Marquis Guillaume Francois Antoine de l'Hospital

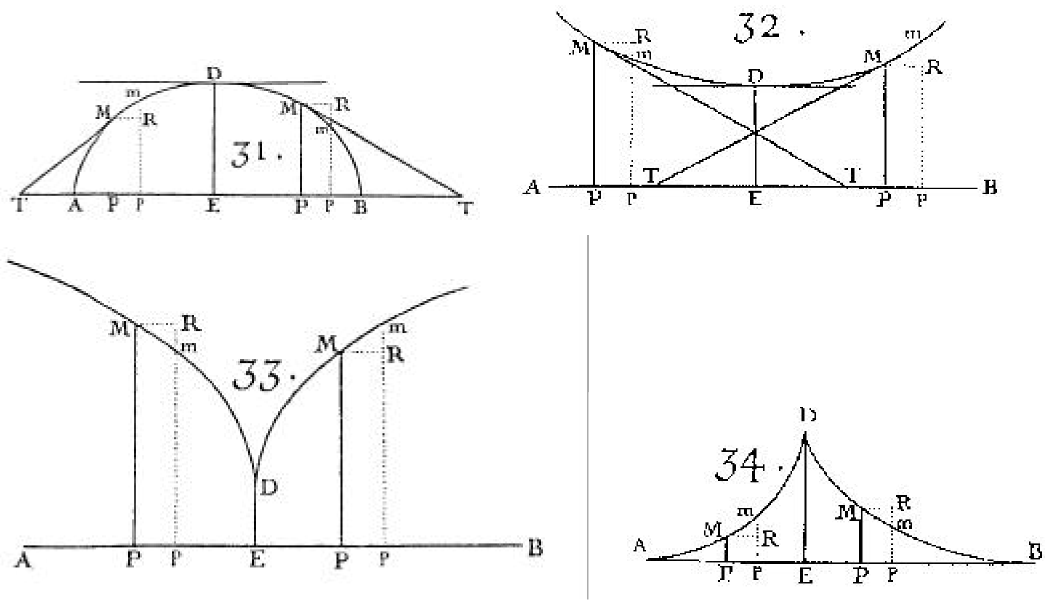
Analyse des Infiniment Petits
(1696)

Quelle : Marquis de l'Hospital: Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes. - Nachdruck d. Ausg. Paris 1696 u. 1725. - Paris: ACL-Editions , 1988

[1]Dritter Abschnitt

Verwendung des Kalküls der Differenzen zur Auffindung der größten und kleinsten Ordinaten, worauf sich die Fragen* De maximis & minimis *reduzieren

Definition I



Gegeben sei eine gekrümmte Linie *MDM* (Fig. 31, 32, 33, 34), deren Ordinaten *PM, ED, PM* zueinander parallel sind, und bei der, wenn der Abschnitt *AP* stetig zunimmt, die Ordinate *PM* gleichfalls bis zu einem gewissen Punkt *E* zunimmt, wonach sie

1

abnimmt; oder im Gegenteil, daß sie bis zu einem gewissen Punkt *E* abnimmt, und danach wieder zunimmt.

Die Linie *ED* wird als größte oder kleinste Ordinate bezeichnet.

Definition II

Wenn man sich eine Größe wie *PM* vorstellt, die aus einer oder mehreren Unbestimmten wie *AP* zusammengesetzt ist, und wenn *AP* stetig zunimmt, auch diese Größe *PM* bis zu einem gewissen Punkt *E* stetig zunimmt, wonach sie abnimmt, oder umgekehrt; und es soll für *AP* ein Wert *AE* gefunden werden, so daß die daraus zusammengesetzte Größe *ED* größer oder kleiner als jede andere ähnlich aus *AP* gebildete Größe *PM* ist. Dies nennen wir eine Frage *De maximis et minimis.*

Allgemeine Proposition

46. Wenn *die Natur der gekrümmten Linie* MDM *gegeben ist, soll für* AP *ein Wert* AE *gefunden werden, bei dem die Ordinate* ED *größer oder kleiner als die zu ihr ähnlichen* PM *ist.*

