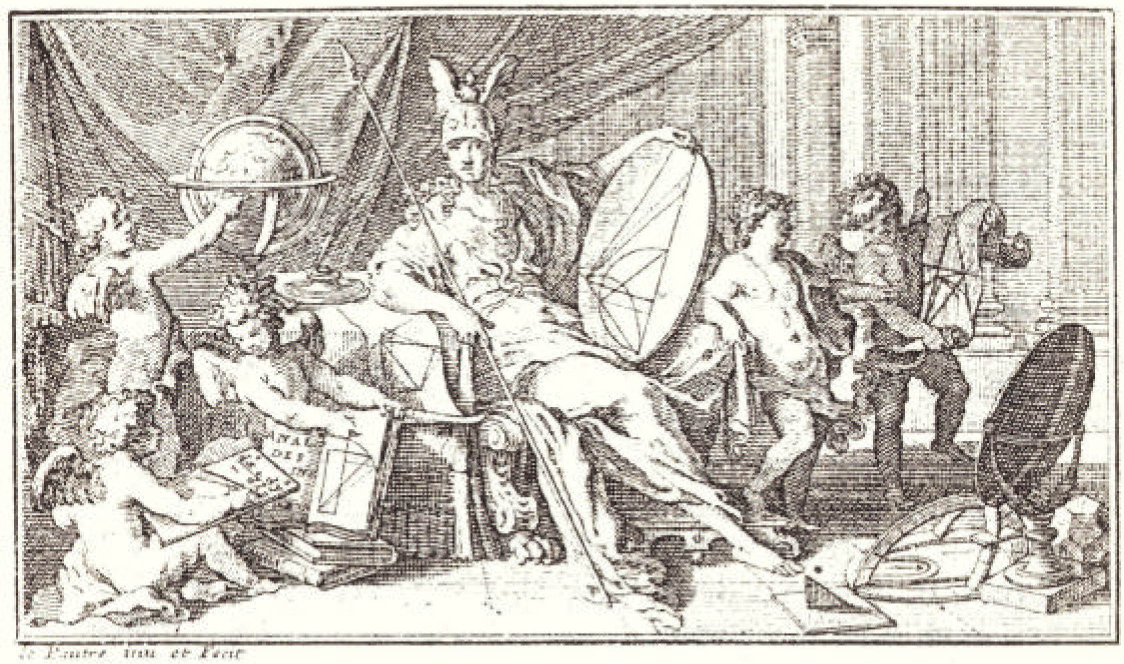
Marquis Guillaume Francois Antoine de l'Hospital

Analyse des Infiniment Petits
(1696)

Quelle : Marquis de l'Hospital: Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes. - Nachdruck d. Ausg. Paris 1696 u. 1725. - Paris: ACL-Editions , 1988



Die Analyse der unendlich Kleinen

Erster Teil

Von der Differenzrechnung

Erster Abschnitt

Wo die Regeln dieses Kalküls dargelegt werden

Definition I

Als variable Größen bezeichnet man jene, die kontinuierlich zunehmen oder abnehmen; und als konstante Größen dagegen jene, die bei Veränderungen der anderen gleichbleiben. So bilden bei einer Parabel die Ordinaten und die Abszissen variable Größen, während der Parameter eine konstante Größe ist.

Definition II

Der unendlich kleine Teil, um die eine variable Größe kontinuierlich zunimmt oder abnimmt, wird als *Differenz* bezeichnet. Gegeben sei zum Beispiel eine beliebige Kurve *AMB*[1], die die Linie *AC* als Achse oder Durchmesser, die Gerade *PM* als eine ihrer Ordinaten hat, und gegeben sei eine andere Ordinate *pm*, die unendlich nahe der ersten liegt. Wenn man daraufhin *MR* parallel zu *AC* legt, die Sehnen *AM*, *Am* konstruiert und wenn man um den Mittelpunkt *A* mit dem Radius *AM* den kleinen Kreisbogen *MS* beschreibt, dann ist *Pp* die Differenz von *AP*, *Rm* die Differenz von *PM*, *Sm* die Differenz von *AM* und *Mm* die des Bogens *AM.* Desgleichen ist das kleine Dreieck *MAm*, das den Bogen *Mm* zur Grundlinie hat, die Differenz des Segments *AM;* und die kleine Fläche *MPpm* die Differenz der durch die Geraden *AP*, *PM* und durch den Bogen *AM* umschlossenen Fläche.

