Marquis Guillaume Francois Antoine de l'Hospital

Analyse des Infiniment Petits
(1696)

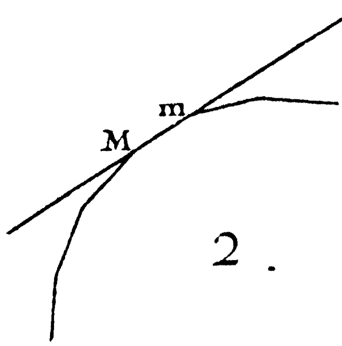
Quelle : Marquis de l'Hospital: Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes. - Nachdruck d. Ausg. Paris 1696 u. 1725. - Paris: ACL-Editions , 1988

Zweiter Abschnitt

Verwendung des Kalküls der Differenzen, um die Tangenten aller möglichen Arten von gekrümmten Linien zu finden

Definition

Wenn man eine der kurzen Seiten *Mm* des Polygons verlängert, das eine gekrümmte Linie bildet[1], soll die so verlängerte kurze Seite als *Tangente* der Kurve im Punkt *M* oder *m* bezeichnet werden (Fig.2).



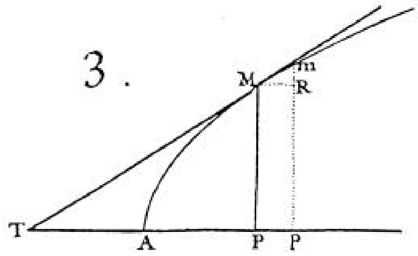
Proposition I
Problem

9. Gegeben sei eine gekrümmte Linie AM *von der Art, daß das Verhältnis des Abschnitts* AP *zur Ordinaten* PM *durch eine beliebige Gleichung ausgedrückt wird*

---

1 Art. 3.

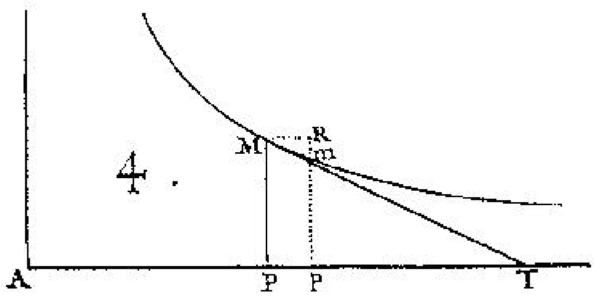
und es soll im gegebenen Punkt M *auf diese Kurve die Tangente* MT *angelegt werden. (Fig. 3)*



Nachdem man die Ordinate *MP* gezogen hat und annimmt, daß die Gerade *MT*, die den Durchmesser im Punkt *T* trifft, die gesuchte Tangente ist, stellt man sich eine weitere Ordinate *mp* unendlich nahe zur ersten vor, mit einer kleinen Geraden *MR* parallel zu *AP*. Und wenn man *AP* mit *x* und *PM* mit *y* bezeichnet (also *Pp* oder *MR* = *dx*, & *Rm* = *dy*.), ergeben die ähnlichen Dreiecke *mRM* & *MPT* folgende Beziehung: $mR(dy).\ RM(dx) :: MP\ (y).PT = \frac{ydx}{dy}$. Folglich findet man mittels der Differenz der gegebenen Gleichung einen Wert von *dx* in Ausdrücken, die alle *dy* enthalten, welche mit *y* multipliziert und durch *dy* geteilt einen Wert der Subtangente *PT* in vollständig bekannten und von den Differenzen befreiten Ausdrücken ergibt, welcher dazu dient, die gesuchte Tangente *MT* anzulegen.

Bemerkung

10. Wenn der Punkt *T* auf der entgegengesetzten Seite des Punktes *A* relativ zu *x* fällt, dann ist klar, daß *y* bei zunehmendem *x* abnimmt (Fig. 4)



und daß infolgedessen[2] in der Differenz der gegebenen Gleichung die Vorzeichen aller Ausdrücke geändert werden müssen, in denen *dy* vorkommt: sonst wäre der Wert von *dx* in *dy* negativ; und daher auch der von *PT* $(\frac{ydx}{dy})$. Um n[3]icht in

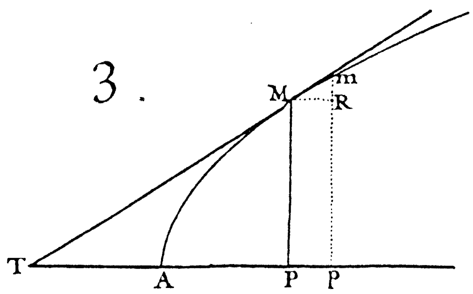
[2] Art. 8.

[3]

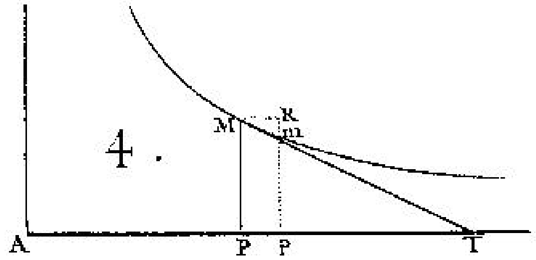
Schwierigkeiten zu kommen, ist es indessen besser, immer die Differenz der gegebenen Gleichung nach den vorgegebenen Regeln zu nehmen[4], ohne etwas daran zu ändern; denn wenn sich nach Ende der Operation ergibt, daß der Wert von *PT* positiv ist, so folgt daraus, daß der Punkt *T* auf derselben Seite wie der Punkt *A* relativ zu *x* genommen werden muß, wie beim Anstellen dieser Berechnungen angenommen worden ist; und wenn er dagegen negativ ist, muß man ihn auf der entgegengesetzten Seite annehmen. Das wird durch die folgenden Beispiele deutlich werden.