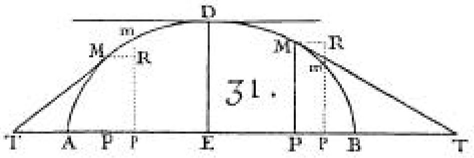
Wenn *AP* zunimmt, nimmt auch *PM* zu; es ist offensichtlich[2], daß seine Differenz *Rm* im Verhältnis zu der von *AP* positiv ist; dagegen wenn *PM* bei immer noch zunehmender Abszisse *AP* abnimmt, seine Differenz negativ sein wird. Nun kann aber jede Größe, die stetig zunimmt oder abnimmt, nur dann positiv oder negativ werden, wenn sie durch unendlich oder Null geht; das heißt, durch Null, wenn sie zunächst abnimmt, und durch unendlich, wenn sie zunächst zunimmt. Woraus folgt, daß die Differenz einer Größe, die ein *größtes* oder ein *kleinstes* ausdrückt, gleich Null oder unendlich sein muß. Da nun die Natur der Kurve *MDM* gegeben ist, findet man[3] einen Wert von *Rm*, der, zunächst gleich Null, dann gleich unendlich ist, und dann dazu dient, den gesuchten Wert von *AE* unter der einen oder anderen dieser Annahmen zu entdecken.

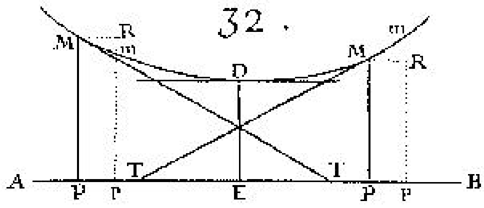
---

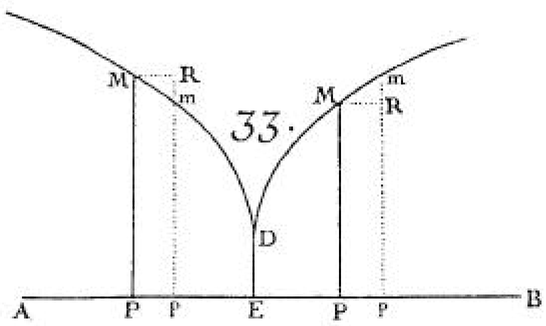
2 Art. 8.10

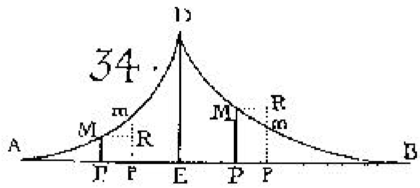
3 Sest. t. ou 2

Bemerkung







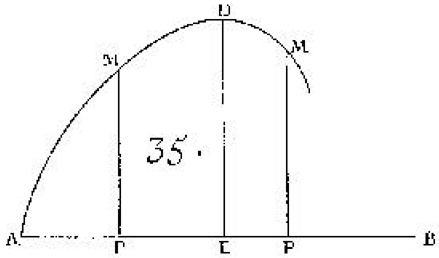


47. (Fig. 31, 32, 33, 34) Die Tangente in *D* ist parallel zu Achse *AB,* wenn die Differenz *Rm* in diesem Punkt Null wird; aber wenn sie unendlich wird, fällt die Tangente mit der Ordinaten *ED* zusammen. Woraus ersichtlich wird, daß das Verhältnis von *mR* zu *RM*, das das der Ordinaten zur Subtangente ausdrückt, im Punkt *D* Null oder unendlich ist.

Man kann sich leicht vorstellen, daß eine stetig abnehmende Größe nicht von positiv zu negativ werden kann, ohne durch Null zu gehen; aber nicht so augenfällig ist, daß sie beim Zunehmen durch unendlich gehen muß. Um der Phantasie auf die Sprünge zu helfen, sollen die Tangenten bis zu den Punkten *M*, *D*, *M* verlängert werden; es ist klar für die Kurven, wo die Tangente in *D* parallel zur Achse *AB* liegt, daß die Subtangente *PT* stetig in dem Maße zunimmt, wie die Punkte *M*, *P* sich den Punkten *D, E* nähern; und daß sie unendlich wird, wenn der Punkt *M* auf *D* fällt; und daß schließlich, wenn *AP* größer wird als *AE*, die Subtangente *PT* negativ wird, wenn sie vorher positiv war[4], oder umgekehrt.

