Jacob Bernoulli

Auszug aus „Ars conjectandi“ (Über die bei Glücksspielen möglichen Berechnungen) (1713)

Quelle: Jakob Bernoulli: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi), Erster und zweiter Theil. Übers. und hrsg. von R. Haussner. - Leipzig: Engelmann (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften), 1899

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Wenn bei den Spielen, welche allein vom Glück entschieden werden, auch der Ausgang ungewiss ist, so lässt sich doch immer genau berechnen, um wieviel wahrscheinlicher ein Mitspieler gewinnt als verliert. Z. B.: Wenn Jemand, um zu gewinnen, mit einem Würfel sechs Augen auf den ersten Wurf werfen muss, so ist es ungewiss, ob er gewinnt. Um wieviel wahrscheinlicher es aber ist, dass er verliert, als dass er gewinnt, ist durch die Spielbedingung selbst bestimmt und lässt sich durch Rechnung genau ermitteln. Oder: ich spiele mit einem Andern unter der Bedingung, dass derjenige den Spieleinsatz erhält, welcher zuerst drei Einzelspiele gewonnen hat. Wenn ich nun bereits ein Spiel gewonnen habe, so ist es zwar noch ungewiss, wer von uns Beiden schliesslich Sieger sein wird, aber es kann der Werth meiner Gewinnhoffnung und derjenigen meines Mitspielers genau ermittelt werden. Hieraus lässt sich dann berechnen, um wieviel grösser der mir zufallende Theil des Spieleinsatzes sein muss als der meines Mitspielers, wenn wir uns geeinigt haben, das Spiel jetzt unvollendet aufzugeben, oder welchen Preis mir ein Dritter zahlen muss, wenn er in dem Augenblicke an meine Stelle zu treten und meine Gewinnaussichten zu übernehmen wünscht. In ähnlicher Weise lassen sich unzählige Fragen aufwerfen, wenn sich zwei, drei und mehr Personen au einem Spiele betheiligen. Da die hierbei anzuwendende Rechnung nicht allbekannt ist, aber sich oft sehr nützlich erweist, so will ich hier die Methode derselben kurz auseinandersetzen und darauf das, was sich auf Glücks- oder Würfelspiele im besonderen bezieht, entwickeln.

In beiden Fällen benutze ich den folgenden Grundsatz[1]: Beim Glücksspiele ist die Hoffnung eines Spielers, etwas zu erhalten, so hoch anzuschlagen, dass er, wenn er diese Hoffnung hat, von neuem zur gleichen Hoffnung gelangen kann, wenn er unter der

---

[1] Dieser etwas orakelhaft klingende Satz konnte, ohne dass dieser ganze Abschnitt hätte umgestaltet werden müssen, nicht deutlicher formulirt werden. Was *Huygens* mit demselben sagen will, ergiebt sich völlig klar aus seinen Ausführungen zu den Sätzen I bis III. –
An dieser Stelle seien zugleich einige Eigenthümlichkeiten, welche sich in der Schreibweise der Formeln bei *Bernoulli* finden, erwähnt. Statt des jetzt üblichen Gleichheitszeichens = benutzt er das von *Descartes* eingeführte Zeichen ∞, welches eine umgekehrte Verschlingung der Buchstaben *ae* (aequale) vorstellt. Die Proportion $a:b=c:d$ schreibt er $a\cdot b::c\cdot d$, welche Schreibweise (nach *Cantor*) von *William Oughtred* (1574-1660) in seiner Clavis mathematica eingeführt ist; statt $\dfrac{p\cdot\frac{a}{2}+q\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)}{p+q}=\dfrac{(p-q)\frac{a}{2}}{p+q}$ findet man $\dfrac{p^{a:2}+q^{-a:2}}{p+q}\infty\overline{\dfrac{p-q}{p+q}}^{\,a:2}$ geschrieben, und ähnliche Eigenthümlichkeiten.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

gleichen Bedingung spielt. Wenn z. B. Jemand ohne mein Wissen in der einen Hand drei, in der anderen Hand sieben Kugeln verbirgt und mir die Wahl lässt, aus welcher Hand ich die Kugeln nehmen will, so sage ich, dass mir dies ebensoviel werth ist, als wenn mir fünf Kugeln gegeben seien. Und wenn ich fünf Kugeln habe, so kann ich von neuem dahin gelangen, dass ich die gleiche Erwartung auf drei oder sieben Kugeln erlange: nämlich indem ich unter der gleichen Bedingung spiele.