Beispiel I

11. 1) Wenn man möchte, daß $ax = yy$ die Relation von *AP* zu *PM* ausdrückt, ist die Kurve *AM* eine Parabel, die als Parameter die gegebene Gerade *a* hat, und man erhält sie, indem man beiderseits die Differenzen $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2yy}{a} = 2x$ nimmt, indem man für yy seinen Wert ax einsetzt. Woraus folgt, daß wenn man *PT* doppelt so groß wie *AP* nimmt, und die Gerade *MT* zieht, diese die Tangente im Punkt *M* wird. Was zu beweisen war. (Fig. 3)



2) Gegeben sei die Gleichung $aa = xy$, die die Natur der Hyperbel zwischen den Asymptoten ausdrückt. Man erhält, wenn man die Differenzen $xdy + ydx = 0$ nimmt, und von dort $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = -x$. Woraus sich ergibt, daß, wenn man $PT = PA$ auf der entgegengesetzten Seite von *A* nimmt und die Gerade *MT* zieht, diese die Tangente in *M sein* wird. (Fig. 4)



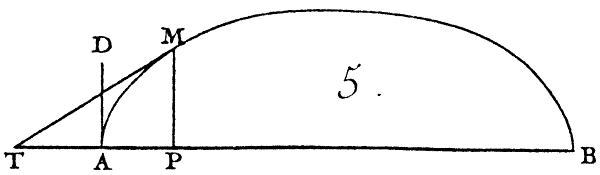
4 Sect. 1.

3) Gegeben sei die allgemeine Gleichung $y^m = x$, die die Natur aller Parabeln bis zum Unendlichen ausdrückt, wenn der Exponent *m* eine ganze oder gebrochene positive Zahl bezeichnet, und alle Hyperbeln, wenn er eine negative Zahl bezeichnet. Durch Bilden der Differenzen erhält man $my^{m-1}dy = dx$, und von dort $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = my^m = mx$, wenn man für y^m seinen Wert *x* einsetzt.

Wenn $m = \frac{3}{2}$ ist, wird die Gleichung $y^3 = axx$, was die Natur einer der kubischen Parabeln ausdrückt, und die Subtangente $PT = \frac{3}{2}x$. Wenn $m = -2$ ist, wird die Gleichung $a^3 = xyy$, was die Natur einer der kubischen Hyperbeln ausdrückt, und die Subtangente $PT = -2x$. Dasselbe gilt auch für die anderen. Um bei den Parabeln die Tangente im Ursprungspunkt *A* der *x* anzulegen, muß man suchen, was das Verhältnis von *dx* zu *dy* in diesem Punkt sein muß; denn es ist ersichtlich, daß, soweit dieses Verhältnis bekannt ist, auch der Winkel bekannt ist, den die Tangente mit der Achse oder mit dem Durchmesser bildet. In diesem Beispiel hat man $dx.dy :: my^{m-1}.1$. Woraus ersichtlich ist, daß da *y* in *A* Null ist, das Verhältnis von *dy* zu *dx* unendlich groß sein muß, wenn *m* größer als 1 ist, und unendlich klein, wenn *m* kleiner als 1 ist: Das heißt, daß die Tangente in *A* im ersten Fall parallel zu den Ordinaten läuft und im zweiten Fall mit dem Durchmesser übereinstimmt.

Beispiel II

12. Gegeben sei eine Kurve *AMB* (Fig. 5) von der Art, daß $AP \times PB(x \times \overline{a-x}).\overline{PM}^2(yy) :: AB(a).AD(b)$.

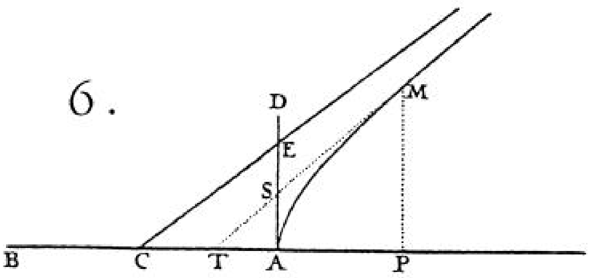


Daher ist $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, und wenn man die Differenzen nimmt $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, woraus man $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2ayy}{ab-2bx} = \frac{2ax-2xx}{a-2x}$ zieht, und indem man für $\frac{ayy}{b}$ seinen Wert $ax - xx$; & $PT - AP$ oder $AT = \frac{ax}{a-2x}$.

Wenn wir einmal annehmen, daß $\overline{AP}^3 \times \overline{PB}^2 (x^3 \times \overline{a-x}^2).\overline{PM}^5 (y^5) :: AB(a).AD(b)$, erhält man $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a-x}^2$ und indem man die Differenzen nimmt $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2adx+2xdx} \times x^3$, woraus man $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a-x}^2}{3xx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2a+2x} \times x^3} = \frac{5x \times a - x}{3a-3x-2x}$ zieht oder $\frac{5ax-5xx}{3a-5x}$ & $AT = \frac{2ax}{3a-5x}$.

Und allgemein, wenn man will, daß *m* den Exponenten der Potenz *AP* bezeichnet, und *n* den der Potenz von *PB*, erhält man $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$, was eine allgemeine Gleichung für alle Ellipsen bis zum Unendlichen ist, deren Differenz $\frac{\overline{m+n}ay^{m+n-t}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m$ beträgt, aus der man (indem man für $\frac{ay^{m+n}}{b}$ seinen Wert $x^m \times \overline{a-x}^n$ einsetzt) $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{\overline{m+n}x^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1} \times x^m} = \frac{\overline{m+n}x \times \overline{a-x}}{m\overline{a-x} - nx}$ oder $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma - \overline{m-n}x}$, & $AT = \frac{nax}{ma - \overline{m-n}x}$.