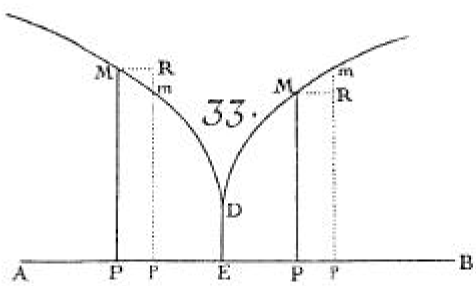
4 Art. 10

Beispiel I



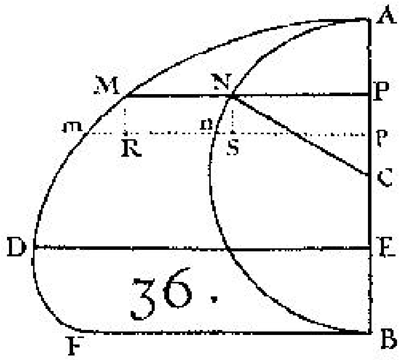
48. (Fig. 35) Nehmen wir an, daß $x^3 + y^3 = axy(AP = x, PM = y, AB = a)$ die Natur der Kurve *MDM* ausdrückt. Indem man die Differenzen $3xxdx + 3yydy = axdy + aydx$ und $dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax} = 0$ nimmt, wenn der Punkt *P* auf den gesuchten Punkt *E* fällt, woraus man $y = \frac{3xx}{a}$ zieht; und indem man diesen Wert in der Gleichung $x^3 + y^3 = axy$ an die Stelle von *y* setzt, findet man für *AE* einen Wert $x = \frac{2}{3}a\sqrt[3]{2}$, von der Art, daß die Ordinate *ED* größer wird als alle ihr ähnlichen *PM*.

Beispiel II



49. (Fig. 33) Gegeben sei die Gleichung $y - a = a^{\frac{2}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$, die die Natur der Kurve *MDM* ausdrückt. Indem man die Differenzen $dy = -\frac{adx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a - x}}$ nimmt, die ich zunächst gleich Null setze, ergibt diese Annahme $-2dx\sqrt[3]{a} = 0$, aus der der Wert von *AE* nicht zu entnehmen ist, setze ich schließlich $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a - x}}$ gleich unendlich, wodurch ich $3\sqrt[3]{a - x} = 0$ erhalte, woraus man $x = a$ zieht, was der gesuchte Wert von *AE* ist.

Beispiel III.



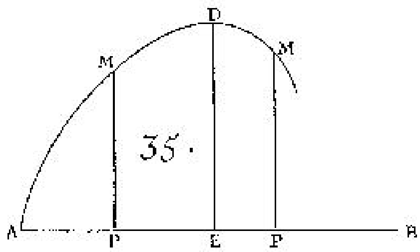
50. (Fig. 36) Gegeben seien eine verkürzte Halbzykloide *AMF* (Fig. 36), deren Basis *BF* kleiner ist, als der halbe Umfang *ANB* des erzeugenden Kreises, der den Punkt *C* zum Mittelpunkt hat. Zu bestimmen ist der Punkt *E* auf dem Durchmesser *AB*, so daß die Ordinate *ED* so groß wie möglich wird.

Nachdem man beliebig die Ordinate *PM* gezogen hat, die den Halbkreis in *N* schneidet, stellt man sich gewöhnlich an den Punkten *M*, *N* die beiden kleinen Dreiecke *MRm, NSn* vor, und indem man die unbestimmten *AP*, *x; PN*, *z;* den Bogen *AN, u* und die gegebenen *ANB, a; BF, b; CA* oder *CN, c* nennt, erhält durch die Eigenschaft der Zykloide *ANB(a).BF(b)::AN(u).NM* = $\frac{bu}{a}$. Also ist $Pm = z + \frac{bu}{a}$ und seine Differenz $Rm = \frac{adz + bdu}{a} = 0$, wenn der Punkt *P* auf den gesuchten Punkt *E* fällt. Nun sind die rechtwinkeligen Dreiecke *NSn, NPC* ähnlich; denn wenn man die rechten Winkel *CNn, PNS* von dem gemeinsamen Winkel *CNS* wegnimmt, sind die verbleibenden Winkel *SNn, PNC* gleich. Daher ist *CN(c).CP(c-x)::Nn(du).Sn(dz)* = $\frac{cdu - xdu}{c}$. Wenn man also diesen Wert in *adz + bdu = 0* an die Stelle von *dz* setzt, findet man $\frac{acdu - axdu + bcdu}{c} = 0$, woraus man erhält

x (das in diesem Fall *AE* ist) = $c + \frac{bc}{a}$.