I.

Satz. Wenn ich die Summe a oder die Summe b erwarte, von denen ich die eine ebenso leicht wie die andere erhalten kann, so ist der Werth meiner Hoffnung gleich $\frac{a+b}{2}$.

Um diesen Satz nicht nur zu beweisen, sondern ihn sogar von Grund aus aufzubauen, setze ich meine Hoffnung gleich x. Dann muss ich, wenn ich x habe, die gleiche Hoffnung wieder erlangen können, sobald ich unter der gleichen Bedingung spiele. Gesetzt nun, ich spiele mit einem Andern unter der Bedingung, dass jeder von uns Beiden die Summe x einsetzt und der Gewinner des ganzen Einsatzes dem Verlierer die Summe a geben muss. Dieses Spiel ist völlig gerecht, und es ist klar, dass ich unter diesen Bedingungen die gleiche Erwartung habe, die Summe a zu erhalten, wenn ich nämlich das Spiel verliere, als wie die Summe $(2x-a)$, wenn ich gewinne (denn dann erhalte ich den ganzen Einsatz $2x$, von welchem ich die Summe a meinem Mitspieler gehen muss). Wenn nun aber $2x-a$ ebensoviel werth wäre als b, so hätte ich auf a dieselbe Hoffnung wie auf b. Ich setze also $2x-a=b$ und erhalte dann $x=\frac{a+b}{2}$ als Werth meiner Hoffnung. Der Beweis ist leicht. Wenn ich nämlich die Summe $\frac{a+b}{2}$ habe, so kann ich mit einem Andern, welcher ebenfalls $\frac{a+b}{2}$ einsetzen will, unter der Bedingung spielen, dass der Gewinner dem Verlierer die Summe a giebt. Auf diese Weise ist meine Hoffnung, a zu erhalten (wenn ich verliere), gleich der, b zu bekommen (wenn ich gewinne); im letzteren Falle erhalte ich nämlich den ganzen Einsatz $a + b$, und von diesem habe ich dem Andern die Summe a zu geben.

Zahlenbeispiel. Wenn ich die gleiche Hoffnung habe, die Summe 3 oder 7 zu erhalten, so ist der Werth meiner Hoffnung gleich 5. Es ist klar, dass, wenn ich die Summe 5 habe, ich wieder zu der gleichen Hoffnung gelangen kann.

Wenn ich nämlich mit einem Andern unter der Bedingung spiele, dass jeder von Beiden 5 einsetzt und der Sieger dem Andern 3 giebt, so ist das Spiel völlig gerecht, da ich die gleiche Hoffnung auf 3 (wenn ich verliere) wie auf 7 (wenn ich gewinne) habe; im letzteren Falle erhalte ich nämlich den ganzen Spieleinsatz 10, von welchem ich dem Andern 3 geben muss.

„Anmerkungen. Der Verfasser dieser Abhandlung setzt am Schlusse seiner Einleitung im Allgemeinen, hier aber und in den beiden folgenden Lehrsätzen im Einzelnen die Grundlagen seines ganzen Verfahrens auseinander. Da es sehr wesentlich ist, dass das richtige Verständniss derselben gewonnen wird, so will ich versuchen, diese Grundsätze durch andere, einfachere und dem Verständniss eines jeden Lesers näher liegende Betrachtungen zu beweisen. Hierzu brauche ich nur festzusetzen: Jeder darf soviel erwarten, als er unfehlbar erhalten wird. Denken wir uns, um den ersten Satz zu beweisen, Folgendes: Jemand hält in der einen Hand 3 (oder allgemein a) und in der anderen 7 (oder b) Kugeln; er stellt mir frei, die Kugeln, welche er in der einen Hand, und einem Anderen die, welche er in der andern Hand hält, zu nehmen. Demnach erhalten wir Beide zusammen unbedingt sicher und haben also zu erwarten die Kugeln, welche er in beiden Händen hält, das sind 10 (oder allgemein a + b) Kugeln. Jeder von uns Beiden hat aber den gleichen Anspruch auf das, was wir erwarten; folglich muss die ganze Hoffnung in zwei gleiche Theile getheilt und jedem die halbe Hoffnung, d. h. 5 (oder $\frac{a+b}{2}$) Kugeln zugebilligt werden.

