Marquis Guillaume Francois Antoine de l'Hospital

Analyse des Infiniment Petits
(1696)

Quelle : Marquis de l'Hospital: Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes. - Nachdruck d. Ausg. Paris 1696 u. 1725. - Paris: ACL-Editions , 1988

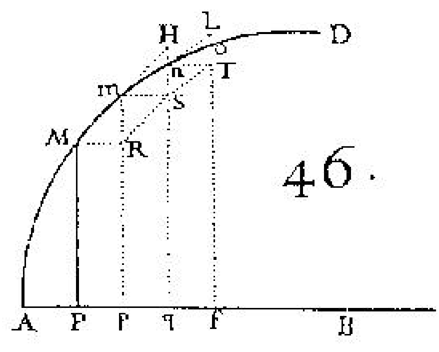
Vierter Abschnitt

Verwendung des Kalküls der Differenzen zur Auffindung der Wende-und der Scheitelpunkte

Da wir im folgenden die zweiten, dritten usw. Differenzen nutzen wollen, ist es nötig, zunächst eine Vorstellung davon zu geben, bevor wir weitergehen.

Definition I

Der unendlich kleine Teil, um den die Differenz einer variablen Größe stetig zunimmt oder abnimmt, wird die *Differenz der Differenz* dieser Größe oder ihre *zweite Differenz* genannt. So stelle man sich eine dritte Ordinate *nq* unendlich nahe zur zweiten Ordinate *mp* vor (Fig. 46), und lege *mS* zu *AB, mH* parallel zu *RS;* als *Hn* bezeichnet man die Differenz *Rm,* oder aber die *zweite Differenz* von *PM.*



Desgleichen wenn man sich eine vierte Ordinate *of* unendlich nahe an der dritten *nq* vorstellt, und man *nT* parallel zu *AB, nL* parallel zu *ST* legt; die Differenz der kleinen Geraden *Hn, Lo* nennt man die *Differenz der zweiten Differenz* oder aber die *dritte Differenz* von *PM.* Und so weiter und so fort.

Zur Beachtung

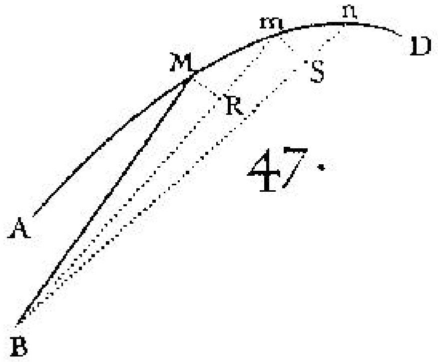
Im folgenden wird jede Differenz mit einer Anzahl d *bezeichnet, die ihre Ordnung oder Art ausdrückt. Zum Beispiel wird mit* dd *die zweite Differenz oder die der zweiten Art bezeichnet; mit* ddd *die dritte Differenz oder die der dritten Art; durch* dddd *die vierte Differenz oder die der vierten Art, und so weiter. So drückt* ddy Hn *aus;* dddy Lo – Hn; *usw.*

Die Potenzen dieser Differenzen hingegen werden durch nachgestellte Hochzahlen gekennzeichnet, wie gewöhnlich bei ganzen Größen. Zum Beispiel ist das Quadrat oder das Kubik von dy dy^2 *oder* dy^3; *das Quadrat oder das Kubik von* ddy *ist dann* ddy^2 *oder* ddy^3, *das von* dddy *ist* $dddy^2$ *oder* $dddy^3$; *das von* ddddy *ist* $ddddy^2$ *oder* $ddddy^3$ *usw.*

Bemerkung I

62. Wenn man jede der Abzissen *AP, Ap, Aq, Af, x* nennt; jede der Ordinaten *PM, pm qn, fo, y;* und jeden der Kurvenabschnitte *AM, Am, An, Ao, u;* ist klar, daß *dx* die Differenzen *Pp, pq, qf* der Abzissen; *dy* die Differenzen *Rm, Sn, To* der Ordinaten, und *du* die Differenzen *Mm, mn, no* der Teile der Kurve *AMD* ausdrückt. Wenn man nun zum Beispiel die zweite Differenz *Hn* der Variablen *PM* nehmen will, muß man sich auf der Achse zwei kleine Teile *Pp, pq* und auf der Kurve zwei andere Teile *Mm, mn* vorstellen, um die zwei Differenzen *Rm, Sn* zu erhalten; und wenn man dann annimmt, daß die kleinen Teile *Pp, pq* untereinander gleich sind, ist klar, daß *dx* gegenüber *dy* und *du* konstant bleibt, weil *Pp,* das zu *pq* wird, gleich bleibt, während *Rm*, das *Sn* wird, und *Mm*, das *mn* wird, variieren. Man könnte nun annehmen, daß die kleinen Teile der Kurve *Mm, mn* untereinander gleich sind, und dann wird *du* gegenüber *dx* und *dy* konstant; und wenn man schließlich annähme, daß *Rm* und *Sn* gleich sind, wäre *dy* gegenüber *dx* und *dy* konstant, und seine Differenz *Hn(ddy)* wäre Null.