Beispiel III

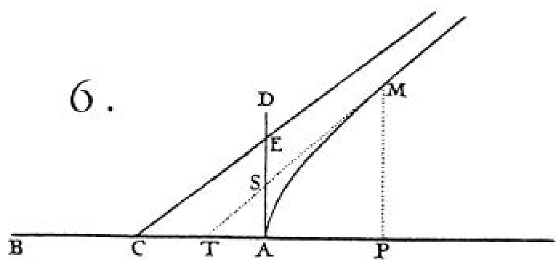


13. Hier (Fig. 6) werden dieselben Dinge vorausgesetzt, wie im vorstehenden Beispiel, mit der Ausnahme, daß hier angenommen wird, daß der Punkt *B* im Verhältnis zu Punkt *P* auf die andere Seite des Punktes *A* fällt, und man erhält die Gleichung $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$, was die Natur aller im Verhältnis zu ihren Durchmessern betrachteten Hyperbeln ausdrückt. Hieraus zieht man wie oben $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax+xx}}{ma + \overline{m+n}x}$ und $AT = \frac{nax}{ma + \overline{m+n}x}$.

Wenn man nun annimmt, daß *AP* unendlich groß ist, trifft die Tangente *TM* erst in unendlicher Entfernung auf die Kurve, das heißt, sie wird zu der Asymptote *CE,* und man erhält in diesem Fall $AT\left(\frac{nax}{ma+\overline{m+nx}}\right)=\frac{n}{m+n}a=AC$; denn da *a* unendlich viel kleiner als x ist, wird der Ausdruck *ma* im Verhältnis zu $\overline{m+nx}$ Null. Aus demselben Grund wird die Kurve in diesem Fall $ay^{m+n}=bx^{m+n}$. So erhält man, indem man zur Abkürzung $m + n = p$ schreibt, und indem man beiderseits die Wurzel p zieht, $y\sqrt[p]{a}=x\sqrt[p]{b}$, also ist die Differenz $dy\sqrt[p]{a}=dx\sqrt[p]{b}$: so daß man, indem man *AE* parallel zu den Ordinaten zieht und sich ein kleines Dreieck an dem Punkt vorstellt, wo die Asymptote *CE* auf die Kurve trifft, folgendes Verhältnis bilden wird $dx.dy$, oder $\sqrt[p]{a}.\sqrt[p]{b}::AC.\left(\frac{n}{p}a\right).AE=\frac{n}{p}\sqrt[p]{ba^{p-1}}$. Nachdem nun die Werte von *CA* und von *AE* auf diese Weise bestimmt sind, zieht man die unbestimmte lange Gerade *CE,* die die gesuchte Asymptote ist.

Wenn $m = 1$ und $n = 1$ sind, ist die Kurve die gewöhnliche Hyperbel, und man erhält $AC=\frac{1}{2}a$, und $AE=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$, das heißt, die Hälfte des konjugierten Durchmessers, also das, was bekanntlich mit der Wahrheit übereinstimmt.

Beispiel IV



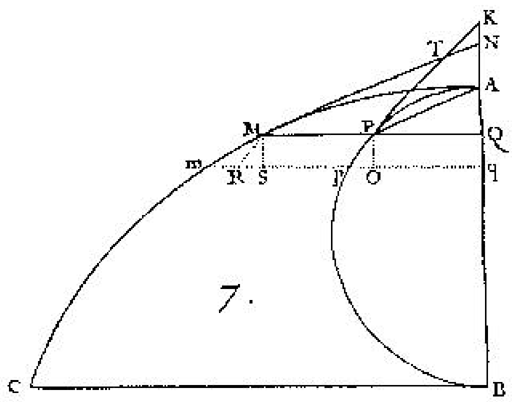
14. (Fig. 6) Gegeben sei die Gleichung $y^3-x^3=axy(AP=x, PM=y, a$ ist eine gegebene Gerade) und daß diese Gleichung die Natur der Kurve *AM* ausdrückt, dann wird ihre Differenz $3yydy-3xxdx=axdy+aydx$ sein. Daher erhält man $\frac{ydx}{dy}=\frac{3y^3-axy}{3xx+ay}$, und $AT\left(\frac{ydx}{dy}-x\right)=\frac{3y^3-3x^3-2axy}{3xx+ay}=\frac{axy}{3xx+ay}$, indem man für $3y^3-3x^3$ den Wert $3axy$ einsetzt.

Wenn man nun annimmt, daß *AP* und *PM* jeweils unendlich groß sind, wird die Tangente *TM* zur Asymptote *CE,* und die Geraden *AT, AS* werden zu *AC, AE,* die die Lage der Asymptote bestimmen. Nun wird *AT,* das ich $t=\frac{axy}{3xx+ay}$ nenne, woraus man $y = \frac{3txx}{ax - at} = \frac{3tx}{a}$ ableitet, wenn *AT* zu *AC* wird, weil *at* im Verhältnis zu *ax* Null ist. Wenn man also diesen Wert $\frac{3tx}{a}$ in der Gleichung $y^3 - x^3 = axy$ an die Stelle von *y* setzt, erhält man $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3txx$, woraus man (indem man den Ausdruck $3a^3txx$ streicht, denn da *x* unendlich ist, ist dieser Ausdruck im Verhältnis zu den zwei anderen $27t^3x^3$ und a^3x^3 Null) *AC (t)* = $\frac{1}{3}a$ zieht. Desgleichen $AS\left(y - \frac{xdy}{ax}\right)$, das ich $s = \frac{axy}{3yy - ax}$ nenne, woraus man $x = \frac{3syy}{ay + as} = \frac{3sy}{a}$ ableitet, denn weil *y* im Verhältnis zu *s* unendlich ist, wird der Ausdruck *as* im Verhältnis zum Ausdruck *ay* Null; und wenn man diesen Wert in die Gleichung der Kurve einsetzt, erhält man *AE(s)* = $\frac{1}{3}a$. Woraus sich ergibt, daß, wenn man die Linien *AC*, *AE* jede gleich $\frac{1}{3}a$ setzt und wenn man die unbestimmte lange Gerade *CE* zieht, diese zur Asymptote der Kurve *AM* wird.

Zur Auffindung der Asymptoten der anderen gekrümmten Linien werden wir uns auf diese beiden Beispiele beziehen.