Zusatz. Hieraus folgt, dass, wenn in der einen Hand a, in der andern Hand nichts verborgen ist, die Hoffnung eines jeden von uns gleich $\frac{1}{2}a$ ist.

Bemerkung. Aus dem Gesagten ist zu entnehmen, dass das Wort Erwartung oder Hoffnung (Expectatio) nicht nur in dem gewöhnlichen Sinne genommen werden darf, in welchem wir etwas erwarten oder hoffen, was für uns gut und vortheilhaft ist; es kann vielmehr auch den Sinn haben, dass für uns Ungünstiges und Nachtheiliges zu befürchten ist. Das Wort bezeichnet daher unsere Hoffnung, das Beste zu erhalten, soweit als dieselbe nicht durch die Furcht, Schlimmes zu bekommen, gemässigt und abgeschwächt wird. Mithin muss das Wort so verstanden werden, dass es die Mitte bezeichnet zwischen dem Besten, was wir erhoffen, und dem Schlimmsten, was wir befürchten. Dies ist im Folgenden immer zu beachten."

II.

Satz. Wenn ich eine der Summen a, b oder c erwarten darf, von denen die eine ebenso leicht als jede der beiden andern mir zufallen kann, so ist der Werth meiner Hoffnung gleich $\frac{1}{3}(a+b+c)$.

Um diesen Satz zu finden, bezeichne ich wiederum, wie vorhin, den Werth meiner Hoffnung mit x. Wenn ich aber die Summe x habe, so muss ich die gleiche Hoffnung erhalten können, wenn das Spiel gerecht ist. Gesetzt nun, ich spiele mit zwei Andern unter der Bedingung, dass jeder von uns Dreien die Summe x einsetzt; mit dem Einen vereinbare ich ferner, dass er mir die Summe b giebt, wenn er gewinnt, und ich ihm b auszahle, falls ich gewinne, und mit dem Dritten komme ich überein, dass er mir die Summe c zu geben hat, wenn er gewinnt, und im entgegengesetzten Falle ich ihm die gleiche Summe auszuhändigen habe. Das Spiel ist dann ein durchaus gerechtes, und ich habe unter diesen Bedingungen die gleiche Erwartung auf b, wenn der Andere gewinnt, als auf c, wenn der Dritte siegt, als auch auf $3x-b-c$, wenn ich selbst gewinne (denn in diesem Falle erhalte ich die Summe $3x$, von welcher ich die Summen b und c an meine beiden Mitspieler auszahlen muss). Wenn nun $3x-b-c=a$ wäre, so hätte ich die gleiche Hoffnung a zu erhalten, wie b oder c. Ich setze daher $3x-b-c=a$ und erhalte dann für den Werth meiner Hoffnung $x=\frac{1}{3}(a+b+c)$. Auf die nämliche Weise findet man, dass, wenn, ich auf a, b, c oder d gleiche Hoffnung habe, der Werth meiner Hoffnung gleich $\frac{1}{4}(a+b+c+d)$ ist.

„Anmerkungen. Dieser Satz kann in anderer Weise folgendermaassen bewiesen werden: Wir nehmen an, dass wir drei Kästchen haben, und dass a Kugeln in dem ersten, b in dem zweiten und c in dem dritten Kästchen seien. Mir und zwei Andern sei nun erlaubt, dass jeder von uns ein Kästchen wähle und seinen Inhalt behalte. Dann geschieht es, dass wir Drei zusammen alle drei Kästchen nehmen und den gesammten Inhalt, das sind $a + b + c$ Kugeln behalten. Jeder hat nun ebensoviel Hoffnung als einer der Anderen, und folglich ist die Erwartung jedes Einzelnen gleich dem dritten Theile der ganzen Summe, also gleich $\frac{1}{3}(a+b+c)$. Wenn ich von vier Kästchen ein beliebiges wählen darf, so folgt auf gleiche Weise, dass der Werth meiner Hoffnung gleich dem vierten Theile der Gesammtsumme, also gleich $\frac{1}{4}(a+b+c+d)$ ist. Sind es fünf Kästchen, so ist meine Hoffnung gleich $\frac{1}{5}(a+b+c+d+e)$ zu bewerthen, u. s. w.

