Le Marquis de L'Hospital

Analyse des infiniment petits

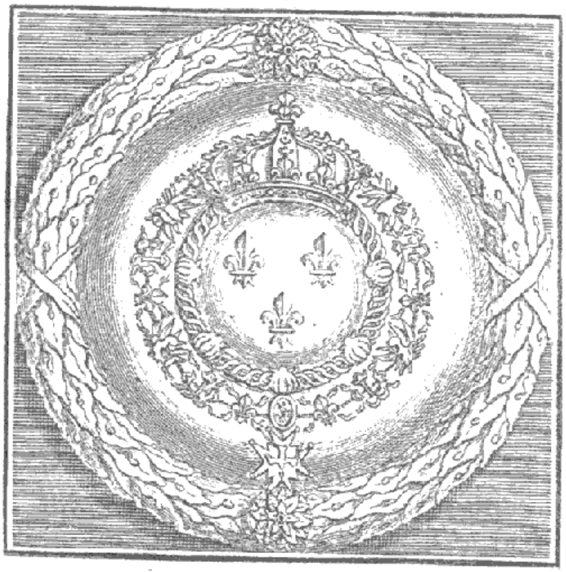
Pour l'intelligence des lignes courbes

ANALYSE

DES

INFINIMENT PETITS,

Pour l'intelligence des lignes courbes.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DC. XCVI.

Quelle : Marquis de l'Hospital: Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes . - Nachdruck d. Ausg. Paris 1696 u. 1725. - Paris: ACL-Editions , 1988

Vorwort

Die in diesem Werk erläuterte Analysis setzt die gewöhnliche Analysis voraus, doch sie unterscheidet sich stark von ihr. Die gewöhnliche Analysis behandelt nur endliche Größen, diese hier aber stößt bis zum Unendlichen vor. Sie vergleicht unendlich kleine Differenzen endlicher Größen, sie deckt die Beziehungen zwischen diesen Differenzen auf und führt dadurch zur Erkenntnis jener endlichen Größen, die im Vergleich zu jenen unendlich kleinen wie ebensoviele Unendliche sind. Man könnte sogar sagen, daß diese Analysis über das Unendliche hinausreicht: sie beschränkt sich nämlich nicht auf die unendlich kleinen Differenzen, sondern deckt die Beziehungen zwischen den Differenzen dieser Differenzen, ja sogar zwischen den Differenzen dritter, vierter Ordnung undsofort auf, ohne je ein Ende zu finden, wo sie zum Stillstand käme. So daß sie nicht nur das Unendliche umfaßt, sondern das Unendliche des Unendlichen, oder eine Unendlichkeit von Unendlichkeiten.
Nur eine solche Analysis könnte uns bis zu den wahren Grundlagen der gekrümmten Linien (Bögen) führen. Denn da diese Kurven nur Vielecke mit unendlich vielen Seiten sind und sich nur durch die verschiedenen Winkel unterscheiden, die diese unendlich kleinen Seiten miteinander bilden, gebührt es nur der Analysis des unendlich Kleinen, die Lage dieser Seiten zu bestimmen, um zu der von ihnen gebildeten Krümmung zu gelangen, das heißt zu den Tangenten dieser Kurven, zu ihren Senkrechten, ihren Inflexions- und Rückkehrpunkten, den Strahlen, die davon reflektiert oder gebrochen werden usw.
Die in den Kurven einbeschriebenen oder von ihnen umschriebenen Vielecke, die durch unendliche Vermehrung der Zahl ihrer Seiten schließlich in Kurven übergehen, sind allzeit für diese Kurven selbst gehalten worden. Dabei war man stehen geblieben: Erst mit der Entdeckung der hier zu beschreibenden Analysis konnte die Tragweite und Fruchtbarkeit jenes Gedankens begriffen werden. Was uns von den Alten hierzu überliefert wurde, hauptsächlich von Archimedes, ist bewunderswert. Aber außer daß die Alten nur sehr wenige Kurven behandelt haben, und diese nur oberflächlich, handelt es sich fast allenthalben nur um besondere und ungeordnete Aussagen, die keine regelmäßige und durchgehaltene Methode erkennen lassen. Das kann man ihnen gerechterweise allerdings nicht vorwerfen, sie brauchen außergewöhnliches Genie[1] um soviel Dunkel zu durchdringen und als erste in unbekannte Gefilde vorzustoßen. Auch wenn sie nicht weit gekommen sind und große Umwege machten, sind sie nach Vietas[2] Aussage wenigstens nicht fehlgegangen, und je schwieriger und dorniger die

[1] *Archimedis de lineis Spiralibus traetarum cum bis terque legissem, totasque animi vires intendiffem, ut subtilissimarum demonstrationum de apiralium tangentibus artificium adsequerer; nusquamtamen, ingenue fatebor, ab earum contemplatione ita certus recessi, quin sorupulus animo semper hareret, vim illius demonstrationis me non percepisse totam & c..* Bullialdus Præf. de lineis spiralibus.