Proposition II

Problem



15. (Fig. 7) *Wenn man in der vorigen Proposition annimmt, daß die Abszissen* AP *Teile einer gekrümmten Linie sein sollen, an die man die Tangente* PT *anlegen kann, es soll im gegebenen Punkt* M *auf der Kurve* AM *die Tangente* MT *angelegt werden.*

Nachdem man die Abzisse *MP* mit der Tangente *PT* gezogen hat (??) und annimmt, daß die sie in *T* treffende Gerade *MT* die gesuchte Tangente ist, stellt man sich eine weitere Ordinate *mp* unendlich nahe zur ersten vor, und eine kleine Gerade *MR* parallel zu *PT.* Und wenn man die gegebenen *AP, x; PM, y* benennt, erhält man wie zuvor *Pp* oder *MR = dx, Rm = dy,* und die ähnlichen Dreiecke *mRM* und *MPT* ergeben $mR(dy).RM(dx)::MP(y).PT=\frac{ydx}{ay}$. Das übrige erhält man danach mittels der Gleichung, die das Verhältnis der Abszissen *AP(x)* zu den Ordinaten *PM(y)* ausdrückt, wie aus den vorigen Beispielen zu sehen war und aus den folgenden noch zu sehen sein wird.

Beispiel I

16. Gegeben sei $\frac{yy}{x}=\frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$, deren Differenz $\frac{2xydy-yydx}{xx}=\frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a}+\frac{xydy}{a\sqrt{aa+yy}}$ ist: Durch Reduktion dieser Gleichung auf eine Proportion erhält man $dy.dx(MP.PT)::\frac{\sqrt{aa+yy}}{a}+\frac{yy}{xx}.\frac{2xy}{xx}-\frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}$. Und damit wird das Verhältnis der gegebenen *MP* zur gesuchten Subtangente *PT* in völlig bekannten und von Differenzen befreiten Ausdrücken ausgedrückt. Was gefordert war.

Beispiel II

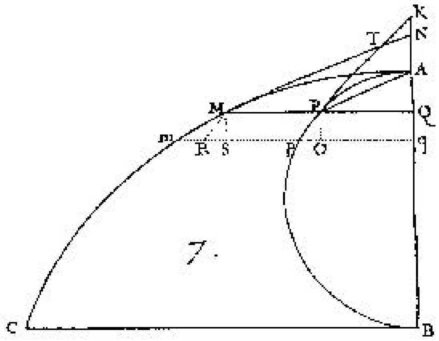
17. Gegeben sei $x=\frac{ay}{b}$, dessen Differenz $dx=\frac{ady}{b}$ ist; man erhält $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right)=\frac{ay}{b}=x$. Wenn man annimmt, daß die gekrümmte Linie *APB* ein Halbkreis ist, und daß die Ordinaten *MP* bis *Q* verlängert werden und senkrecht auf dem Durchmesser *AB* stehen, dann bildet die Kurve *AMC* eine halbe Zykloide: einfach wenn *b = a* ist, verlängert, wenn es größer ist, und verkürzt, wenn es kleiner ist.

Erläuterung

18. Wenn die Zykloide einfach ist, zieht man die Sehne *AP;* ich behaupte, daß sie parallel zur Tangente *MT* sein wird. Da das Dreieck *MPT* dann gleichschenkelig ist, beträgt der Außenwinkel *TPQ* das doppelte des gegenüberliegenden Innenwinkels *TMQ.* Nun ist aber der Winkel *APQ* gleich dem Winkel *APT,* weil beide die Hälfte des Bogens *AP* zum Maß haben; und daher beträgt er die Hälfte des Winkels *TPQ.* Die Winkel *TMQ, APQ* sind also untereinander gleich; und daher sind die Linien *MT, AP* parallel.

Proposition III

Problem

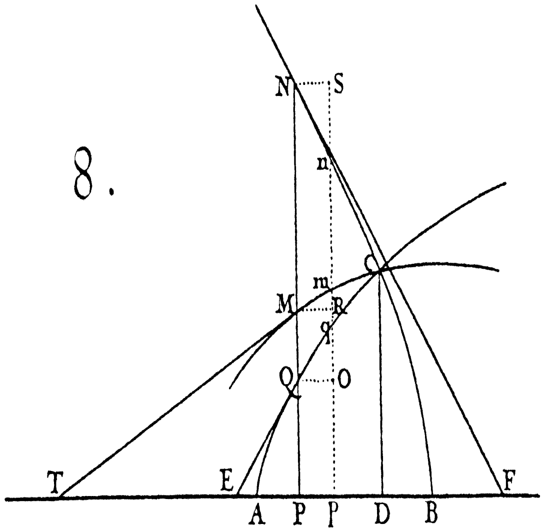


19. (Fig. 7) Gegeben *sei eine beliebige gekrümmte Linie* AP, *deren Durchmesser die Gerade* KNAQ *ist, und an die die Tangente* PK *angelegt werden kann; außerdem eine andere Kurve* AM, *die nach Belieben gezogen werden kann, deren Ordinate* MQ, *die erste Kurve im Punkt* P *schneidet; das Verhältnis des Bogens* AP *zur Ordinate* MQ *soll durch eine beliebige Gleichung ausgedrückt sein. Von einem gegebenen Punkt* M *soll die Tangente* MN *gezogen werden.*

Nachdem man die bekannten *PK, t; KQ, s;* den Bogen *AP*, *x; MQ, y* genannt hat, erhält man (indem man sich eine andere Abzisse *(mq* unendlich nahe *MQ* vorstellt und *PO*, *MS* parallel zu *AQ* zieht) *Pp = dx*, *mS = dy;* und wegen der ähnlichen Dreiecke *KPQ* und *PpO, mSM* und *MQN,* und erhält *PK (t), KQ(s)::Pp(dx).PO* oder $MS = \frac{sdx}{t}$. Und $mS(dy).SM\left(\frac{sdx}{t}\right):: MQ(y).QN = \frac{sydx}{tay}$. Folglich findet man mittels der Differenz der gegebenen Gleichung einen Wert von *dx* in Ausdrücken, die alle *dy* enthalten werden; und wenn man dann diesen Wert für *dx* in $\frac{sydx}{tdy}$ einsetzt, werden die *dy* sich aufheben und der Wert der gesuchten Subtangente *QN* in Ausdrücken ausgedrückt werden, die sämtlich bekannt sind. Was gefordert war.