Corollar

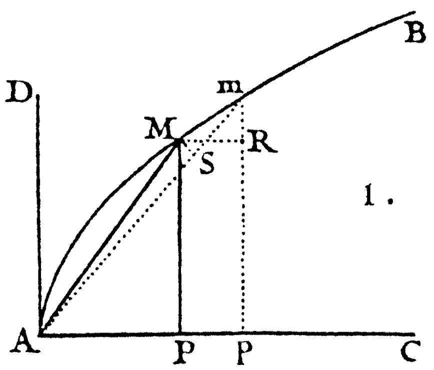
1. Es ist evident, daß die Differenz einer konstanten Größe Null ist; oder (was das gleiche ist), daß konstante Größen keine Differenz haben.

Vorbemerkung

Im folgenden werden wir uns der Notierung oder Charakterisik d *bedienen, um die Differenz einer variablen Größe zu bezeichnen, die mit einem einzelnen Buchstaben ausgedrückt wird; um Verwirrung zu vermeiden, wird diese Notierung* d *in der Folge dieses Kalküls für nichts anderes verwendet werden. Wenn man zum Beispiel die Variablen* AP, x; PM, y; AM, z *setzt, den Bogen* AM, u; *die gemischtlinige Fläche* APM, s; *und das Segment* AM, t *benennt, drückt* dx *den Wert von* Pp, dy *den von* Rm, dz *den von* Sm, du *den des kleinen Bogens* Mm, ds *den der kleinen Fläche* MPpm, *und* dt *den Wert des kleines gemischtlinigen Dreiecks* MAm *aus.*

---

[1] Figur 1



I. Forderung oder Annahme

2. Man fordert, daß man beliebig zwei Größen füreinander nehmen kann, die sich voneinander nur durch eine unendlich kleine Größe unterscheiden: oder (was auf dasselbe hinausläuft), daß eine Größe, die nur durch eine andere unendlich viel kleinere Größe vermehrt oder vermindert wird, als gleich geblieben angesehen werden kann. Man fordert zum Beispiel, daß man *Ap* für *AP*, *pm* für *PM*, die Fläche *Apm* für die Fläche *APM*, die kleine Fläche *MPpm* für das kleine Dreieck *MPpR*, den kleinen Sektor *AMm* für das kleine Dreieck *AMS*, den Winkel *pAm* für den Winkel *PAM* nehmen kann usw.

II. Forderung oder Annahme

3. Man fordert, daß eine Kurve als aus einer unendlichen Zahl von jeweils unendlich kleinen Geraden zusammengesetzt angesehen werden kann: oder (was auf dasselbe hinausläuft), als ein Polygon mit einer unendlichen Anzahl von unendlich kleinen Seiten, die die Krümmung der Kurve durch die Winkel bestimmen, die sie miteinander bilden. Man fordert zum Beispiel, daß der Teil der Kurve *Mm* und der Kreisbogen *MS* infolge ihrer unendlichen Kleinheit als Geraden betrachtet werden können, so daß das kleine Dreieck *mSM* als geradlinig angesehen werden kann.