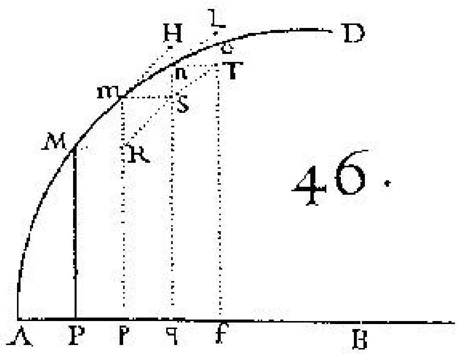
Desgleichen muß man sich, um die dritte Differenz von *PM* oder die Differenz der zweiten Differenz *Hn* zu nehmen, auf der Achse drei kleine Teile *Pp, pq, qf* vorstellen; auf der Kurve drei andere kleine Teile *Mm, mn, no*; und auch auf den Ordinaten drei weitere *Rm, Sn, To;* und dann erhält man *dx* oder *du* oder *dy* als konstante, je nachdem, ob man annimmt, daß die kleinen Teile *Pp, pq, qf* oder *Mm, mn, no* oder *Rm, Sn, To* untereinander gleich sind. Dasselbe gilt für die vierte Differenz, fünfte Differenz usw.



47.

Das alles sollte auch für die Kurven *AMD* gelten (Fig. 47), deren Ordinaten *BM, Bm, Bn* alle von einem Fixpunkt *B* ausgehen, denn um zum Beispiel die zweite Differenz von *BM* zu erhalten, muß man sich zwei weitere Ordinaten *Bm, Bn* vorstellen, die die unendlich kleinen Winkel *MBm, mBn* bilden, und nachdem man den Mittelpunkt *B* der kleinen Kreisbogen *MR, mS* beschrieben hat, wird die Differenz der kleinen Geraden *Rm, Sn* die zweite Differenz von *BM* sein, und man könnte die kleinen Bogen *MR, mS,* oder die kleinen Abschnitte der Kurve *Mm, mn* als konstant annehmen, oder schließlich auch die kleinen Geraden *Rm, Sn.* Dasselbe gilt für die dritte, vierte Differenz usw. der Ordinaten *BM.*

Bemerkung

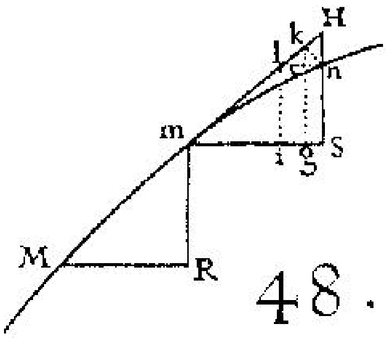


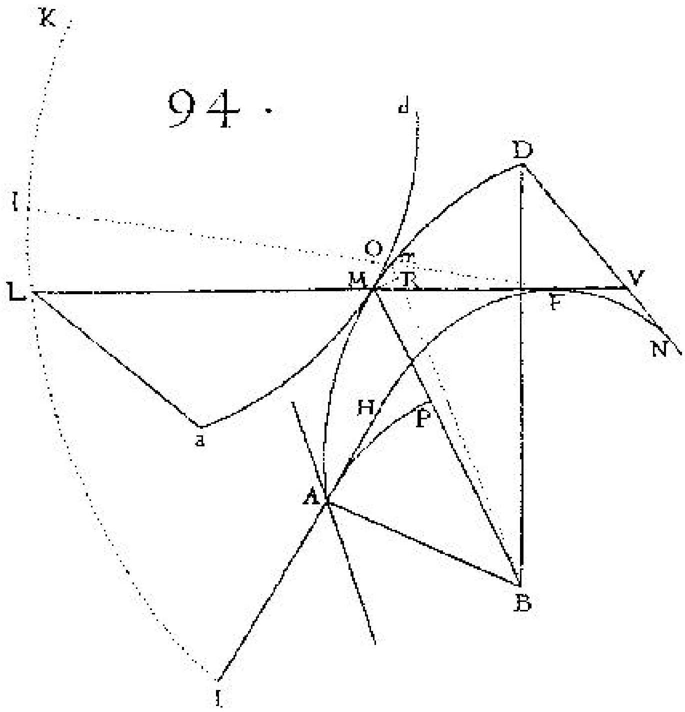
63. (Fig. 46) Zu bemerken ist 1) daß es verschiedene Ordnungen von unendlich kleinen gibt: Daß zum Beispiel *Rm* im Verhältnis zu *PM* unendlich klein und im Verhältnis zu *Hn* unendlich groß ist, desgleichen daß der Raum *MPpm* im Verhältnis zum Raum *APM* unendlich klein und im Verhältnis zum Dreieck *MRm* unendlich groß ist.

2) Daß auch die ganze Differenz *Pf* im Verhältnis zu *AP* unendlich klein ist, weil jede Größe, die die Summe einer endlichen Zahl von unendlich kleinen Größen wie *Pp, pq, qf* im Verhältnis zu einer anderen *AP,* stets im Verhältnis zu dieser selben Größe unendlich klein bleiben wird; und schließlich, daß es erforderlich ist, wenn sie von derselben Ordnung werden soll, daß die Zahl der Größen der unteren Ordnung, aus denen sie sich zusammensetzt, unendlich ist.