Zusatz. Ist in einem oder mehreren der Kästchen nichts, so ist klar, dass dann der Werth meiner Hoffnung auf den Inhalt des oder der übrigen Kästchen gleich dem dritten, vierten, fünften, . . . Theile sein wird, wenn insgesammt drei, vier, fünf, , . . Kästchen vorhanden sind."

III.

Satz. Wenn die Anzahl der Fälle, in denen ich die Summe a erhalte, gleich p und die Anzahl der Fälle, in denen ich die Summe b erhalte, gleich q ist und ich annehme, dass alle Fälle gleich leicht eintreten können, so ist der Werth meiner Hoffnung gleich $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Um diese Regel zu finden, setze ich wieder x für den Werth meiner Hoffnung. Ich muss dann, wenn ich x habe, zur gleichen Erwartung kommen können, wenn das Spiel gerecht ist. Ich nehme nun so viele Mitspieler, dass ihre Zahl, mich eingerechnet, gleich $p + q$ ist; jeder der Spieler setzt die Summe x ein, sodass die Summe $px + qx$ den gesammten Einsatz bildet, und spielt mit der gleichen Erwartung auf Gewinn. Ferner treffe ich mit q Mitspielern das Uebereinkommen, dass mir jeder von ihnen die Summe b geben muss, falls er gewinnt, und umgekehrt, dass ich jedem dieselbe Summe geben muss, wenn ich obsiege; in ähnlicher Weise einige ich mich mit den einzelnen $p - 1$ übrigen Spielern dahin, dass mir jeder von ihnen die Summe a auszuzahlen hat, falls er das Spiel gewinnt, und dass umgekehrt ich jedem dieselbe Summe aushändige, wenn ich Sieger werde. Da bei diesen Bedingungen keiner der Spieler im Nachtheil ist gegenüber einem andern, so ist das Spiel ein völlig gerechtes. Offenbar habe ich nun q Fälle, in welchen ich die Summe b erhalte, $p - 1$ Fälle, in welchen ich die Summe a erhalte, und einen Fall, in welchem ich $px+qx-qb-(p-1)a$ erhalte (wenn ich siege, erhalte ich nämlich den ganzen Einsatz $px + qx$ und habe davon jedem Einzelnen der q Mitspieler die Summe b und jedem der übrigen $p - 1$ Mitspieler die Summe a, also im ganzen $qb+(p-1)a$ auszuzahlen). Wenn nun $px+qx-qb-(p-1)a$ gleich a selbst sein würde, so hätte ich p Hoffnungen auf a (da ich bereits p -1 Hoffnungen auf a hatte) und q Hoffnungen auf b und so würde ich wieder zu meiner früheren Hoffnung gekommen sein. Wenn ich also

$$px+qx-qb-(p-1)a=a$$

setze, so ist der Werth meiner Hoffnung

$$x=\frac{pa+qb}{p+q},$$

wie oben behauptet worden ist.

Zahlenbeispiel. Wenn ich 3 Hoffnungen auf l3 Mark und 2 auf 8 Mark habe, so ist nach der vorstehenden Regel der Werth meiner Hoffnung gleich 11. Es lässt sich auch leicht zeigen, dass ich wieder zur gleichen Erwartung gelange, wenn ich 11 Mark habe. Ich nehme nämlich an, dass ich gegen vier andere Spieler spiele und jeder von uns fünf Theilnehmern 11 Mark einsetzt; mit zwei Spielern vereinbare ich einzeln, dass wer von ihnen gewinnt mir 8 Mark geben muss, und ich beiden je 8 Mark aushändige, wenn ich siege; mit den beiden andern Spielern einige ich mich dahin, dass jeder von ihnen mir 13 Mark geben muss, wenn er Sieger wird, und ich beiden je 13 Mark gebe, wenn ich gewinne. Dann ist das Spiel völlig gerecht, und ich habe zwei Hoffnungen auf 8 Mark, wenn einer von den beiden Spielern, welche mir 8 Mark versprochen haben, gewinnt, und drei Hoffnungen auf 13 Mark, wenn einer der beiden übrigen Spieler oder ich selbst das Spiel gewinne (im letzteren Falle erhalte ich nämlich den ganzen Einsatz, gleich 55 Mark und muss von demselben zwei Spielern je 13 Mark und den beiden andern je 8 Mark geben, sodass mir selbst 13 Mark übrig bleiben).