[2] *Si verè Archimedes, fallaciter conclusit Euclides, & c.* Suppl. Geomet.

von ihnen eingeschlagenen Pfade waren, desto bewundernswerter ist es, daß sie sich nicht verirrten. Kurz gesagt hat es nicht den Anschein, daß es die Alten zu ihrer Zeit hätten besser machen können: Sie haben getan, was unsere größten Geister an ihrer Stelle getan hätten; und wären sie heute unter uns, hätten sie wohl dieselben Ansichten wie wir. Das alles ist eine Folge der natürlicher Gleichheit des Denkens und des notwendigen Aufbauens von Entdeckungen aufeinander.

Daher überrascht es nicht, daß die Alten nicht weiter gelangt sind; aber man kann nicht genugsam staunen, daß bedeutende Männer und bestimmt ebenso bedeutende wie die Alten, so lange dabei stehen blieben; daß sie sich in einer fast abergläubischen Bewunderung von deren Werken damit begnügten, sie zu lesen und zu kommentieren, ohne sich mehr dabei zu denken, als sie unbedingt mußten, um ihnen folgen zu können; ohne sich das Verbrechen eines selbständigen Gedankens zu erlauben, und mit ihren Ansichten über das hinaus zu gelangen, was die Alten entdeckten. Auf diese Art tummelten sich allerhand Leute, schrieben fleißig immer mehr Bücher und kamen trotzdem nicht von der Stelle. Über mehrere Jahrhunderte überzogen alle diese Bemühungen die Welt nur mit ehrerbietigen Kommentaren und immer neuen, häufig erbärmlichen Übersetzungen. So stand es um die Mathematik und die ganze Philosophie bis zu Monsieur Descartes. Von seinem Genie und dem Bewußtsein seiner Überlegenheit getrieben, wandte sich dieser große Mann von den Alten ab, um genau dem Grunde nachzugehen, dem die Alten nachgegangen waren; und diese glückliche, als Auflehnung betrachtete Kühnheit trug uns eine Unzahl neuer und nützlicher Ansichten über die Physik und über die Geometrie ein. Da gingen uns erst die Augen auf und trauten wir uns zu denken.

Um nur von der Mathematik zu sprechen, um die es hier allein geht, hat Monsieur Descartes dort angefangen, wo die Alten aufgehört hatten, und er begann mit der Lösung eines Problems, von dem Pappus[3] sagt, daß sie dort alle stecken geblieben sind. Man weiß, wie weit er die Analysis und die Geometrie gebracht hat, und wie die von ihm hergestellte Verbindung zwischen den beiden die Lösung einer Unzahl von Problemen erleichtert, die vor ihm undurchdringlich schienen. Aber da er sich hauptsächlich der Lösung von Gleichungen widmete, beachtete er die Kurven nicht, obwohl sie ihn dazu hätten dienen können, deren Wurzeln zu finden, weil die gewöhnliche Analyse ihm dafür genügte, kam er gar nicht erst darauf, eine weitere zu suchen. Es hat es dennoch nicht unterlassen, sich ihrer glücklicherweiser bei der Suche nach den Tangenten zu bedienen; und die Methode, die er dafür entdeckt hat, erschien ihm so schön, daß er ohne Bedenken sagte, *dieses Problem sei das nützlichste und das allgemeinste, das er nicht nur wisse, sondern sogar in der Geometrie jemals zu wissen begehrt habe*.[4] Da durch Monsieur Descartes Geometrie die Konstruktion von Problemen durch die Auflösung von Gleichungen sehr in Mode gekommen ist, und sie große Möglichkeiten dafür geboten hat, hat sich die Mehrzahl der Geometer ihr gewidmet, und sie haben auch neue Entdeckungen dort gemacht, die auch heute noch vermehrt und vervollkommnet werden.