Proposition IV
Problem

8.



20. (Fig. 8) Gegeben *seinen zwei gekrümmte Linien* AQC, BCN, *die die Gerade* TEABF *als Durchmesser haben und an die man die Tangenten* QE, NF *anlegen kann; gegeben sei außerdem eine gekrümmte Linie* MC, *so daß die Relation der Ordinaten* MP, QP, NP *durch eine beliebige Gleichung ausgedrückt ist. Gefordert ist, von einem gegebenen Punkt* M *auf dieser letzten Kurve die Tangente* MT *zu ziehen.*

Nachdem wir uns an den Punkten *Q, M, N* die kleinen Dreiecke *QCq, MRm, NSn* vorgestellt und die bekannten *PE, s; PF, t; PQ, x; PM, y; PN, z* genannt haben, erhält man *Oq = dx, Rm = dy, Sn = –dz*[5], weil bei zunehmendem *x* und *y* *z* abnimmt. Und wegen der ähnlichen Dreiecke *QPE* und *qOQ, NPF* und *nSN, MPT* und *mRM* erhält man *QP(x).PE(s)::qO(dx). OQ* oder *MR* oder $SN = \frac{sdx}{x}$. Außerdem *NP(z).PF(t)::nS(-dz).SN* = $\frac{-tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$ (woraus man $dz = \frac{-szdx}{tx}$ zieht). Außerdem $mR(dy).RM(\frac{sdx}{x}) :: MP(y).PT = \frac{sydx}{xdy}$. Wenn man folglich in die Differenz der gegebenen Gleichung anstelle von dz seinen Wert $-\frac{szdx}{tx}$ einsetzt, findet man einen Wert von *dx* in *dy*, und wenn dieser in $\frac{sydx}{xdy}$ eingesetzt wird, heben sich die *dy* weg und der Wert der Subtangente *PT* ist in lauter bekannten Ausdrücken ausgedrückt.

5 Art. 8

Beispiel

21. Gegeben sei $yy = xz$, wovon die Differenz $2ydy = zdx + xdz = \frac{tzdx - szdx}{t}$, und wenn man für dz seinen negativen Wert $-\frac{szdx}{tx}$ einsetzt, erhält man $dx = \frac{2tydy}{tz - sz}$; und daher $PT\left(\frac{sydx}{xdy}\right) = \frac{2styy}{txz - sxz} = \frac{2st}{t - s}$, indem man für yy seinen Wert xz einsetzt.

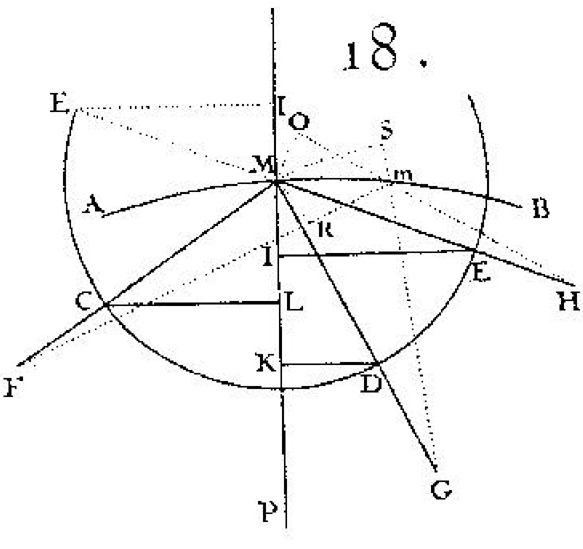
Gegeben sei jetzt die allgemeine Gleichung $y^{m+n} = x^m z^n$, deren Differenz ist $\overline{m+n}\,y^{m+n-1}dy = mz^n x^{m-1}dx + nx^m z^{n-1}dz = \frac{mrz^n x^{m-1}dx - nsz^n x^{m-1}dx}{t}$, indem man für dz seinen Wert $\frac{-szdx}{tx}$ einsetzt, erhält man $PT\left(\frac{sydx}{xdy}\right) = \frac{\overline{mst+nst}\,y^{m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m} = \frac{mst + nst}{ms - ns}$, indem man für y^{m+n} seinen Wert $x^m z^n$ einsetzt.

Zu bemerken ist, daß für den Fall, daß die Kurven *AQC*, *BCN* Geraden werden, die Kurve *MC* dann einer der unendlichen Kegelschnitte wird; nämlich eine Ellipse, wenn die Ordinate *CD*, die vom Schnittpunkt *C* ausgeht, zwischen die Endpunkte *A*, *B* fällt; eine Hyperbel, wenn sie auf die eine oder andere Seite davon fällt; und schließlich eine Parabel, wenn einer der Endpunkte *A* oder *B* unendlich weit von den anderen entfernt ist, das heißt, wenn eine der Geraden *CA* oder *CB* parallel zum Durchmesser *AB* ist.

Es folgen Proposition V bis IX.

Proposition X

Problem



32. (Fig. 18) Gegeben *sei eine gekrümmte Linie* AMB, *bei der, nachdem die Geraden* MF, MG, MH *usw. durch einen beliebigen Punkt* M *zu den Brennpunkten* F, G, H *gezogen wurden, deren Relation durch eine beliebige Gleichung ausgedrückt werde: Es soll im gegebenen Punkt* M *die Senkrechte auf die Tangent* MP *in diesem Punkt errichtet werden.*