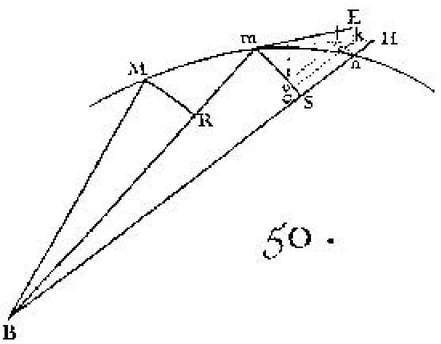
Anmerkung II

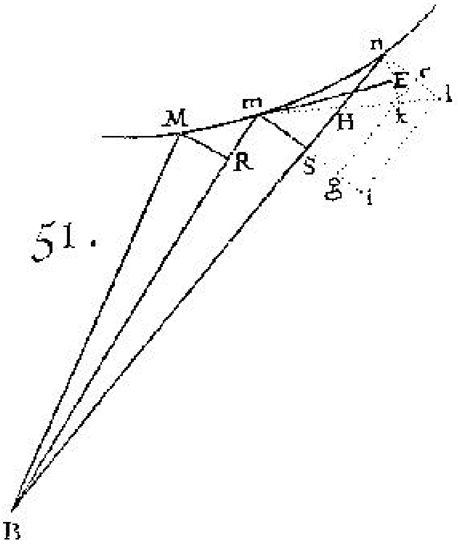
64. Auf diese Art kann man die zweiten Differenzen in allen möglichen Annahmen bezeichnen.





1) (Fig. 48, 94) In den Kurven, wo die Ordinaten *mR*, *nS* untereinander parallel sind, verlängert man die kleine Gerade *Mm* bis *H*, wo sie auf die Ordinate *Sn* trifft; und nachdem man vom Mittelpunkt *m* mit dem Radius *mn*, den Bogen *nk* beschrieben hat, zieht man die kleinen Geraden *nl*, *li*, *kcg* parallel zu *mS* und zu *Sn*. Wenn man danach will, daß *dx* konstant ist, das heißt, daß *MR* gleich *mS* ist, ist klar, daß das Dreieck *mSH* gleich und ähnlich dem Dreieck *MRm* ist, und daß *Hn* gleich *ddy* ist, das heißt, die Differenz von *Rm* und *Sn*, und daß $Hk = ddu$ ist. Wenn man aber annimt, daß *du* konstant ist, das heißt, daß $Mm = mn$ oder *mk*, ist offensichtlich, daß das Dreieck *mgk* gleich und ähnlich dem Dreieck *MRm* ist, und daß so $kc = ddy$ und *Sg* oder $cn = ddx$. Wenn man schließlich *dy* als Konstante nimmt, das heißt, $mR = nS$, ergibt sich, daß das Dreieck *mil* gleich und ähnlich dem Dreieck *MRm* ist, und daß so *iS* oder $nl = ddx$ und $lk = ddu$.





2) (Fig. 51) Bei den Kurven, deren Ordinaten *BM, Bm, Bn,* vom selben Punkt *B* ausgehen, beschreibt man vom Mittelpunkt *B* die Bogen *MR, mS,* die dann als kleine senkrecht auf *Bm, Bn* stehende Geraden betrachtet werden[1], und nachdem man *Mm* in *E* verlängert und vom Mittelpunkt *m* des Intervalls *mn* , den kleinen Bogen *nkE* beschrieben hat, bildet man den Winkel *EmH = mBn,* und zieht die kleinen Geraden *nl, li, kcg* parallel zu *mS* und zu *Sn.*

Dies gesetzt, ergibt, wegen des bei *S* rechtwinkeligen Dreiecks *BSm* den Winkel *BmS* + Winkel *mBn,* oder*EmH* einen rechten Winkel; folglich ist der Winkel *BmE* gleich einem rechten +*Smh;* er ist außerdem gleich dem rechten Winkel *MRm* + Winkel *RMm*, weil er Außenwinkel des Dreiecks *RMm* ist. Also ist *SmH = RMm.*

Hieraus ergibt sich 1) Daß, wenn *dx* konstant sein soll, das heißt, wenn die kleinen Bogen *MR, mS* untereinander gleich sein sollen, das Dreieck *SmH* gleich und ähnlich dem Dreieck *RMm* ist, und daß sowohl *Hn = ddy* und *Hk = ddu.* 2) Daß bei Annahme von *du* als Konstanter das Dreieck *gmk* gleich und ähnlich dem Dreieck *RMm* ist; und daß so *kc ddy* ausdrückt und *Sg* oder *cn ddx.* 3) Schließlich, daß bei Annahme von *dy* als Konstanter, die Dreiecke *iml, RMm* gleich und ähnlich sind und daß so *iS* oder *ln = ddx,* und *lk = ddu.*

Proposition I

Problem

65. *Die Differenz einer aus beliebigen Differenzen zusammengesetzten Größe nehmen.*

Man nehme als Konstante die Differenz, die man wünscht, und indem man die anderen als variable Größen behandelt, bedient man sich der im vorigen Abschnitt aufgestellten Regeln.

1 ???

Die Differenz von $\frac{ydy}{dx}$, indem man dx als Konstante annimmt, ist dann $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$, und $\frac{dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$, indem man dy als Konstante annimmt.

