Die Entstehung mathematischen Wissens im Unterrichtsprozess – Folge individueller Erkenntnis oder Ergebnis einer sozialen Konstruktion?

Heinz Steinbring, Universität Dortmund

In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 2000, 635 – 638.

Heinz STEINBRING, Dortmund

Die Entstehung mathematischen Wissens im Unterrichtsprozess – Folge individueller Erkenntnis oder Ergebnis einer sozialen Konstruktion?

1 Das Problem von neuem und altem mathematischen Wissen

Die Mathematik unterliegt einem Gegensatz zwischen neuem und altem Wissen: Zum einen ist mathematisches Wissen logisch konsistent und aus gegebenen Grundlagen deduzierbar, also nicht wirklich neu. Andererseits gibt es tatsächlich neue mathematische Einsichten, z.B. durch Problemlösungen.

Der mathematische Beweis verdeutlicht diese Paradoxie sehr prägnant: "… ein Beweis ist eine logisch korrekte Folge von Implikationen … Beweise sind Argumente, und wie Peirce eindrucksvoll aufgezeigt hat, hat jedes Argument eine unterliegende Idee – die er leitendes Prinzip nannte, welches die ansonsten untadelige Folge logischer Schritte in ein Instrument der Überzeugung verwandelt. … Es ist absolut möglich ohne eine solche Idee einem Beweis im eingeschränkten Sinne zu folgen, indem man jedem logischen Schritt zustimmt. … Dennoch ist ein leitendes Prinzip immer anwesend … und ohne dieses können Beweise keine Beweise *sein*" (Rotman, 1988, S. 14/5).

In einer umfangreichen philosophischen Arbeit analysiert Jahnke den Widerspruch zwischen Wissensentwicklung und Wissensbegründung, zwischen »Logik« und »Intuition«: "Der Prozeß der Wissensgewinnung ist … im wesentlichen irrationaler Natur oder bestenfalls als psychologisches Phänomen erklärbar, während umgekehrt der mathematische Beweis lediglich als tautologische Zeichenkette aufgefaßt wird" (Jahnke 1978, S. 58/59). Die Analyse dieses Paradoxons ergibt, daß in der Wissensentwicklung neue "ideale mathematische Objekte" konstruiert werden, die es gestatten, die tautologische Rechtfertigung auf der Basis des vorhandenen Wissens in eine inhaltliche Begründung "von der Zukunft her" zu verändern.

Die Problematik des neuen und alten mathematischen Wissens ist Gegenstand eines DFG–Forschungsprojektes ("Epistemologische und sozial-interaktive Bedingungen der Konstruktion mathematischer Wissensstrukturen (im Unterricht der Grundschule)*)).

2 Das Lernen neuen Wissens als kollektive Argumentation

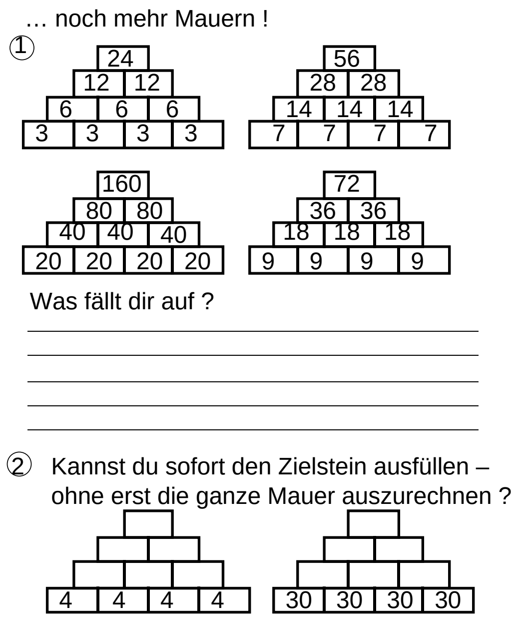
Der Soziologe Miller macht die Problematik der Entstehung des Neuen zum Ausgangspunkt für die Rolle, die soziale Lernprozesse in der Entwicklung des Individuums spielen. "Von einer Lern- bzw. Entwicklungstheorie kann … legitimerweise erwartet werden, daß sie eine Antwort auf die Frage liefert, wie das in der Entwicklung *Neue entstehen* kann. … Jede Antwort auf die Frage … ist … an das folgende Validitätskriterium gebunden: es muß gezeigt werden können, daß das in der Entwicklung Neue das in der Entwicklung Alte voraussetzt und es dennoch systematisch überschreitet, andernfalls kann es kein Neues geben bzw. ist das Neue bereits ein Altes, …" (Miller 1986, S. 18).

Daran schließt Miller drei wichtige Fragen für das Lernen an: “Wie kann für das einzelne Individuum … die Geltung seines bereits erworbenen (alten) Wissens … erschüttert bzw. relativiert werden? Wie kann das einzelne Individuum neue, sein gegenwärtiges Wissen systematisch überschreitende lernrelevante Erfahrungen machen? Und wie … kann es für das einzelne Individuum einen Zwang zur Fortentwicklung seines Wissens … geben?” (Miller 1986, S. 18/9).