Es ist also evident, daß wenn man *CE* auf der Seite von *B* als vierte Proportionale zum halben Umfang *ANB,* der Basis *BF* und dem Strahl *CB* nimmt, der Punkt *E* der gesuchte sein wird.

Beispiel IV

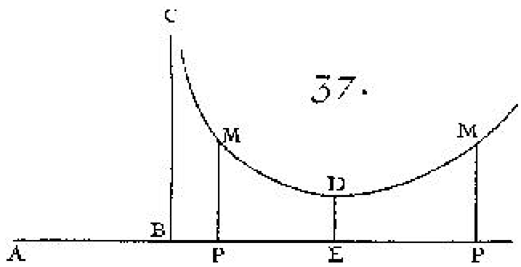


51. (Fig. 35) Man soll die gegebene Linie *AB* durch einen Punkt *E* so teilen, daß das Produkt aus dem Quadrat des einen Teiles *AE* und des anderen *EB* das größte von allen Produkten ist, die auf die gleiche Weise gebildet werden.

Nachdem man die unbekannte *AE*, *x* genannt hat und die gegebene *AB*, *a;* erhält man $\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3$, was *ein größtes* sein muß. Deswegen stellt man sich eine gekrümmte Linie *MDM* vor, bei der die Relation der Ordinaten *MP(y)* zur Abzisse *AP(x)* durch die Gleichung $y = \frac{axx - x^3}{aa}$ ausgedrückt wird und sucht einen Punkt *E*, bei dem die Ordinate *ED* die größte aller ihrer ähnlichen *PM* ist; was $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = 0$ ergibt, woraus man $AE(x) = \frac{2}{3}a$ zieht.

Wenn man allgemein will, daß $x^m \times \overline{a-x}^n$ *ein größtes* ist *(m* und *n* können für beliebige Zahlen stehen), muß die Differenz dieses Produkts gleich Null oder gleich unendlich sein, was $mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m = 0$ ergibt, woraus durch Division mit $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}dx$ dann $am - mx - nx = 0$ wird, und $AE(x) = \frac{m}{m+n}a$.

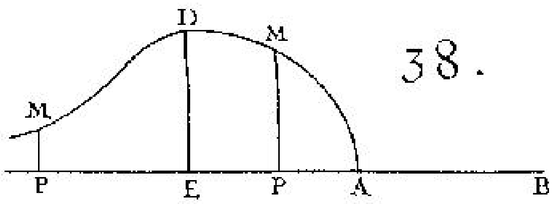
Wenn *m = 2* und *n = –1*, erhält man *AE = 2a* und man muß dann das Problem wie folgt formulieren.



(Fig. 37) Verlängere die gegebene Linie *AB* auf der Seite von *B* bis zu einem Punkt *E*, so daß die Größe $\frac{AE^2}{BE}$ *ein kleinstes* ist, und nicht *ein größtes;* denn die Gleichung der

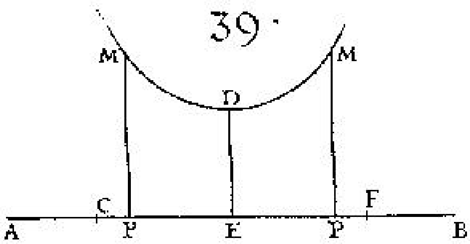
Kurve *MDM* lautet dann $\frac{xx}{x-a} = y$, in der, wenn man $x = a$ annimmt, die Ordinate *PM*, die zu *BC* wird, $\frac{aa}{0}$, folglich unendlich ist; und wenn man x als unendlich annimt, erhält man $y = x$, das heißt, daß auch die Ordinate unendlich ist.

Wenn $m = 1$, und $n = -2$, erhält man $AE = -a$; woraus folgt, daß man das Problem dann wie folgt formulieren muß. (Fig. 38)



Verlängere die gegebene Gerade *AB* auf der Seite von *A* bis zu einem Punkt *E* so, daß die Größe $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ größer als jede andere ähnliche Größe $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$ ist.