Monsieur Pascal hat seinen Blick in eine ganz andere Richtung gelenkt: Er untersuchte die Kurven selbst, und zwar in der Form des Vielecks; er suchte nach den Längen einiger von ihnen, nach dem von ihnen umschlossenen Raum, nach dem Körper, den diese Räume umschreiben, dem Schwerpunkt der einen oder anderen usw. Nur durch Betrachtung ihrer Elemente, d.h. der unendlich Kleinen, entdeckte er allgemeine und um so verblüffendere Methoden, da er nur durch Kopfarbeit ohne Analysis dazu gelangt zu sein scheint.

---

3 *Collect. Mathem. Lib. 7. initio.*

4 *Geomet. liv.*

Kurz nach der Veröffentlichung der Methode von Monsieur Descartes für die Tangenten hat auch Monsieur de Fermat eine gefunden, von der Monsieur Descartes schließlich zugab[5], daß sie in vieler Hinsicht viel einfacher ist als die seinige. Allerdings nicht so einfach, wie sie Monsieur Barrow seither in genauer Betrachtung der Natur der Vielecke gemacht hat, die dem Geist ganz natürlich ein kleines Dreieck aus einem Kurvenpartikel präsentiert, das zwischen zwei unendlich nahen Ordinaten gefaßt ist, der Differenz dieser Abzissen und der der entsprechenden Abschnitte; und dieses Dreieck ist ähnlich dem, das durch die Tangente, die Applikate und die Subtangente gebildet wird: So daß letztere Methode durch simple Analogie die ganzen Berechnungen erspart, die die Methode von Monsieur Descartes erfordert, und die diese Methode selbst zuvor erheischte. Monsieur Barrow[6] blieb dort nicht stehen. Er erfand auch eine Art Kalkül eigens für diese Methode; nur mußte er dazu genau wie in der Methode von Monsieur Descartes die Brüche weglassen und alle radikalen Zeichen streichen, um sie nutzen zu können.

Abgelöst wurde dieser Kalkül durch den des berühmten Monsieur Leibniz[7]; dieser gelehrte Geometer hat dort begonnen, wo Monsieur Barrow und die anderen aufgehört hatten. Sein Kalkül hat ihn in bislang unbekannte Gefilde geführt und er hat Entdeckungen gemacht, die die fähigsten Mathematiker Europas zum Staunen brauchten. Die Messieurs Bernoulli waren die Ersten, denen die Schönheit dieses Kalküls auffiel: Sie trieben ihn um so viel weiter, daß sie imstande waren, Schwierigkeiten zu überwinden, die man zuvor nie anzugehen gewagt hätte. Die Ausdehnung dieses Kalküls ist immens: Er paßt für die mechanischen Kurven wie für die geometrischen; die Wurzeln sind ihm gleichgültig und bisweilen sogar recht bequem; er erstreckt sich auf soviele Unbestimmte wie man wünscht; der Vergleich der unendlich Kleinen aller Arten ist mit ihm gleichermaßen einfach. Und von dort entstand eine Unzahl verblüffender Entdeckungen sowohl über die gekrümmten als auch über die geraden Tangenten, zu den Fragen De maximis et minimis, zu den Inflexions- und Rückkehrpunkte der Kurven, zu den Evoluten, zu den Kaustiken durch Reflexion oder Brechung usw. wie man aus diesem Werk ersehen wird.

Ich unterteile es in zehn Abschnitte. Der erste enthält die Grundlagen des Kalküls der Differenz. Der zweite legt dar, wie man sich ihrer bedienen muß, um die Tangenten aller Arten von Kurven zu finden, wie viele Unbestimmte es in der sie ausdrückenden Gleichung auch geben mag, während Monsieur Craige[8] nicht glaubte, daß er bis zu den mechanischen oder transzendenten Kurven reiche. Der dritte Abschnitt, wie dieser Kalkül dazu dient, alle Fragen De maximis et minimis zu lösen. Der vierte Abschnitt, wie er die Inflexions- und Rückkehrpunkte der Kurven liefert. Der fünfte Abschnitt zeigt seine Anwendung, um die Evoluten von Monsieur Huygens in allen Arten von Kurven zu finden. Der sechste und siebte Abschnitt zeigen auf, wie sich aus ihm durch Reflexion und Brechung die Kaustiken ergeben, die der berühmte Monsieur Tschirnhaus erfunden hat, wiederum für alle Arten von Kurven. Der achte Abschnitt zeigt die Verwendung dieses Kalküls, um die Punkte von Kurven zu finden, die eine unendliche Zahl von gegebenen geraden oder gekrümmten Linien, die durch ihre Lage gegeben sind, berühren. Der neunte Abschnitt enthält die Lösung einiger Probleme, die sich aus den vorhergehenden Entdeckungen ergeben. Der zehnte besteht in einer neuen Art und Weise, sich der Kalküle der Differenzen für geometrische Kurven zu bedienen: Hieraus