Vorbemerkung

In der Folge gehen wir gewöhnlich davon aus, daß die letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z *etc. variable Größen bezeichnen; und daß dagegen die ersten Buchstaben* a, b, c, *etc. konstante Größen bezeichnen: so daß* x *zu* x + dx *wird;* y, z, *etc. zu* y + dy, z + dz, *etc. werden.*[2] *Und* a, b, c *etc. die gleichen* a, b, c *etc. bleiben.*

Proposition I

Problem

4. *Es sollen die Differenzen einer Größe gebildet werden, die sich aus der Addition oder Subtraktion mehrerer Größen ergibt.*

Gegeben sei $a + x + y - z$, wovon die Differenz gebildet werden soll. Wenn man annimmt, daß x um einen unendlich kleinen Teil vermehrt wird; das heißt, daß es $x + dx$ wird; dann wird y zu $y + dy$, und z zu $z + dz$; die Konstante a[3] bleibt jedoch das gleich a: so daß die vorgeschlagene Größe $a + x + y - z$ zu $a + x + dx + y + dy - z - dz$ wird; und ihre Differenz, die man findet, indem man sie von letzterer abzieht, ist dann $dx + dy - dz$. Dasselbe gilt für die anderen, was folgende Regel ergibt.

---

[2] Art. 1

[3] Art. 1

Regel I

für die addierten oder subtrahierten Größen

Man nimmt die Differenz jedes Terms der betreffenden Größe und bildet daraus unter Beibehaltung der Vorzeichen, eine andere Größe, die die gesuchte Differenz ist.

Proposition II

Problem

5. *Es soll die Differenz eines Produktes gebildet werden, das aus verschiedenen, miteinander multiplizierten Größen besteht.*

1) Die Differenz von xy ist $ydx + xdy$. Denn y wird zu $y + dy$, wenn x zu $x + dx$ wird, und dadurch wird xy dann zu $xy + ydx + xdy + dxdy$, was das Produkt von $x + dx$ mal $y + dy$ ist, und seine Differenz ist dann $ydx + xdy + dxdy$, das heißt[4] $ydx + xdy$: weil $dxdy$ im Vergleich zu den anderen Ausdrücken ydx und xdy eine unendlich kleine Größe ist; denn wenn man zum Beispiel ydx und $dxdy$ durch dx teilt, erhält man einerseits y und andererseits dy, was die Differenz davon ist, und daher unendlich kleiner als erstere ist, woraus sich ergibt, daß die Differenz des Produkts zweier Größen gleich der Summe des Produkt der Differenz der ersten dieser Größen mal der zweiten und dem Produkt der Differenz der zweiten mal der ersten ist.

2) Die Differenz von xyz ist $yzdx + xzdy + xydz$. Denn wenn man das Produkt xy als eine einzige Größe betrachtet, muß man, wie eben nachgewiesen, das Produkt seiner Differenz $ydx + xdy$ mal der zweiten z nehmen (was $yzdx + xzdy$ ergibt) plus dem Produkt der Differenz dz der zweiten z durch die erste xy (was $xydz$ ergibt) und dadurch wird die Differenz von xyz zu $yzdx + xzdy + xydz$.

3) Die Differenz von $xyzu$ ist $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Was, wie im vorstehenden Fall zu beweisen ist, wenn man das Produkt xyz als einzelne Größe betrachtet. Dasselbe gilt für alle anderen bis ins unendliche, woraus folgende Regel gebildet wird.

Regel II

Für multiplizierte Größen

Die Differenz des Produkts aus mehreren miteinander multiplizierten Größen ist gleich der Summe der Produkte der Differenzen jeder dieser Größen mal dem Produkt der anderen.

Die Differenz von ax ist demnach $xo + adx$, das heißt adx. Die von $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ ist $bdx - ydx - ady - xdy$.