„**Anmerkungen**. Anders lässt sich die Regel auf folgende Weise begründen. Ich nehme wieder an, dass mit mir $p+q$ Personen am Spiele theilnehmen und dass jedem Einzelnen je ein Fall zukommt. Es seien nun ebensoviele Kästchen vorhanden, von denen jedes die Summe enthält, welche in dem einzelnen Falle erhalten wird, d.h. p Kästchen enthalten a und q Kästchen b. Jeder Mitspieler nimmt ein Kästchen; alle zusammen bekommen mithin sicher den Inhalt sämmtlicher Kästchen, das ist $pa+qb$. Da nun alle Spieler die gleiche Hoffnung haben, so muss man die Summe, welche sie zusammen erhalten, durch ihre Anzahl dividiren, und erhält für den Werth der Hoffnung jedes Spielers $\frac{pa+qb}{p+q}$. Auf gleiche Weise kann man zeigen, dass der Werth meiner Hoffnung gleich $\frac{pa+qb+rc}{p+q+r}$ ist, wenn ich in p Fällen a, in q Fällen b und in r Fällen c zu erwarten habe.

Zusatz 1. Hieraus ergiebt sich sofort, dass, wenn mir in p Fällen a und in q Fällen nichts zukommt, meine Hoffnung gleich $\frac{pa}{p+q}$ ist.

[...]

XII.

Aufgabe. Mit wieviel Würfeln kann A es unternehmen, auf den ersten Wurf zwei Sechsen zu werfen?

Diese Frage kommt aber auf die andere hinaus$^{(L)}$, mit wievielen Würfen es A unternehmen kann, mit einem Würfel zweimal eine Sechs zu werfen. Wenn A es mit zwei Würfen unternimmt, so hat er nach dem Obigen$^{(M)}$ die Hoffnung $\frac{1}{36}a$, den Einsatz a zu gewinnen. Unternimmt er es mit drei Würfen, so hat er, falls ihm der erste Wurf misslingt, noch zwei Würfe, von welchen jeder eine Sechs ergeben muss, und welche ihm daher $\frac{1}{36}a$ werth sind. Glückt es ihm aber auf den ersten Wurf, eine Sechs zu werfen, so braucht er bei den beiden folgenden nur noch eine Sechs zu erzielen; die beiden letzten Würfe sind ihm dann $\frac{11}{36}a$ werth (nach Aufgabe X). Nun hat A einen Fall dafür, dass er beim ersten Wurfe eine Sechs wirft, und fünf Fälle für das Gegentheil; er hat also bei Beginn des Spieles einen Fall für $\frac{11}{36}a$ und fünf Fälle für $\frac{1}{36}a$. Nach Satz

III folgt daher, dass *A* die Hoffnung $\frac{16}{216}a = \frac{2}{27}a$ hat. Fährt man in dieser Weise fort, indem man *A* immer einen weiteren Wurf hinzunehmen lässt, so findet man, dass *A* bei 10 Würfen mit einem Würfel oder einem Wurfe mit 10 Würfeln es mit Aussicht auf Gewinn unternehmen kann, zwei Sechsen werfen zu wollen.

„**Anmerkungen**. (L) [Diese Frage kommt aber auf die andere hinaus, u. s. w.] Wenn dem A ein Wurf mit 10 Würfeln gestattet ist, so liegt klar auf der Hand, dass es keinen Unterschied ausmacht, ob er diese zehn Würfel auf einmal oder einen nach dem andern auf das Spielbrett wirft. Thut er dies Letztere, so ist es offenbar gleichgültig, ob es zehn verschiedene Würfel sind, mit welchen er spielt, oder ob er einen einzigen Würfel benutzt, welchen er nach gethanem Wurfe vom Spielbrett wieder aufnimmt, um ihn von Neuem auszuspielen.

(M) [Wenn *A* es mit zwei Würfen unternimmt, u. s. w.] In der vorhergehenden Aufgabe ist gezeigt worden, dass die Hoffnung dessen, welcher mit zwei Würfeln auf einen Wurf zwei Sechsen werfen will, gleich $\frac{1}{36}a$ ist. Da es aber nach (L) gleich ist, ob er mit zwei Würfeln einen Wurf oder mit einem Würfel zwei Würfe thut, so kommt ihm die Hoffnung $\frac{1}{36}a$ auch zu, wenn er mit einem Würfel auf zwei Würfe zwei Sechsen werfen will.