Die Differenz von $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, indem man dx als Konstante annimmt, ist dann $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, und das ganze dividiert durch dx, das heißt, $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; und indem man dy als Konstante annimmt, wird daraus

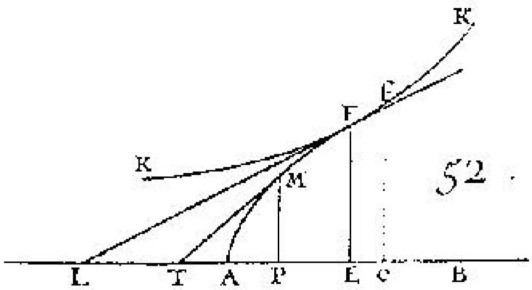
$dzdx\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdx^2ddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - zddx\sqrt{dx^2 + dy^2}$, das Ganze durch dx^2, dividiert, das heißt $\frac{dzdx^3 + dzdxdy^2 - zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

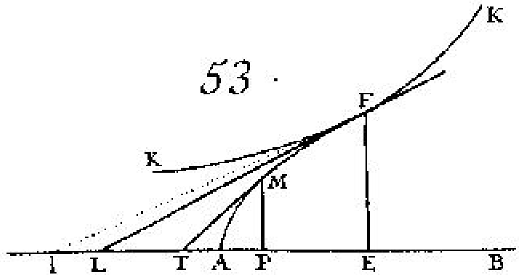
Die Differenz von $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, wobei man dx als Konstante annimmt, ist dann $\overline{dy^2 + yddy}\sqrt{dx^2 + dy^2} - \frac{ydy^2ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, das ganze dividiert durch $dx^2 + dy^2$, das heiß $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy}{\overline{dx^2 + ay^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; und wenn man dy als Konstante annimmt, ergibt sich $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydydxddx}{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

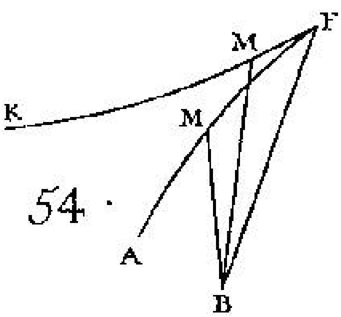
Die Differenz von $\frac{\overline{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}}{-dxddy}$ oder $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, wobei man dx als Konstante annimmt, ist dann $\frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

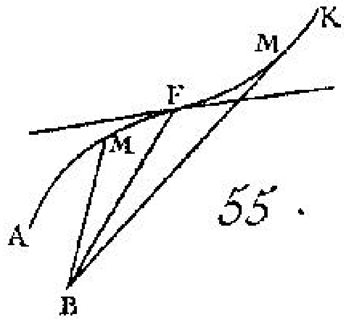
Zu bermerken ist jedoch, daß im letzteren Fall nicht gestattet ist, dy als Konstante anzunehmen, denn unter dieser Annahme wäre die Differenz ddy Null; infolgedessen darf sie in der angenommen Größe nicht anzutreffen sein.

Definition II







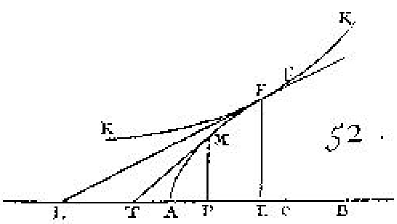


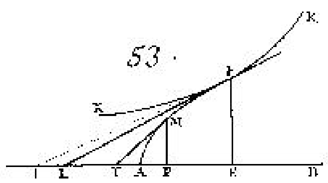
(Fig. 52, 53, 54, 55) Wenn eine gekrümmte Linie *AFK* zum Teil konkav und zum Teil konvex ist im Hinblick auf eine Gerade *AB* oder einen festen Punkt *B*; wenn der Punkt *F*, der den konkaven vom konvexen Teil trennt und infolgedessen das Ende des einen und der Beginn des anderen ist, wird er Wendepunkt genannt, wenn die bis *F* gelangte Kurve ihren Weg in die selbe Richtung fortsetzt, und er wird Scheitelpunkt genannt, wenn sie ihren Weg wieder zurück in Richtung ihres Ursprungs nimmt.

Proposition II

Allgemeines Problem

66. *Bei gegebener Natur der gekrümmten Linie* AFK *sollen der Wende oder Scheitelpunkt* F *bestimmt werden.*





(Fig. 52, 53) Nehmen wir zunächst einmal an, daß die gekrümmte Linie *AFK* als Durchmesser eine Gerade *AB* hat und daß ihre Ordinaten *PM, EF* usw. untereinander parallel sind. Wenn man durch den Punkt *F* die Ordinate *FE* mit der Tangente *FL* legt und durch einen beliebigen Punkt des Abschnitts *AF* eine Ordinate *MP* mit einer Tangente *MT*, dann ist klar,

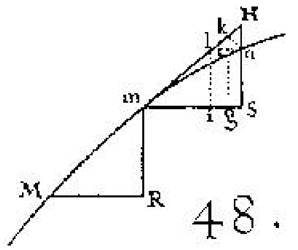
1) In den Kurven mit Wendepunkt, daß wenn die Abzisse *AP* stetig zunimmt, auch der Abschnitt *AT* des Durchmessers zwischen dem Ursprung der x und dem Schnittpunkt der Tangente ebenfalls zunimmt, bis der Punkt *P* auf *E* fällt, wonach er abnimmt; woraus man sieht, daß *AT* in *P* angelegt, zu einem *größten* Wert der *AL* werden muß, wenn der Punkt *P* auf den gesuchten Punkt *E* fällt.