Proposition III

Problem

6. *Es soll die Differenz eines beliebigen Bruches gebildet werden.*

Die Differenz von $\frac{x}{y}$ ist $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Denn wenn man annimmt, daß $\frac{x}{y} = z$ ist, dann erhält man $x = yz$, und da die beiden variablen Größen x und yz immer untereinander gleich sein müssen, ob sie nun zunehmen oder abnehmen, ergibt sich, daß ihre Differenz, das heißt, ihre Zuwächse oder Abnahmen, ebenfalls untereinander gleich sind; und deswegen[5] erhält

[4] Art. 2

[5] Art.5

man $dx = ydz + zdy$, und $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$, indem man für z seinen Wert $\frac{x}{y}$ setzt. Was zu beweisen war etc., woraus sich folgende Regel ergibt.

Regel III

Für geteilte Größen oder für Brüche

Die Differenz eines beliebigen Bruchs ist gleich dem Produkt aus der Differenz des Zählers und dem Nenner minus dem Produkt aus der Differenz des Nenners und dem Zähler: Das ganze wird durch das Quadrat des Nenners geteilt.

Die Differenz von $\frac{a}{x}$ ist demnach $\frac{-adx}{xx}$, die von $\frac{x}{a+x}$ demnach $\frac{adx}{aa + 2ax + xx}$.

Proposition IV

Problem

7. *Die Differenz einer beliebigen vollkommenen oder unvollkommenen Potenz einer variablen Größe nehmen.*

Um eine allgemeine Regel für die vollkommenen und unvollkommenen Potenzen geben zu können, ist es notwendig, die Analogie zu erklären, die zwischen ihren Exponenten anzutreffen ist.

Nimmt man eine geometrische Reihe, deren erster Ausdruck eins und der zweite eine beliebige Größe x ist, und schreibt unter jeden Ausdruck seinen Exponenten, ist klar, daß diese Exponenten, eine arithmetische Reihe bilden.

Geometrische Reihe $1,\ x,\ xx,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6,\ x^7$, usw.

Arithmetische Reihe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, usw.

Und wenn man die geometrische Reihe unterhalb von 1 und die arithmetische Reihe unterhalb von Null fortsetzt, sind die Ausdrücke letzterer die Exponenten derer, denen sie in der anderen entsprechen. So ist -1 der Exponent von $\frac{1}{x}$, -2 der von $\frac{1}{xx}$ usw.

Geometrische Reihe $x,\ 1,\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{xx},\ \frac{1}{x^3},\ \frac{1}{x^4}$, usw.

Arithmetische Reihe 1, 0, -1, -2, -3, -4, usw.

Doch wenn man einen neuen Ausdruck in die geometrische Reihe einführt, muß man einen ähnlichen in die arithmetische Reihe einführen, um seinen Exponenten zu erhalten.

So hat $\sqrt{x}$ als Exponenten $\frac{1}{2}$: $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$: $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$: $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$: $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$: $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$, usw. so daß diese Ausdrücke $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ & $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ & $x^{-\frac{3}{2}}$, usw. nur dasselbe bedeuten.

Geom. Reihe $1,\ \sqrt{x},\ x.1, \sqrt[3]{x},\ \sqrt[3]{xx},\ x.1,\ \sqrt[5]{x},\ \sqrt[5]{xx},\ \sqrt[5]{x^3},\ \sqrt[5]{x^4},\ x..$

Arithm. Reihe $0,\ \frac{1}{2},\ 1.\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1.0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1..$

Geom. Reihe $\frac{1}{x},\ \frac{1}{\sqrt{x^3}},\ \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}},\ \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}},\ \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x^3},\ \frac{1}{\sqrt{x^7}},\ \frac{1}{x^4}.$

Arithm. Reihe $-1,\ -\frac{3}{2},\ -2.\ -1,\ -\frac{4}{3},\quad -\frac{5}{3},\ -2.\ -3, -\frac{7}{2},\ -4.$