Beispiel V



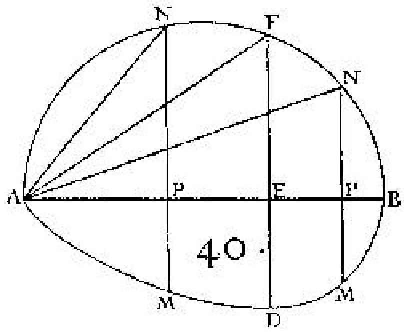
52. (Fig. 39) Aus der in drei Teile *AC*, *CF*, *FB* zerlegten Geraden *AB* soll der Mittelteil *CF* im Punkt *E* so geteilt werden, daß das Verhältnis des Rechtecks *AE* x *EB* zum Rechteck *CE* x *EF* kleiner ist als jedes andere auf die selbe Weise gebildete Verhältnis.

Nachdem man die gegebenen *AC, a; CF, b; CB, c;* und die unbekannte *CE, x* genannt hat; erhält man $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, und daher ist das Verhältnis von $AE \times EB$ zu $CE \times EF$ dann $\frac{ac + ex - ax - xx}{bx - xx}$, was *ein kleinstes* sein muß. Deshalb stellt man sich eine gekrümmte Linie *MDM* so vor, daß die Relation der Ordinate *PM(y)* zur Abzisse *CP(x)* durch die Gleichung $y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx}$ ausgedrückt wird, und die Frage reduziert sich darauf, für *x* einen Wert *CE* so zu finden, daß die Ordinate *ED* die kleinste von allen ähnlichen *PM* ist. Man bildet daher (indem man die Differenzen nimmt und anschließend durch *adx* teilt) die Gleichung $cxx - axx - bxx + 2acx - abc = 0$, deren eine Wurzel die Frage löst.

Wenn $c = a + b$, erhält man $x = \frac{1}{2}b$.

Beispiel VI

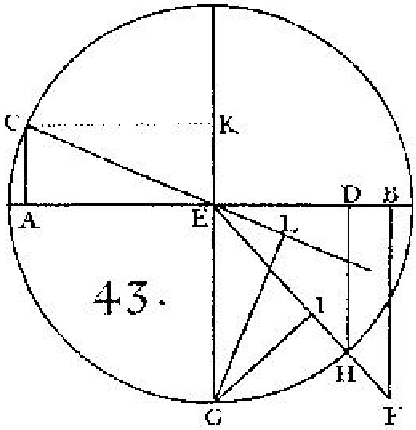
53. Unter allen Kegeln, die in eine Kugel einbeschrieben werden können, soll derjenige festgestellt werden, der die größte konvexe Oberfläche hat.



Die Frage (Fig. 40) läuft darauf hinaus, auf dem Durchmesser *AB* des Halbkreises *AFB* den Punkt *E* so zu bestimmen, daß nach Errichten der Senkrechten *EF* und Hinzufügen von *AF* das Rechteck *AF* x *FE* das größte aller ähnlichen *AN* x *AP* ist. Denn wenn man sich vorstellt, daß der Halbkreis *AFB* sich einmal ganz um den Durchmesser *AB* dreht, ist klar, daß er eine Kugel beschreibt und daß die rechtwinkeligen Dreiecke *AEF, APN* innerhalb dieser Kugel Kegel beschreiben, deren durch die Sehnen *AE, AN* beschriebene konvexe Oberflächen sich untereinander wie die Rechtecke *AF* x *FE* und *AN* x *NP* verhalten.

Sei also die unbekannte $AE = x$, die gegebene $AB = a$, erhält man durch die Eigenschaft des Kreises $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; und daher $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$, was *ein größtes* sein muß. Deshalb stellt man sich eine gekrümmte Linie *MDM* so vor, daß die Relation der Ordinate *PM(y)* zur Abzisse *AP(x)* durch die Gleichung $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$ ausgedrückt wird; und man sucht den Punkt *E* so, daß die Ordinate *ED* größer als alle ihre ähnlichen *PM* ist. Man erhält also durch Nehmen der Differenz $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$, woraus man $AE(x) = \frac{2}{3}a$ erhält.