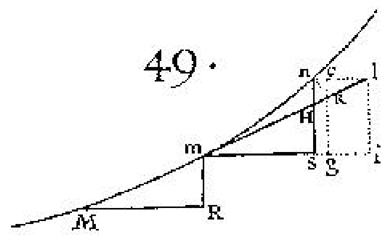
2) In den Kurven mit Scheitelpunkt, daß, wenn der Teil *AT* stetig zunimmt, die Abzisse *AP* auch zunimmt, bis der Punkt *T* auf *L* fällt, wonach sie abnimmt; woraus man sieht, daß *AP* in *T* angelegt, ein *größtes AE* werden muß, wenn der Punkt *T* auf *L* fällt.

Wenn man nun *AE*, x nennt; *EF*, y; erhält man $AL = \frac{ydx}{dy} - x$, dessen Differenz $\frac{dy^2 - ydxddy}{dy^2} - dx$ ist (wobei dx als konstant angenommen wird). Dies durch die Differenz von *AE*, also durch dx geteilt, muß Null[2] oder unendlich werden, was $-\frac{yddy}{dy^2} = 0$ oder unendlich ergibt; so daß durch Multiplikation mit dy^2 und Division mit $-y$ sich $ddy = 0$ oder unendlich ergibt; was in der Folge als allgemeine Formel zur Auffindung des Wende oder Scheitelpunkts *F* dienen wird. Denn wenn die Natur der Kurve *AFK* gegeben ist, erhält man einen Wert von dy in dx; und indem man die Differenz dieses Werts nimmt, wobei man dx als konstant annimmt, findet man einen Wert von ddy in dx^2, der zunächst als Null und dann als unendlich in der einen oder anderen dieser Annahmen dazu dienen wird, für *AE* einen solchen Wert zu finden, daß die Ordinate *EF* die Kurve *AFK* im Wende- oder Scheitelpunkt *F* schneidet.

Der Usprung *A* der x kann so gelegen sein, daß $AL = x - \frac{ydx}{ay}$, anstatt $\frac{ydx}{dy} - x$, und daß *AL* oder *AE* ein *kleinstes* ist, anstatt ein *größtes* zu sein: Da aber die Folge immer dieselbe ist, und da das keinerlei Schwierigkeiten machen kann, halte ich mich damit nicht auf.

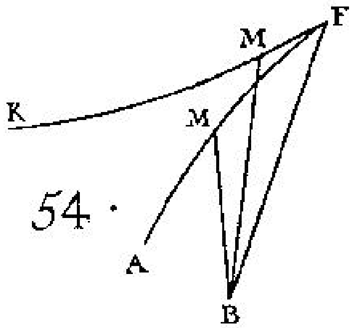
Dasselbe läßt sich auch auf folgende andere Weise finden (Fig. 48, 49).

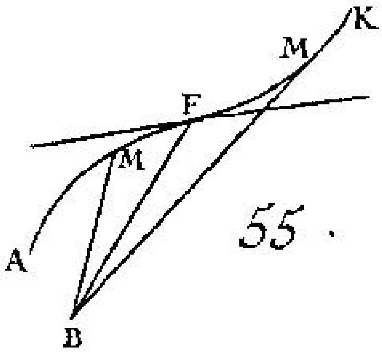


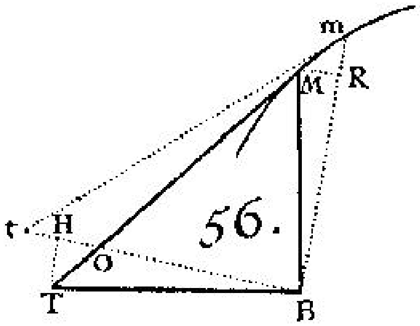


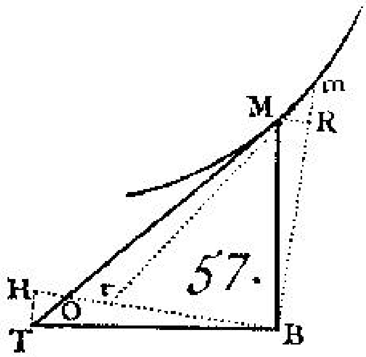
2 ???

Es ist klar, daß bei Annahme von *dx* als konstant und Zunahme der Ordinaten *y* *Sn* im konkaven Teil kleiner ist als *SH* oder *Rm* und größer im konvexen Teil. Woraus man sieht, daß der Wert von *Hn(ddy)* am Wende- oder am Scheitelpunkt *F* vom positiven zum negativen übergehen muß; und folglich Null oder unendlich sein muß.[3]