Woraus man ersieht, daß genau wie $\sqrt{x}$ das geometrische Mittel zwischen 1 und x ist, auch $\frac{1}{2}$ das arithmetische Mittel zwischen deren Exponenten Null und 1 ist: und das $\sqrt[3]{x}$ desgleichen das erste der beiden geometrisch proportionalen Mittel zwischen 1 und x ist, auch desgleichen $\frac{1}{3}$ das erste der beiden arithmetisch proportionalen Mittel zwischen ihren Exponenten Null und 1 ist: usw. bei allen anderen. Woraus sich für die Natur dieser beiden Reihen ergibt:

1) Daß die Summe der Exponenten zweier beliebiger Ausdrücke der geometrischen Reihe der Exponent des Ausdrucks ist, der ihr Produkt ist. So ist x^{4+3} oder x^7 das Produkt von x^3 mit x^4 und $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ oder $x^{\frac{5}{6}}$ das Produkt aus $x^{\frac{1}{2}}$ und $x^{\frac{2}{3}}$, und $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ oder $x^{-\frac{2}{15}}$ das Produkt aus $x^{-\frac{1}{3}}$ mal $x^{\frac{1}{5}}$ usw. Desgleichen ist $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ oder $x^{\frac{2}{3}}$ das Produkt von $x^{\frac{1}{3}}$ mit sich selbst, das heißt sein Quadrat, und x^{+2+2+2} oder x^6 ist das Produkt von x^2 mal x^2 mal x^2, das heißt sein Kubik, und $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ oder $x^{-\frac{4}{3}}$ ist die vierte Potenz von $x^{-\frac{1}{3}}$, und so auch bei den anderen Potenzen. Woraus ersichtlich ist, daß das doppelte und dreifache usw. des Exponenten eines beliebigen Ausdrucks der geometrischen Reihe der Exponent des Quadrats, des Kubus usw. dieses Ausdrucks ist; und daß daher die Hälfte, das Drittel usw. des Exponenten eines beliebigen Ausdrucks der geometrischen Reihe der Exponent der Quadratwurzel, der Kubikwurzel usw. dieses Ausdrucks ist.

2) Daß die Differenz der Exponenten zweier beliebiger Ausdrücke der geometrischen Reihe der Exponent des Quotienten der Teilung dieser Ausdrücke ist. So ist $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ der Exponent des Quotienten der Teilung von $x^{\frac{1}{2}}$ durch $x^{\frac{1}{3}}$, und $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{11}}$ der Exponent des Quotienten der Teilung von $x^{-\frac{1}{3}}$ durch $x^{\frac{1}{4}}$; woraus ersichtlich wird, daß es dasgleiche ist, $x^{-\frac{1}{3}}$ mit $x^{-\frac{1}{4}}$ zu multiplizieren, wie $x^{-\frac{1}{3}}$ durch $x^{\frac{1}{4}}$ zu teilen. Dasgleiche gilt für andere. Nachdem dieses wohl verstanden ist, können zwei verschiedene Fälle eintreten.

Der erste Fall, wenn die Potenz vollkommen ist, das heißt, wenn ihr Exponent eine ganze Zahl ist. Die Differenz von *xx* ist *2xdx,* die von x^3 ist sie 3*xxdx,* die von x^4 ist sie $4x^3dx$, usw. Weil das Quadrat von x nichts anderes ist als das Produkt von *x* mal *x,* ist seine Differenz[6] *xdx* + *xdx,* das heißt 2*xdx.* Da der Kubus von x desgleichen nichts anderes ist als das Produkt von *x* mal *x* mal *x,* ist seine Differenz *xxdx* + *xxdx* + *xxdx,* das heißt 3*xxdx,* und da das bei allen anderen Potenzen bis zum Unendlichen so ist, folgt daraus, daß bei Benennung einer beliebigen ganzen Zahl mit m die Differenz von x^m gleich $mx^{m-1}dx$ ist.

Wenn der Exponent negativ ist, wird man feststellen, daß die Differenz von x^{-m} oder von $\frac{1}{x^m}$ gleich $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$ ist.