5 *Lett. 71. Tom.*

6 *Lect. geomet. p. so.*

7 *Acta Erud. Lips. an. 1634. p. 467.*

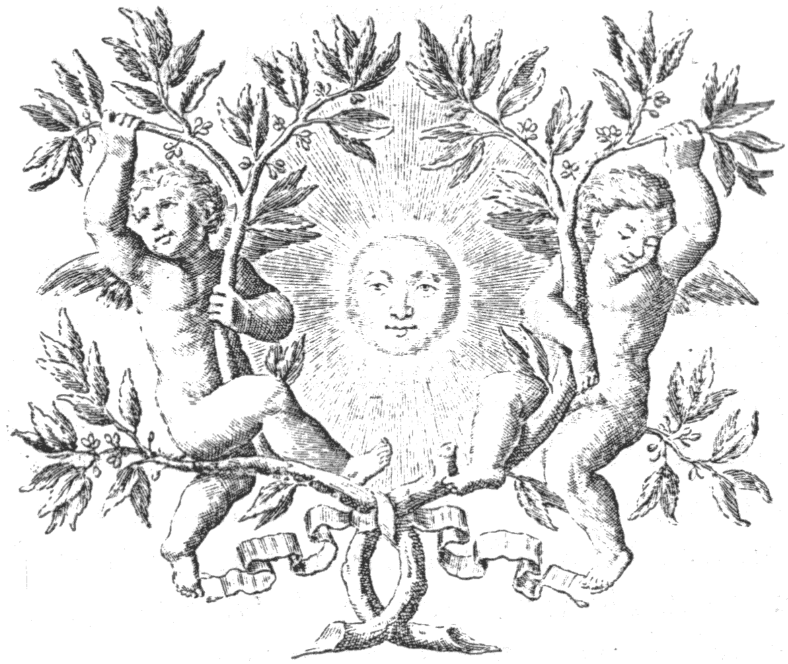
8 *De figurarum curcilinearum quadraturis, part. 2.*