Beispiel XI



59. (Fig. 43) Ein Reisender, der vom Ort C aufbricht, um zum Ort F zu gelangen, muß zwei durch die Gerade AEB voneinander getrennte Landschaften durchlaufen. Man nimmt an, daß er in der Landschaft auf der Seite von C den Raum a in der Zeit c durchmisst, und in der anderen Landschaft auf der Seite von F den Raum b in derselben Zeit c: Gefragt ist, durch welchen Punkt E der Geraden AEB er hindurch muß, damit er sowenig Zeit wie möglich von C bis F braucht. Wenn man $a.CE(u)::c.\frac{cu}{a}$ macht und $b.EF(z)::c.\frac{cz}{b}$ ist klar, daß $\frac{cu}{a}$ die Zeit ausdrückt, die der Reisende zum Durchlaufen der Geraden CE braucht, und desgleichen daß $\frac{cz}{b}$ die Zeit ausdrückt, die er zum Durchlaufen von EF benötigt; so daß $\frac{cu}{a}+\frac{cz}{b}$ ein *kleinstes* sein muß. Woraus folgt[5], daß nach Errichten der Senkrechten EG auf der Linie AB der Sinus des Winkels GEC sich zum Sinus des Winkels GEF verhalten muß, wie a zu b.

Nachdem dies gesetzt ist, und wenn man vom gesuchten Punkt E als Mittelpunkt des Intervalls EC den Kreis CGH beschreibt, und wenn man auf der Geraden AEB die Senkrechten CA, HD, FB und auf CE, EF jeweils die Senkrechten GL, GI errichtet, erhält man $a.b::GL.GI$. Nun ist $GL = AE$, und $GI = ED$, weil die rechtwinkeligen Dreiecke GEL und ECA, GEI und EHD untereinander gleich und ähnlich sind, wie leicht zu beweisen ist. Deshalb findet man nach Benennung der unbekannten AE in x $ED=\frac{bx}{a}$; benennt man die Bekannten AB mit f, AC mit g, BF mit h, dann ergeben die ähnlichen Dreiecke EBF, EDH die Beziehung $EB(f-x).BF(h)::ED\left(\frac{bx}{a}\right).DH=\frac{bhx}{af-ax}$. Doch wegen der rechtwinkeligen Dreiecke EDA, EAC, die gleiche Hypothenusen EH, EC

---

[5] Art. 56

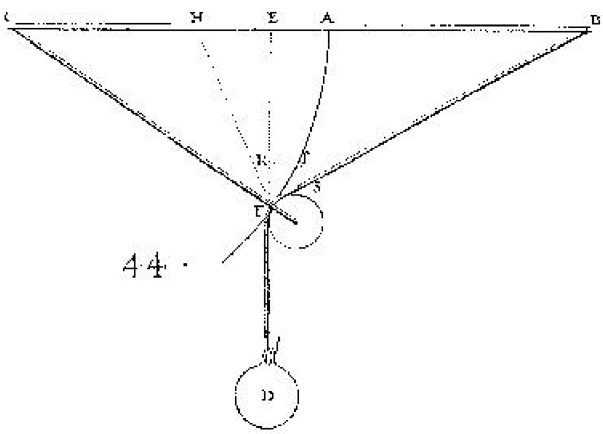
haben, erhält man $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$, das heißt, analytisch $\frac{bbxx}{aa} + \frac{bbhhxx}{aaff - 2aafx + aaxx} = xx + gg$, so daß bei Beseitigung der Brüche und anschließender Ordnung der Gleichung sich ergibt

$$\begin{array}{llll} aax^4 & -2aafx^3 & +aaffxx & -2aafggx + aaffgg = 0 \\ -bb & +2bbf & +aagg & \\ & & -bbff & \\ & & -bbhh & \end{array}$$

Man kann diese Gleichung auch auf nachfolgende Weise finden, ohne auf Beispiel 9 zurückzugreifen.