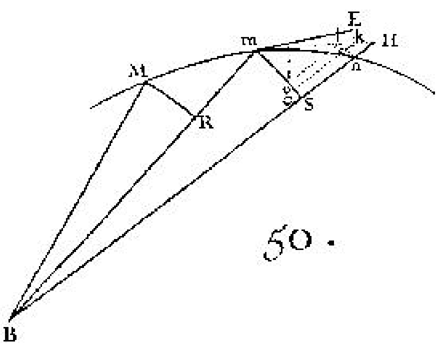


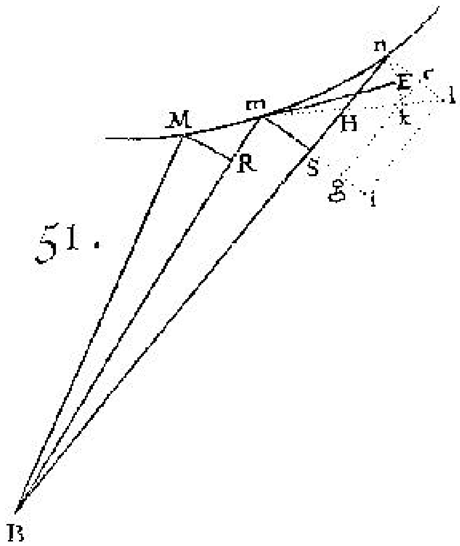
Nehmen wir zweitens an, daß die Kurve *AFK* als Ordinaten die Geraden *BM, BF, BM* hat, die alle von einem gleichen Punkt *B* ausgehen (Fig. 54, 55, 56, 57). Wenn man eine beliebige Ordinate *BM* mit einer Tangente *MT* zieht, die *BT* senkrecht zu *BM* im Punkt *T* trifft, und nachdem man den Punkt *m* unendlich nahe zu *M* genommen hat und die Ordinate *Bm*, die Tangente *mt*, und die Senkrechte *Bt* auf *Bm* zieht, die *MT* in *O* trifft; ist sichtbar (wenn man annimmt, daß die Ordinate *BM*, die zu *Bm* wird, zunimmt), daß *Bt* im konkaven Teil größer ist als *BO*, und daß es dagegen im konvexen Teil kleiner ist, sodaß der Wert von *Ot* am Wende- oder Scheitelpunkt *F* vom positiven zum negativen geht.

Wenn man danach um den Mittelpunkt *B* die kleinen Kreisbogen *MR, TH* beschreibt (Fig. 56), bildet man die ähnlichen Dreiecke *mRM, MBT, THO* und die kleinen ähnlichen Sektoren *BMR, BTH.* Wenn man daher *BM* mit *y; MR* mit *dx* benennt, erhält man $mR(dy).RM(dx) :: BM(y).BT = \frac{ydx}{dy} :: MR(dx).TH = \frac{dx^2}{dy} :: TH\left(\frac{dx^2}{dy}\right).HO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Wenn man nun die Differenz von $BT\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ bei Annahme von *dx* als konstant nimmt, ergibt sich *Bt*

3 Art. 47

– *BT* oder $Ht = \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$; und danach *OH* + *Ht* oder $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 ydxddy}{dy^2}$. Woraus durch Multiplikation mit dy^2 und Division mit *dx* folgt, daß der Wert von $dx^2 + dy^2 - yddy$ am Wende- oder Scheitelpunkt *F* Null oder unendlich ist. Folglich, wenn die Natur der Linie *AFK* gegeben ist (Fig. 54, 55), erhält man die Werte von *dy* in *dx*, und von *ddy* in dx^2, welche in $dx^2 + dy^2 - yddy$ eingesetzt eine Größe bilden, die zunächst gleich Null und dann gleich unendlich ist und dazu dient, für *BF* einen Wert zu finden, der bei Beschreiben eines Kreises um den Mittelpunkt *B* mit diesem Strahl die Kurve *AFK* im Wende- oder Scheitelpunkt *F* schneidet. Was gefordert war.

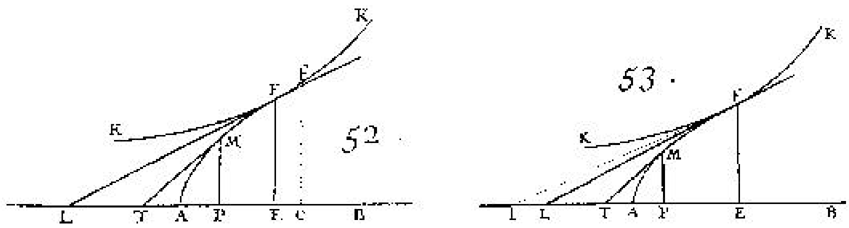




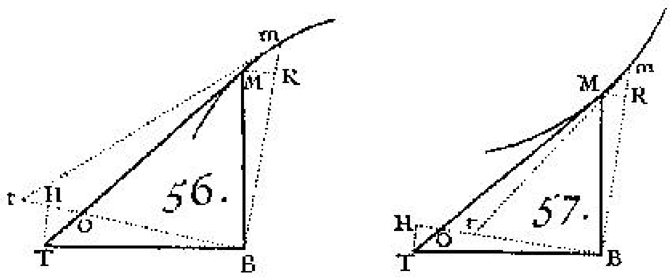
Um dasselbe noch auf eine andere Art und Weise zu finden (Fig. 50, 51), muß man betrachten, daß der Winkel *BmE* im konkaven Teil größer ist als der Winkel *Bmn*, und daß er im konvexen Teil dagegen kleiner ist, und folglich, daß der Winkel *BmE – Bmn* oder *Emn*, das heißt, der Bogen *En*, der dessen Maß ist, im gesuchten Punkt *F* vom positiven zum negativen wird. Wenn man nun *dx* als konstant annimmt, ergeben die rechtwinkeligen ähnlichen Dreiecke *HmS, Hnk* dann $Hm(du).mS(dx) :: Hn(-ddy).nk = -\frac{dxddy}{du}$, wo man beobachten muß, daß der Wert *Hn* negativ ist, weil *Bm(y)* zunnimmt, und *Rm(dy)* abnimmt. Doch infolge der ähnlichen Sektoren *BmS, mEk* erhält man $Bm(y).mS(dx) :: mE(du).Ek = \frac{dxdu}{y}$, und danach *Ek* + *kn* oder $En = \frac{dxdu^2 - ydxddy}{ydu}$. Woraus sich durch Multiplikation mit *ydu* und Division durch *dx* ergibt, daß $du^2 - yddy$ oder $dx^2 + dy^2$ im gesuchten Punkt *F* vom positiven zum negativen wird.