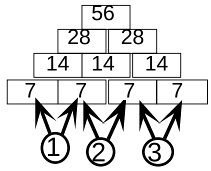
Der genetische Individualismus kann nicht die Entstehung neuen Wissens erklären. “Wenn das lernende Subjekt das in der Entwicklung Neue bereits auf irgendeine … Weise kennen muß, um es allererst kennenlernen zu können, dann ist das in der Entwicklung Neue bereits mit dem in der Entwicklung Alten identisch; …. Der genetische Individualismus scheitert … an einer Auflösung der Grundprobleme einer genetischen Epistemologie” (Miller 1986, S. 20).

Individualistisch ausgerichtete “Lernprozesse” konzentrieren sichauf Wissenselemente, die schon bekannt und nicht tatsächlich neu sind. “Nur in der sozialen Gruppe und aufgrund der sozialen Interaktionsprozesse zwischen den Mitgliedern einer Gruppe kann das einzelne Individuum jene Erfahrungen machen, die fundamentale Lernschritte ermöglichen” (Miller 1986, S. 20/21). Aber nicht jede soziale Kommunikation ist ein Lernprozeß. “Nur von solchen sozialen … Handlungen, deren primäres Handlungsziel … darin besteht, kollektive Lösungen für interindividuelle Koordinationsprobleme zu entwickeln, kann … sinnvollerweise angenommen werden, daß durch sie grundlegende Lernprozesse ausgelöst werden können. Nur ein sozialer … Handlungstyp scheint diese Bedingung zu erfüllen, und dies ist … die kollektive Argumentation” (Miller 1986, S. 23).

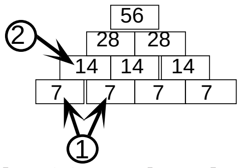
3 Unterschiede interaktiver Wissenskonstruktionen in Einzel- und Partnerarbeit sowie in gemeinsamen Diskussionen



An zwei kurzen Episoden aus dem Mathematikunterricht der Grundschule sollen Unterschiede der Wissenskonstruktionen von Kindern einerseits im Rahmen stärker individualisierter Bedingungen von Einzel– und Partnerarbeit und andererseits im Rahmen klassenübergreifender, gemeinsamer Diskussion und Reflexion dargestellt werden. In dieser Unterrichtsreihe (4. Klasse) ist die Lernumgebung “Zahlenmauern” behandelt worden. Im Verlauf dieser Episode bearbeiten die Kinder in Einzel- und Partnerarbeit ein Arbeitsblatt, auf dem Mauern mit vorgegebenen vier gleichen Basissteinen auszufüllen sind. Ein Ziel ist es herauszufinden, daß die Zahl an der Spitzte das Achtfache eines Basissteins ist. Sonja und Julia haben inzwischen die vier oberen Mauern ausgerechnet und wollen der Lehrerin ihre Beobachtung berichten. Zunächst teilen sie der Lehrerin mit: “Da muß man gar nicht mehr richtig rechnen. Da muß man ja nur dreimal”. Dies erklären sie in der folgenden Episode genauer; sie zeigen zwar auf das Arbeitsblatt, aber die von ihnen beispielhaft benutzte Zahlenmauer kann nicht genau identifiziert werden:



28 So Man muß immer-, man muß nur dreimal rechnen, weil die bei-, weil die das ergibt ja. ... Man muß nur dreimal rechnen. [*zeigt auf die Zahlen auf dem Arbeitsblatt, während sie erklärt; Sonja wird dann von ihrer Nachbarin Julia unterbrochen*]



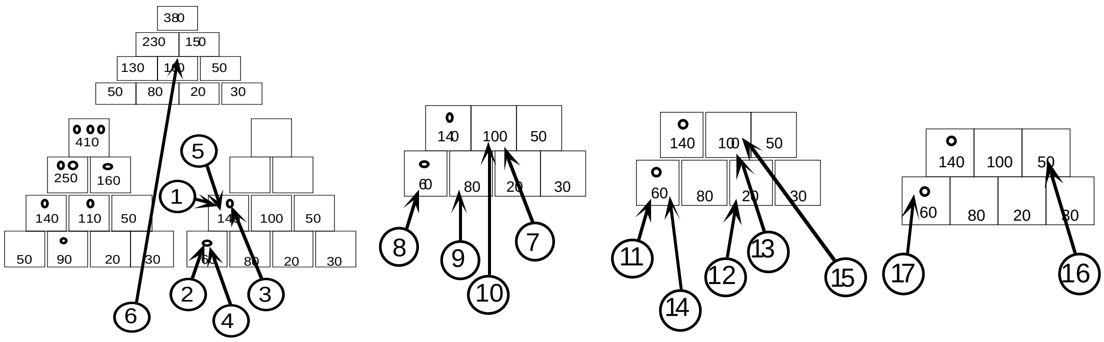
29 Ju Das, das plus das (1), das plus das (2) und das plus das (3). [*hier reden So und Ju gleichzeitig, dabei zeigen beide auf das vor So liegende Arbeitsblatt*]

29aJu Weil, und wenn man die gerechnet hat, die plu-, äh, das plus das (1), ergibt’s das (2). Und dann braucht man die nicht mehr zu rechnen. [*deutet dabei weiter auf verschiedene Stellen des Arbeitsblattes.*]

Julia und Sonja entwickeln aus den Berechnungen ihre “Abkürzung”; ihre Überlegung bleibt auf der Ebene der direkten Berechnung und der sichtbaren Zahlen; es werden keine Beziehungen zwischen den Änderungen der Basissteine und der sich daraus ergebenden Änderungen des Zielsteins benutzt.