Nachdem man wie zuvor die bekannten *AB* in f, *AC* in *g*, *BF* in *h* und die unbekannte *AE* in *x* benannt hat, bildet man $a.CE(\sqrt{gg+xx}) :: c.\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} =$ der Zeit, die der Reisende braucht, um die Gerade *CE* zu durchlaufen. Und desgleichen $b.EF(\sqrt{ff-2fx+xx+hh}) :: c.\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b} =$ gleich der Zeit, die der Reisende braucht, um die Gerade *EF* zu durchlaufen. Hieraus ergibt sich $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff-zfx+xx+hh}}{b} =$ ein *kleinstes*; und daraus die Differenz $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}} + \frac{cxdx - cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hn}} = 0$, woraus man nach Teilung durch *cdx* und Entfernung der Inkommensurablen dieselbe Gleichheit wie oben zieht, deren eine Wurzel für *AE* den gesuchten Wert ergibt.

Beispiel XII



44.

60. (Fig. 44) Gegeben sei ein Laufrad *F*, das frei am Ende einer in *C* befestigten Schnur *CF* hängt, mit einem Bleigewicht *D*, das an der über das Laufrad *F* verlaufenden Schnur

DFB hängt und das in *B* so befestigt ist, daß die Punkte *C, B* auf derselben horizontalen Linie *CB* liegen. Man unterstellt, daß das Laufrad und die Seile keinerlei Eigengewicht haben, und fragt nun, an welchem Punkt das Bleigewicht *D* oder das Laufrad *F* anhalten.

Nach den Prinzipien der Mechanik ist klar, daß das Bleigewicht *D* so tief unterhalb der Horizontale *CB* hinabsinkt, wie es ihm möglich ist; woraus sich ergibt, daß das Lot *DFE* ein *größtes* sein muß. Daher erhält man, wenn man die gegebenen *CF* mit *a; DFB* mit *b; CB* mit *c* und die unbekannte *CE* mit *x* benennt, $EF = \sqrt{aa - xx}$, $FB = \sqrt{aa + cc - 2cx}$ $DFE = b - \sqrt{aa + cc - 2cx} + \sqrt{aa - xx}$, was ein *größtes* sein muß; und daraus seine Differenz $\frac{cdx}{\sqrt{aa + cc - 2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}} = 0$, daraus folgert man $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = 0$ und nach Division durch $x - c$ ergibt sich $2cxx - aax - aac = 0$, dessen eine Wurzel für *CE* einen Wert ergibt, so daß das Lot *ED* durch das Gewicht *D* und das Laufrad *F* geht, wenn sie in Ruhe sind.

Man könnte diese Frage auch auf folgende Art und Weise lösen:

Indem man *EF* mit *y, BF* mit *z* benennt, erhält man $b - z + y =$ ein *größtes;* und daraus $dy = dz$. Nun ist klar, daß das Laufrad *F* den Kreis *CFA* um den Punkt *C* als Mittelpunkt beschreibt; und daraus, wenn man zum unendlich nahe an *F* gelegenen Punkt *f fR* parallel zu *CB* und *fS* senkrecht auf *BF* zieht, erhält man $FR = dy$, und $FS = dz$. Diese sind also untereinander gleich, und infolgedessen sind die kleinen rechtwinkeligen Dreiecke *FRf, FSf,* die außerdem eine gemeinsame Hypotenuse *Ff* haben, gleich und ähnlich; woraus man sieht, daß der Winkel *RFf* gleich dem Winkel *SFf* ist, das heißt, daß der Punkt *F* so auf dem Kreisumfang *FA* gelegen sein muß, daß die von den Geraden *EF, FB* auf den Tangenten in *F* gebildeten Winkel untereinander gleich sind, oder auch (was auf dasselbe hinausläuft), daß die Winkel *BFC, DFC* gleich sind.

Nachdem dies gesetzt ist, und wenn man *FH* so zieht, daß der Winkel *FHC* gleich dem Winkel *CFB* oder *CFD* ist, sind die Dreiecke *CBF, CFH* ähnlich; wie auch die rechtwinkeligen Dreiecke *ECF, EFH,* denn der Winkel *CFE* ist gleich dem Winkel *FHE,* da sie beide die gleichen Winkel *FHC, CFD* zu zwei Rechten ergänzen; und infolgedessen erhält man $CH = \frac{aa}{c}$ und $HE(x - \frac{aa}{c}).EF(y) :: EF(y).EC(x)$. Also $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ durch die Eigenschaft des Kreises, woraus dieselbe Gleichheit wie oben gefolgert werden kann.