=\frac{1}{x}$. Deshalb ist $x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$; ganz entsprechend $\left(ax+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{ax+x^2}}$. Davon die Hälfte mit *a dx+2x dx* multipliziert gibt $\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+x^2}}$ und das ist das Differential von $\sqrt{ax+x^2}$.

Um ebenso das Differential von $\sqrt[3]{ax+y^2}$ zu finden, betrachte ich dies als $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ und dies ist die erste der beiden mittleren Proportionalen zwischen $x^0=1$ und x^1 und ich finde das Differential nach Regel 2:

$$\frac{1}{3}(ax+y^2)^{-\frac{2}{3}}(adx+2ydy)=\frac{adx+2ydy}{3\sqrt[3]{\left(ax+y^2\right)^2}}.$$

Durch Analogie wird ferner das Differential der übrigen Wurzelgrößen gefunden. Z. B.: $d(\sqrt[3]{x^3})=dx$, was erhalten werden kann, indem man $3x^2dx$, das Differential seines Kubus, durch $3x^2$, das Dreifache des Quadrats der Grundgröße, dividiert. Ebenso $d(\sqrt{x^2})=dx$ was erhalten werden kann, indem man das Differential *2x dx* von x^2 durch *2x*, das Doppelte der Grundgröße, dividiert. $d(\sqrt[4]{x^4})=dx$, was erhalten wird, indem man das Differential $4x^3dx$

durch $4x^3$, das Vierfache des Kubus der Grundgröße, dividiert. So $d(\sqrt[5]{x^5}) = dx$, was man erhält, indem man das Differential $5x^4dx$ durch das Fünffache des Biquadrats der Grundgröße dividiert usw.
Zur Auffindung der Differentiale von Wurzeln kann dies zur Regel dienen. So kann ich z. B. das Differential von $\sqrt[5]{x}$ finden, indem ich das Differential dx des Radikanten zweiffellos dividiere durch das Fünffache des Biquadrats von $\sqrt[5]{x}$, das $\frac{dx}{5\sqrt[5]{x^4}}$ wird. Ebenso ist $d(\sqrt[4]{x}) = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}$ und $d(\sqrt[3]{x}) = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ und $d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Aus dem Vorhergehenden kann folgende Regel abgeleitet werden zur Berechnung des Differentials irgendeiner Wurzel nämlich:

Regel 5. Teile das Differential des Radikanden durch die Wurzel, welche zu der Potenz erhoben wird, die um eins geringer als der Wurzelexponent ist und multipliziere die Wurzel mit dem Wurzelexponenten, so wird der Quotient das gesuchte Differential sein.

Durch Buchstaben kann die Regel so ausgedrückt werden:

$$d\left(\sqrt[p]{x}\right) = \frac{dx}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}}$$ [16].

Zum Beispiel:

$$d\left(\sqrt{ax+x^2}\right) = \frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+x^2}};\ d\left(\sqrt[3]{ax+x^2}\right) = \frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{(ax+x^2)^2}}.$$

Um das Differential von $\frac{\sqrt[3]{ax+x^2}}{\sqrt{yx+y^2}}$ zu finden, berechne man das Differential $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{(ax+x^2)^2}}$ des Zählers und das des Nenners $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{yx+y^2}}$ nach Regel 5; dann wird nach Regel 4:

$$\frac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{(ax+x^2)^2}}\cdot\sqrt{xy+y^2} - \frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+y^2}}\sqrt{ax+x^2}}{xy+y^2} = d\,\frac{\sqrt[3]{ax+x^2}}{\sqrt{yx+y^2}}$$

[17]

$$d\sqrt{ax+x^2+\sqrt{a^2y+y^3}} = \frac{(2adx+4xdx)\sqrt{a^2y+y^3}+a^2dy+3y^2dy}{2\sqrt{ax+x^2+\sqrt{a^2y+y^3}}\cdot 2\sqrt{a^2y+y^3}}.$$