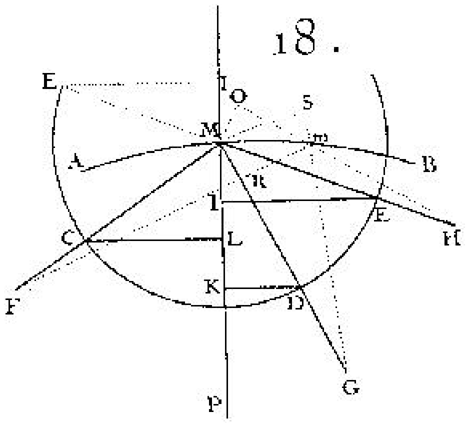
Nachdem man auf der Kurve *AB* den unendlich kleinen Bogen *Mm* abgetragen und die Geraden *FRm GmS, HmO* gezogen hat, beschreibt man von den Mittelpunkten *F, G, H* die kleinen Kreisbogen *MR, MS, MO;* danach beschreibt man noch um den Mittelpunkt *M* mit einem beliebigen Radius den Kreis *CDE,* der die Linien *MF, MG, MH* in den Punkten *C, D, E* schneidet, von denen man auf *MP* die Senkrechten *CL, DK, EI* fällt. Nach dieser Vorbereitung bemerke ich:

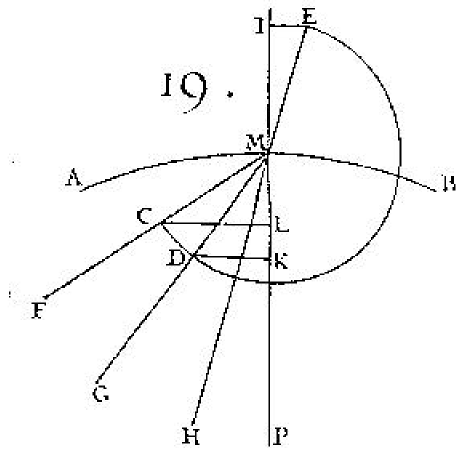
1) Daß die rechtwinkeligen Dreiecke *MRm, MLC* ähnlich sind; denn wenn man die rechten Winkel *LMm, RMC* und den gemeinsamen Winkel *LMR* abzieht, sind die verbleibenden *RMm, LMC* gleich, und außerdem sind sie in *R* und *L* rechtwinkelig. Man kann gleichermaßen beweisen, daß die rechtwinkeligen Dreiecke *MSm* und *MKD, MOm* und *MIE* ähnlich sind. Sodann, weil die Hypothenuse *Mm* den kleinen Dreiecken *MRm, MSm, MOm* gemeinsam ist und weil die Hypothenusen *MC, MD, ME* der Dreiecke *MLC, MKD, MIE* untereinander gleich sind, ergibt sich, daß die Senkrechten *CL, DK, EI* dasselbe Verhältnis untereinander haben wie die Differenzen *Rm, Sm, Om.*

2) Daß die Linien, die von den Brennpunkten auf der gleichen Seite der Senkrechten *MP* ausgehen, zunehmen, während die anderen abnehmen, oder umgekehrt. So nimmt in Fig. 18 *FM* um seine Differenz *Rm* zu, während die anderen *GM, HM* um ihre Differenzen *Sm, Om* abnehmen.

Wenn man, um die Idee zu forcieren, einmal annimmt, daß die Gleichung, die die Relation der Geraden *FM(x), GM(y), HM(z),* ausdrückt, $ax + xy - zz = 0$ sei, deren Differenz $adx + ydx + xdy - 2zdz = 0$ beträgt; dann ist es offensichtlich, daß die Tangente in *M* (die nichts anderes als die Fortsetzung der kleinen Seite *Mm* des Vielecks ist, aus dem man sich die Kurve *AMB* zusammengesetzt[6] vorstellt) so gelegt werden muß, daß man, wenn man von einem beliebigen ihrer Punkte *m* die Parallelen *mR, mS, mO* zu den Geraden *FM, GM, HM* legt, die in *R, S, O* durch die Senkrechten *MR, MS, MO* zu diesen selben Geraden begrenzt werden, man immer noch die Gleichung $\overline{a+y} \times Rm + x \times Sm - 2z \times Om = 0$ erhält, oder (was auf dasselbe hinausläuft, indem man an die Stelle von *Rm, Sm, Om* ihre proportionalen *CL, DK, EI* setzt), daß die Senkrechte *MP* auf die Kurve so plaziert werden muß, daß $\overline{a+y} \times CL + x \times DK - 2z \times EI = 0$ ist. Woraus diese folgende Konstruktion hervorgeht.

6 Art. 3





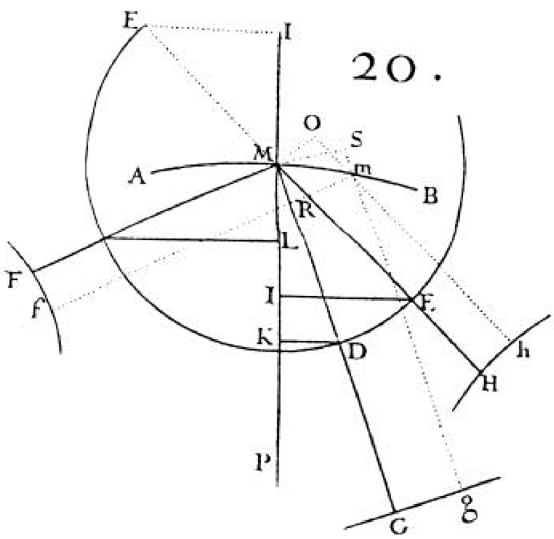
Man stelle sich vor (Fig. 18 und 19), daß der Punkt *C* mit dem Gewicht $a + y$ belastet ist, das mit der Differenz dx der Geraden *FM*, auf der er liegt, multipliziert wird, und desgleichen der Punkt *D* mit dem Gewicht x und der auf der anderen Seite von M angenommene Punkt E im Verhältnis zum Brennpunkt *H* (weil der Audruck $-2zdz$ negativ ist) mit dem Gewicht 2z. Ich behaupte, daß die Gerade *MP*, die durch den gemeinsamen Schwerpunkt der in *C, D, E* angenommenen Gewichte führt, die gesuchte Senkrechte ist. Denn nach den Prinzipien der Mechanik ist es klar, daß jede gerade Linie, die durch den gemeinsamen Schwerpunkt mehrerer Gewichte verläuft, sie so voneinander trennt, daß die mit ihrem Abstand von dieser Gerade multiplizierten Gewichte auf der einen Seite jeweils genau gleich der mit ihrem Abstand von derselben Gerade multiplizierten Gewichte der anderen Seite sind. Wenn man also den Fall setzt, daß bei zunehmendem x und y und z zunehmen, das heißt, daß die Brennpunkte *F, G, H* (Fig. 19) auf dieselbe Seite von *MP* fallen, wie wir angenommen haben, als wir die Differenz der gegebenen Gleichung nach den vorgegebenen Regeln gebildet haben; hieraus ergibt sich, daß die Linie *MP* einerseits die Gewichte in *C* und *D* hat, und andererseits das Gewicht in *E*, und daß man so $a + y$ x $CL + x$ x $DK - 2z$ x $EI = 0$ erhält, was die zu konstruierende Gleichung war.