---

[6] Art. 5

Der zweite Fall tritt ein, wenn die Potenz unvollkommen ist, das heißt, wenn ihr Exponent ein Bruch ist. Wenn die Differenz von $\sqrt[n]{x^m}$ oder $x^{\frac{m}{n}}$ genommen werden soll (wobei $\frac{m}{n}$ einen beliebigen Bruch ausdrückt), nimmt man $x^{\frac{m}{n}} = z$ an und erhält, wenn man jedes Glied der n-ten Potenz erhebt, $x^m = z^n$, und wenn man die Differenzen, wie im ersten Fall erläutert, zieht, findet man $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, und $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$, oder $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, indem man an die Stelle von nz^{n-1} seinen Wert $nx^{m-\frac{m}{n}}$ setzt. Wenn der Exponent negativ ist, wird man finden, daß die Differenz von $x^{-\frac{m}{n}}$ oder von $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ gleich $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$ ist. Woraus sich die folgende allgemeine Regel ergibt.

Regel IV

Für vollkommene oder unvollkommene Potenzen

Die Differenz einer beliebigen vollkommenen oder unvollkommenen Potenz einer variablen Größe ist gleich dem Produkt des Exponenten dieser Potenz mit derselben auf eine Potenz minus einer Einheit erhobenen Größe multipliziert mit deren Differenz.
Wenn man also annimmt, daß m eine beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ausdrückt, und x eine beliebige variable Größe, so ist die Differenz von x^m stets $mx^{m-1}dx$.

Beispiele

Die Differenz des Kubiks von *ay* - *xx*, das heißt von $\overline{ay - xx}^3$ ist $3 \times \overline{ay - xx}^2 \times \overline{ady - 2xdx} = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$

Die Differenz von $\sqrt{xy + yy}$ oder von $\overline{xy + yy}^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1}{2} \times \overline{xy + yy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ydx + xdy + 2ydy}$, oder $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$.

Die Differenz von $\sqrt{a^4 + axyy}$ oder $\overline{a^4 + axyy}^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1}{2} \times \overline{a^4 + axyy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ayydx + 2axydy}$, oder $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$.

Die Differenz von $\sqrt[3]{ax+xx}$ oder von $\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$ ist $\frac{1}{3}\times\overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}}\times\overline{adx+2xdx}$ oder $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^{2}}}$.

Die Differenz von $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$ oder von $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1}{2}\times\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{-\frac{1}{2}} \quad \times\overline{adx+2xdx+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}}$, oder $\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}.\ +\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}\times 2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$.

Die Differenz von $\frac{\sqrt{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ ist nach dieser Regel[7] der Bruch

$$\frac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^{2}}}\times\sqrt{xy+yy}\,\frac{-ydx-xdy-2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}\times\sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}.$$

Bemerkung

8. Es ist die Bemerkung angebracht, daß man beim Bestimmen der Differenzen immer angenommen hat, daß bei Zunahme einer der Variablen x, die anderen y, z, usw. ebenfalls zunehmen; das heißt, daß wenn die x zu $x + dx$ werden, die y, z, usw. zu $y + dy$, $z + dz$, usw. werden. Wenn es also vorkommt, daß manche abnehmen, während die anderen zunehmen, muß man deren Differenzen folglich als negative Größen im Vergleich zu denen betrachten, die als wachsend angenommen sind, und infolgedessen Vorzeichen der Ausdrücke ändern, wo man abnehmende Differenzen antrifft. So wenn man die x als zunehmend und die y und z als abnehmend annimmt, das heißt, daß die x zu $x + dx$, und die y und z zu $y - dy$ und $z - dz$ werden und man die Differenz des Produkts xyz ziehen will, müssen in der gefundenen Differenz $xydz + xzdy + yzdx$[8], die Vorzeichen der Ausdrücke geändert werden, wo man dy und dz antrifft: was $yzdx - xydz - xzdy$ für die gesuchte Differenz ergibt.

7 Art. 7.6.

8 Art. 5