wird die Methode der Messieur Descartes und Hudde abgeleitet, die nur für diese Arten von Kurven paßt.
Vorauszuschicken ist, daß es in den Abschnitten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 nur sehr wenige Aussagen gibt, aber diese sind völlig allgemein, und ebensoviele Methoden, die leicht auf so viele besondere Aussagen angewendet werden können, wie man möchte. Ich mache dies nur bei einigen ausgewählten Beispielen, in der Überzeugung, daß man in der Mathematik nur von den Methoden profitieren kann, und daß die Bücher, die nur aus Details oder besonderen Aussagen bestehen, nur dazu gut sind, ihren Verfassern und Lesern die Zeit zu stehlen. Auch habe ich die Probleme des neunten Abschnitts nur deswegen beigefügt, weil sie als merkwürdig gelten und sehr allgemein sind. Im zehnten Abschnitt geht es immer noch nur um die Methoden, die den Kalkül der Differenzen nach Art der Herren Descartes und Hudde bietet; und daß sie beschränkt sind, liegt nicht an einem Mangel dieses Kalküls, sondern an der cartesischen Methode, der man sich unterwirft, wie man aus allem vorhergehenden entnehmen kann. Im Gegenteil beweist nichts besser die ungeheure Anwendung dieses Kalküls als die ganze Methodenvielfalt; wenn man ein wenig darauf Acht hat, wird man sehen, daß sie alles aus der Methode von Monsieur Descartes und Hudde zieht, was man daraus ziehen kann und daß der allgemeine Beweis, den dieser Kalkül über seine Verwendung bei den arithmetischen Progressionen liefert, an der Unfehlbarkeit dieser letzteren Methode nichts zu wünschen läßt.
Ich hatte die Absicht, noch einen weiteren Abschnitt hinzuzufügen, um auch die hervorragende Anwendung dieses Kalküls in der Physik fühlbar zu machen, bis zu welcher Genauigkeit er sie bringen , und wieviel Nutzen die Mechanik daraus ziehen kann. Aber eine Krankheit hat mich abgehalten: Der Leserschaft wird jedoch nichts entgehen und es wird eines Tages mit Zinsen nachgereicht.
In alledem ist erst der erste Teil des Kalküls von Monsieur Leibniz enthalten, welcher darin besteht, von den ganzen Größen zu ihren unendlich kleinen Differenzen hinabzusteigen, und diese unendlich Kleinen untereinander daraufhin zu vergleichen, von welcher Art sie sind: Dies nennt man Differentialrechnung. Den anderen Teil, den man Integralrechnung nennt und der darin besteht, von diesen unendlich Kleinen wieder zu Größen oder zu Ganzen zurückzukehren, deren Differenzen sie sind, also ihre Formen zu finden, hatte ich ebenfalls vor, hier wiederzugeben. Aber da Monsieur Leibniz geschrieben hat, daß er an einer Abhandlung mit dem Titel <u>De Scientiâ infiniti</u> arbeite, legte ich keinen Wert darauf, das Publikum um ein so hervorragendes Werk zu bringen, das mit Sicherheit alles enthält, was für die Umkehrmethode der Tangenten, für die Begradigung der Kurven, für die Quadratur der von ihnen umschlossenen Räume, für die Oberflächen der von ihnen beschriebenen Körper, für die Abmessungen dieser Körper, für die Entdeckung der Schwerpunkte usw. an Merkwürdigem enthält. Auch mache ich dies nur publik, weil er mich in seinen Briefen darum gebeten hat, und ich es für notwendig halte, um die Geister darauf vorzubereiten, alles zu verstehen, was in der Folge über diese Dinge entdeckt werden kann.
Im übrigen verdanke ich viel den Messieurs Bernoulli, vor allem dem jüngeren, gegenwärtig Professor in Groningen. Ich habe mich ohne Umstände ihrer Entdeckungen und derer von Monsieur Leibniz bedient. Deshalb bin ich damit einverstanden, wenn sie davon für sich beanspruchen, soviel ihnen beliebt, und gebe mich mit dem zufrieden, was sie mir übrig lassen.
Gerechte Anerkennung gebührt auch dem gelehrten Monsieur Newton, dem sie auch Monsieur Leibniz entgegengebracht hat[9]: Daß er auch etwas ähnliches wie die Differentialrechnung

[9] *Journal des Scavans du 30. Aoust 1694.*

gefunden hat, wie in dem hervorragenden Buch mit dem Titel Philosophia naturalis principia Mathematica abgedruckt, das er uns 1687 gegeben hat, und welches fast diesen ganzen Kalkül enthält. Auch die Characteristik von Monsieur Leibniz macht sein Kalkül viel leichter und viel schneller; außerdem ist sie eine hervorragende Hilfe bei vielen Gelegenheiten.

Als der letzte Bogen dieser Abhandlung gedruckt wurde, fiel mir das Buch von Monsieur Nieuwentiit in die Hände. Sein Titel Analysis infinitorum machte mich so neugierig, es zu überfliegen, aber ich fand, daß er sich sehr von meinem unterscheidet, denn dieser Autor bedient sich nicht nur überhaupt nicht der Characteristik von Monsieur Leibniz, sondern verwirft auch absolut die zweiten, dritten Differenzen usw. Da ich den besten Teil dieses Werks auf diese Grundlage gestellt habe, würde ich mich für verpflichtet halten, auf seine Einwände einzugehen, um zu zeigen, wie wenig begründet sie sind, wenn Monsieur Leibniz dies nicht in seinen Actes de Leipzig[10] (im Original: Leypsick) nicht völlig zur Genüge getan hätte. Im übrigen scheinen mir die beiden Anforderungen oder Grundannahmen, die ich zu Beginn dieser Abhandlung gemacht habe und worauf allein sie sich stützt so einleuch-tend, daß ich nicht glaube, daß sie im Verstande aufmerksamer Leser irgendwelche Zweifel hinterlassen. Ich hätte sie sogar leicht nach Art der Alten beweisen können, wenn ich mir nicht vorgenommen gehabt hätte, mich in bereits bekanntem kurz zu fassen und mich hauptsächlich neuen Dingen zu widmen.



[10] *Acta Erud. an. 1695. p. 310, & 369*