Nun behaupte ich, daß die Konstruktion, weil sie in diesem Fall gut war, dies auch für alle anderen sein wird; denn wenn man zum Beispiel annimmt, daß der Punkt *M* auf der Kurve seine Lage so verändert, daß bei zunehmendem x y und z abnehmen, das heißt, daß die Brennpunkte *G, H* auf der anderen Seite von *MP* liegen, ergibt sich daraus 1)[7] Daß in der Differenz der gegebenen Gleichung die Vorzeichen der Ausdrücke, die dy und dz oder ihre Proportionalen *DK, EI* enthalten, verändert werden müssen, und zwar so, daß die zu konstruierende Gleichung in diesem neuen Fall $a + y \times CL - x \times DK + 2z \times EI = 0$. 2) Daß die Gewichte in *D* und *E* im Vergleich zu *MP* die Seiten wechseln, und daß man so durch die Eigenschaft des Schwerpunkts $\overline{a+y} \times CL - x \times DK + 2z \times EI = 0$ erhält, was die zu konstruierende Gleichung ist. Und da dies in allen anderen möglichen Fällen eintritt, folgt daraus usw.

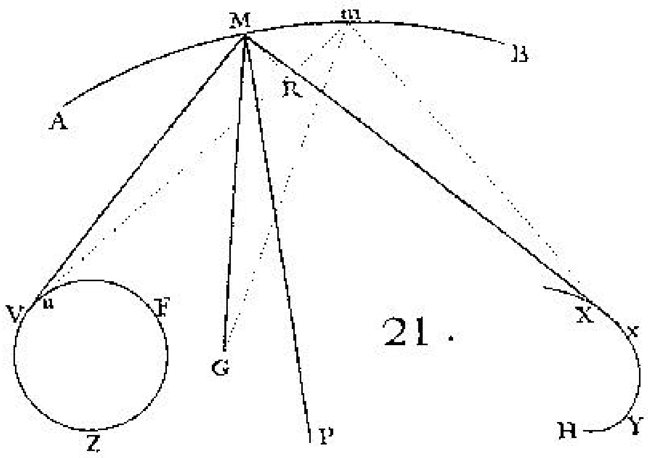
[7] Art. 8

Es ist offensichtlich, daß die gleiche Argumentation immer gilt, wieviele Brennpunkte es auch sein mögen, und wie die gegebene Gleichung auch beschaffen sein mag, so daß man so die allgemeine Konstruktion formulieren kann.

Genommen werde die Differenz der gegebenen Gleichung, von der ich annehme, daß eine ihrer Seiten Null ist, und es werde um den Mittelpunkt *M* ein beliebiger Kreis *CDE* beschrieben, der die Geraden *MF, MG, MH* in den Punkten *C, D, E* schneidet, in welchen man sich Gewichte vorstellt, die untereinander dasselbe Verhältnis haben wie die Größen, mit denen die Differenzen der Linien multipliziert werden, auf denen sie liegen. Ich behaupte, daß die Linie *MP*, die durch ihren gemeinsamen Schwerpunkt verläuft, die gesuchte Senkrechte sein wird. Zu bemerken ist, daß dann, wenn ein Gewicht in der Differenz der gegebenen Gleichung negativ ist, man sich dieses im Verhältnis zum Brennpunkt auf der anderen Seite des Punktes *M* vorstellen muß.



Wenn man möchte (Fig. 20), daß anstelle der Brennpunkte *F, G, H* gerade Linien oder Kurven sind, auf die die Geraden *MF, MG, MH* rechtwinkelig fallen, gilt übrigens dieselbe Konstruktion. Denn wenn man vom unendlich nahe an *M* gelegenen Punkt *m* die Senkrechten *mf, mg, mh* auf die Brennpunkte zieht, und vom Punkt *M* die kleinen Senkrechten *MR, MS, MO* auf diese Linien, ist klar, daß *Rm* die Differenz von *MF* ist, weil die Geraden *MF, Rf,* da sie senkrecht zwischen den Parallelen *Ff, MR* liegen, gleich sind, und desgleichen daß *Sm* die Differenz von *MG* ist, und *Om* die von *MH;* alles übrige wird man dann wie oben beweisen.