Die zweite Episode entstammt derselben Klasse. Zuvor wurde die Erhöhung eines “Mittelsteins” besprochen; jetzt geht es um den Zusammenhang zwischen dem (linken) Randstein und dem Zielstein. Matthi kommt zur Tafel.

198 L # Nee. Matthi, wartest du mal eben? Ist dir was aufgefallen? #



199Ma # Ähm, hier (1) ist auch 10 mehr- (2, Plättchen)

201Ma .… weil hier auch 10 mehr ist [*legt ein Plättchen* (3)] Weil hier ja auch, weil ’s hier 10 mehr is, (4, Plättchen), ist hier 10 mehr (5) als da 10 mehr (6).Hierist dann das Gleiche (7) *und dann mehrfach abwechselnd* (8), (9), weil man das ja nicht hier irgendwie plus das, wenn man das (10). Man kommt ja nicht mit dem hier (*abwechselnd* (11), (12)) dann hier hin (13), (14), oder so. Daß man das. (15).Und hier (16) ist auch das Gleiche, weil der außen ist (17).

Matthi konstruiert eine neuesmathematisches Zeichen, das in der gemeinsamen Interaktion von den Mitschülern aktiv gedeutet werden muß. Die Konstruktion ist nicht einfach nur der spontanen Eingebung dieses Schülers zuzuschreiben; Matthi erinnert sich wohl an die kurz zuvor geführte Diskussion um die Erhöhung eines Mittelsteins, die sich auf mehr als die Erhöhung nur eines Steins in der zweiten Mauernreihe auswirkte. Das scheint ein möglicher Grund dafür zu sein, die weiteren Steine in Betracht zu ziehen und zu fragen, ob sich diese auch erhöhen könnten.

4 Die Entstehung neuen Wissens und das Verhältnis zwischen individuellem und sozialem Lernen

Julia und Sonja reduzieren im Rahmen der konsistenten Regeln zur Berechnung fehlender Zahlen in einer Zahlenmauer die Anzahl der durchzuführenden Rechnungen auf drei. Diese Konstruktion stellt letztlich kein wirklich neues Wissen dar; dies geschieht als eine direkte Wahrnehmung bei der Durchführung sich wiederholender Rechnungen. Matthi konstruiert wirklich neues Wissen. Aus –unmöglichen – Beziehungen begründet er , warum sich die anderen Steine der zweiten Reihe nicht erhöhen: Der linke Stein der Basisreihe ist nicht an der Konstruktion des mittleren und rechten Steins der zweiten Reihe beteiligt. Das konstruierte Wissen kann zu diesem Zeitpunkt im laufenden Entwicklungsprozeß nicht rein logisch aus vorhandenem Wissen abgeleitet werden. Die Frage »Aus welchem Grunde sollten dieseBeziehungen betrachtet werden?« erfordert eine “unterliegende Idee in der logischen Struktur”, die den Sinn dieser Konstruktion verdeutlicht.

In beiden Episoden scheinen die Neukonstruktionen des Wissens immer das individuelle Ergebnis einzelner Schülerinnen gewesen zu sein, denn es sind immer einzelne Teilnehmer, die einen eigenen Beitrag einbringen und der kommunikative Prozeß ist auch darauf angewiesen. Es jedoch wäre voreilig, die Konstruktion neuen mathematischen Wissens nur als individuellen Prozeß zu verstehen. Der Anlaß für die Konstruktion neuer mathematischer Beziehungen wird letztlich durch eine externe Aufforderung an das Individuum in der sozialen Interaktion herangetragen. Die Konstruktion neuen Wissens erfordert eine kollektive Argumentation (Miller).

*) Diese Arbeit entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Forschungsprojekts, Kennziffer: STE 491/5-1 und STE 491/5-2.

Literatur

Jahnke, H. N. (1978). Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem. Bielefeld: Materialien und Studien Bd. 10 des IDM Bielefeld.

Miller, M. (1986). Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag.

Rotman, B. (1988). Towards a Semiotics of Mathematics. Semiotica, 72(1/2), 1-35.

Steinbring, H. (2000). Epistemologische und sozial-interaktive Bedingungen der Konstruktion mathematischer Wissensstrukturen (im Unterricht der Grundschule). (Abschlußbericht zu einem DFG–Projekt). Dortmund: Universität Dortmund.