Wenn man annimmt, daß *y* unendlich wird, werden die Ausdrücke dx^2 und dy^2 im Verhältnis zu *yddy* Null; und infolgedessen verwandelt sich die Formel $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ oder unendlich in die Formel *–yddy=0* oder unendlich, das heißt, durch Division mit *–y*, $ddy = 0$ oder unendlich, was die Formel des ersten Falls ist. Was auch so sein muß, da die Ordinaten *BM, BF, BM* dann parallel werden.

Zwischenbemerkung



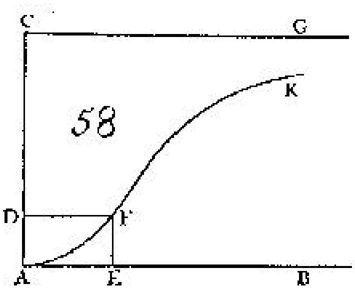
67. (Fig. 52, 53) Wenn $ddy = 0$, ist klar, daß die Differenz von *AL* im Verhältnis zu der von *AE* Null sein muß, weil die beiden unendlich nahen Tangenten *FL, fL* ineinander übergehen und nur noch eine einzige gerade Linie *fFL* bilden. Wenn aber *ddy* gegen unendlich geht, muß die Differenz von *AL* im Verhältnis zu der von *AE* unendlich groß sein, oder (was dasselbe ist) die Differenz von *AE* ist unendlich klein im Verhältnis zu der von *AL*; und infolgedessen kann man durch denselben Punkt *F* zwei Tangenten *FL, Fl* legen, die untereinander einen unendlich kleinen Winkel *LFl* bilden.



Desgleichen, wenn $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$, ist sichtbar (Fig. 56, 57), daß *Ot* im Verhältnis zu *MR* Null werden muß; und daß daher die beiden unendlich nahe beieinander liegenden Tangenten *MT, mt* ineinander fallen, wenn der Punkt *M* zu einem Wendepunkt oder Scheitelpunkt wird: Wenn aber dagegen $dx^2 + dy^2 - yddy$ gegen unendlich geht, muß *Ot* im Verhältnis zu *MR* unendlich sein, oder (was dasselbe ist) *MR* im Verhältnis zu *Ot* unendlich klein; und infolgedessen muß der Punkt *m* auf den Punkt *M* fallen, das heißt, daß man durch denselben Punkt *M* zwei Tangenten ziehen kann, die untereinander einen unendlich kleinen Winkel bilden, wenn dieser Punkt ein Wende- oder Scheitelpunkt wird.

Es ist offensichtlich, daß die Tangente im Wende- oder Scheitelpunkt *F* nach Verlängerung die Kurve *AFK* im selben Punkt berührt und schneidet.

Beispiel I



68. (Fig. 58) Gegeben sei eine gekrümmte Linie *AFK*, die als Durchmesser die Gerade *AB* hat, und bei der die Relation der Abzisse *AE(x)* zur Ordinate *EF(y)* durch die Gleichung $axx = xxy + aay$ ausgedrückt wird. Es geht darum, für *AE* einen Wert zu finden, bei dem die Ordinate *EF* die Kurve *AFK* im Wendepunkt *F* schneidet.

Die Gleichung der Kurve ist $y = \frac{axx}{xx + aa}$; und daher ist $dy = \frac{za^3xdx}{\overline{xx+aa}^2}$, und indem man die Differenz dieser Größe unter Annahme von konstantem dx nimmt und sie danach gleich Null setzt, findet man $\frac{za^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 - 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx+aa}}{\overline{xx+aa}^4} = 0$; was durch $\overline{xx+aa}^4$ multipliziert und durch $2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}$ geteilt dann $xx + aa - 4xx = 0$ ergibt, woraus man $AE(x) = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ erhält.

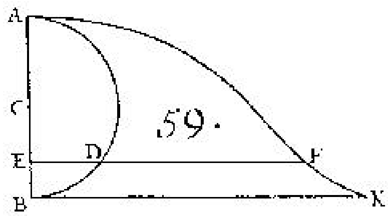
Wenn man an die Stelle von xx seinen Wert $\frac{1}{3}aa$ in die Kurvengleichung $y = \frac{axx}{xx + aa}$ einsetzt, findet man $EF(y) = \frac{1}{4}a$; so daß man den Wendepunkt *F* bestimmen kann, ohne anzunehmen, daß die Kurve *AFK* bechrieben ist.