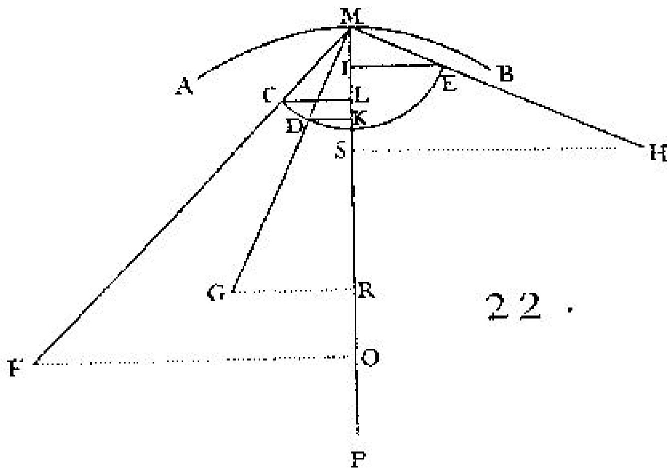


Man kann sich auch noch vorstellen (Fig. 21), daß die Brennpunkte *F, G, H* alle oder teilweise gekrümmte Linien sind, die feste und unveränderliche Ausgangspunkte in *F, G, H* haben und daß die gekrümmte Linie *AMB* so geartet ist, daß nach Anlegen der Tangenten *MV, MX* und der Geraden *MG* in einem ihrer beliebigen Punkte *M* die Relation der gemischtlinigen Linien *FVM, HXM* und der Geraden *GM* durch eine beliebige Gleichung ausgedrückt ist. Denn wenn man vom unendlich nahe an *M* gelegenen Punkt *m* die Tangente *mu* gezogen hat, ist klar, daß sie die andere Tangente im Punkt *V* trifft (weil sie nichts anderes ist als die Fortsetzung des kleinen Bogens *Vu*, der als kleine Gerade betrachtet wird) und daher ist, wenn man vom Mittelpunkt *V* den kleinen Kreisbogen *MR* beschreibt, *Rm* die Differenz der gemischtlinigen Linie *FVM*, die zu *FVuRm* wird. Und alles übrige läßt sich ebenso beweisen.

Monsieur Tschirnhaus *hat als erster die Idee zu diesem Problem in seinem Buch über die Medizin des Geistes gegeben, Monsieur* Fatio *hat später eine sehr einfallsreiche Lösung dafür gefunden, die er in den Journalen von Holland abdrucken ließ, doch die Art und Weise, wie sie es aufgefaßt haben, ist nur ein Sonderfall der allgemeinen Konstruktion, die ich eben dargestellt habe.*

Beispiel I

33. Sei $axx + byy + czz - f^3 = 0$ (die Geraden *a, b, c, f* sind gegeben), deren Differenz $axdx + bydy + czdz = 0$ ist. Deswegen ist, wenn man sich in *C* das Gewicht *ax* , in *D* das Gewicht *by* und in *E* das Gewicht *cz* vorstellt, das heißt, Gewichte, die sich untereinander wie Rechtecke verhalten, die Linie *MP*, die durch ihren gemeinsamen Schwerpunkt verläuft, senkrecht zur Kurve im *M*. (Fig. 22)



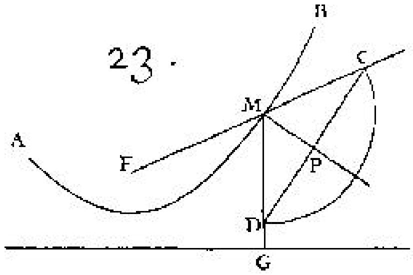
22 .

Doch wenn man *FO* parallel zu *CL* zieht und wenn man den Strahl *MC* als Einheit nimmt, ergeben die ähnlichen Dreiecke *MCL, MFO* *FO = x* x *CL;* desgleichen wenn man *GR* parallel zu *DK* zieht und *HS* parallel zu EI, findet man, daß *GR = y* x *DK* und *HS = z* x *EI:* so daß, wenn man sich in den Brennpunkten *F, G, H* die Gewichte *a, b, c* vorstellt, die zur Linie *MP,* die durch den Schwerpunkt der in *C, D, E* angenommenen Gewichte *ax, by, cz* verläuft, auch durch den Schwerpunkt dieser neuen Gewichte verläuft. Nun ist dieser Schwerpunkt ein Fixpunkt, weil die Gewichte in *F, G, H* nämlich *a, b, c* konstante Geraden sind, die immer gleich bleiben, gleichviel, an welchem Ort sich der Punkt *M* befindet. Woraus sich ergibt, daß die Kurve *AMB* so geartet sein muß, daß alle ihre Senkrechten sie im selben Punkt schneiden, das heißt, das sie ein Kreis ist, der diesen Punkt zum Mittelpunkt hat. Das also ist eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft des Kreises, die so beschrieben werden kann.

Wenn es auf ein und derselben Ebene soviele Gewichte *a, b, c* usw. gibt, wie man will, die in *F, G, H* usw. liegen, und wenn man um ihren gemeinsamen Schwerpunkt einen Kreis *AMB* schlägt, sage ich, daß man nach Ziehen der Geraden *MF, MG, MH* usw. von einem beliebigen darauf gelegenen Punkt *M*, die Summe ihrer Quadrate jeweils mit dem zugehörigen Gewicht multipliziert immer gleich derselben Größe sein wird.

Beispiel II

23 .



34. (Fig. 23) Gegeben sei die Kurve *AMB*, bei der man von einem ihrer beliebigen Punkte *M* zu dem fixen Brennpunkt *F* die Gerade *MF* gezogen hat, und zum Brennpunkt *G*, der eine gerade Linie ist, die Senkrechte *MG;* das Verhältnis von *MF* zu *MG* soll immer so groß sein, wie das der gegebenen Größe *a* zur gegebenen Größe *b*.

Wenn man *FM* als *x* und *MG* als *y* bezeichnet, erhält man $x.y::a.b$ und daher $ay = bx$, dessen Differenz $ady - bdx = 0$ ist. Von daher, wenn man sich in dem in Hinblick zu *F* jenseits von *M* gelegenen *C* das Gewicht *b* vorstellt, und in *D* (in gleicher Entfernung von *M)* das Gewicht *a*, und von ihrem gemeinsamen Schwerpunkt aus die Linie *MP* zieht, wird diese die gesuchte Senkrechte sein.

Es ist nach dem Gleichgewichtsprinzip klar, daß, wenn man die Sehne *CD* im Punkt *P* so teilt, daß $CD.DP::a.b$ ist; der Punkt *P* der gemeinsame Schwerpunkt der in *C* und *D* angenommenen Gewichte sein wird.

Die Kurve *AMB* ist ein Kegelschnitt, nämlich eine Parabel, wenn $a = b$ ist, eine Hyperbel, wenn *a* größer als *b* ist, und schließlich eine Ellipse, wenn es kleiner als *b* ist.