Wenn man *AC* parallel zu den Ordinaten *EF* zieht und mit der gegebenen Geraden *a* gleichsetzt, und *CG* parallel zu *AB* zieht, wird sie die Asymptote der Kurve *AFK*. Denn wenn man x als unendlich nimmt, kann man xx für $xx + aa$ nehmen, und daher ändert sich die Kurvengleichung $y = \frac{axx}{xx + aa}$ in die Gleichung $y = a$.

Beispiel II

69. Sei $y - a = \overline{x-a}^{\frac{3}{5}}$. Dann ist $dy = \frac{3}{5}\overline{x-a}^{-\frac{3}{5}}dx$, und $ddy = -\frac{6}{25}\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}dx^2 = \frac{-6dx^2}{25\sqrt[5]{\overline{x-a}^{7}}}$, wenn man dx als konstant annimmt. Wenn man diesen Bruch gleich Null gesetzt annimmt, findet man $-6dx^2 = 0$ woraus sich nichts entnehmen läßt: Man muß ihn als unendlich groß annehmen und infolgedessen seinen Nenner $25\sqrt[5]{x-a}$ unendlich klein oder Null. Daher die unbekannte *AE(x) = a.*

Beispiel III

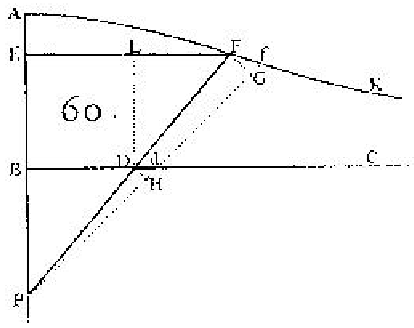


70. (Fig. 59) Gegeben sei eine gestreckte Halbzykloide *AFK*, deren Basis *BK* größer ist als der halbe Umfang *ADB* des erzeugenden Kreises mit dem Mittelpunkt *C*. Es soll auf dem Durchmesser der Punkt *E* so bestimmt werden, daß die Ordinate *EF* die Halbzykloide im Wendepunkt *F* trifft.

Nachdem man die bekannten *ADB* mit *a; BK* mit *b; AB* mit *2c* und die unbekannten *AE* mit *x; ED* mit *z* und den Bogen *AD* mit u, *EF* mit *y* benannt hat, erhält man durch die Eigenschaft der Zykloide $y = z + \frac{bu}{a}$ und danach $dy = dz + \frac{bdu}{a}$. Nun erhält man durch die Eigenschaft des Kreises $z = \sqrt{2cx - xx}$, $dz = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{2cx - xx}}$ und $du\left(\sqrt{dx^3 + dz^2}\right) = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$. Wenn man also für dz und du ihre Werte einsetzt, findet man $dy = \frac{acdx - axdx + bcdx}{a\sqrt{2cx - xx}}$, deren Differenz (indem man dx als konstant annimt) dann $\frac{\overline{bcx - acc - bcc} \times dx^2}{\overline{2cx - xx} \times \sqrt{2cx - xx}} = 0$ ergibt, woraus man $AE(x) = c + \frac{ac}{b}$ und $CE = \frac{ac}{b}$ erhält.

Sollte ein Wendepunkt *F* vorliegen, ist klar, daß *b* größer als *a* sein muß, denn wenn es kleiner wäre, wäre *CE* größer als *CB*.

Beispiel IV



71. (Fig. 60) Gesucht wird der Wendepunkt F der Konchoide (der Muschellinie) *AFK* von *Nicomedes*, die als Pol den Punkt P und als Asymptote die Gerade BC hat. Die Konchoide hat die Eigenschaft, daß nach Ziehen der Gerade *PF*, die die Asymptote BC in D trifft, vom Pol P zu einem seiner beliebigen Punkte F die Gerade *PF* immer gleich einer gegebenen Geraden a ist.

Nachdem man *PA* senkrecht und *FE* parallel zu *BC* gezogen hat, benennt man die bekannten *AB* oder *FD* mit *a; BP* mit *b* und die unbekannten *BE* mit *x*, *EF* mit *y;* und indem man *DL* parallel zu *BA* zieht, ergeben die ähnlichen Dreiecke *DLF* und *PEF* dann $DL(x).LF(\sqrt{aa-xx}) :: PE(b+x).EF\,(y) = \frac{\overline{b+x}\sqrt{aa-xx}}{x}$, deren Differenz $dy = \frac{x^3dx + aabdx}{xx\sqrt{aa-xx}}$ ist. Wenn man also die Differenz dieser Größe nimmt, und sie mit Null gleichsetzt, erhält man die Gleichung $\frac{\overline{2a+b-aax^3-3aabxx}\times dx^2}{\overline{aax^3-x^5}\times\sqrt{aa-xx}} = 0$, die sich auf $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$ reduziert, deren eine Wurzel für *BE* den gesuchten Wert ergibt.

Wenn $a = b$, verwandelt sich die vorstehende Gleichung in die Gleichung $x^3 + 3axx - 2a^3 = 0$, welche durch $x + a$ geteilt, dann $xx + 2ax - 2aa = 0$ ergibt; und danach $BE(x) = -a + \sqrt{3aa}$.