Petra Scherer, Bielefeld und Heinz Steinbring, Dortmund

Strategien und Begründungen an Veranschaulichungen – statische und dynamische Deutungen

Abstract: Im vorliegenden Beitrag werden Unterrichtserfahrungen aus der Grundschule bei der Einführung in den Gebrauch von Diagrammen und Anschauungsmitteln zur Begründung von arithmetischen »Gesetzmäßigkeiten« vorgestellt. Bei diesen Diagrammen handelt es sich zum einen um das 400er-Punktfeld (mit einfachen multiplikativen Zusammenhängen; vgl. Wittmann et al. 1996, 138ff), sowie zum anderen um den (leeren) Rechenstrich (mit halbschriftlichen Strategien zur Addition und Subtraktion im Tausenderraum; vgl. Sundermann/Selter 1995; Treffers 1991).

1. Vorbemerkung

Gemäß einer weit verbreiteten Auffassung dienen Diagramme und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht vor allem dazu, schwierige arithmetische Zusammenhänge möglichst konkret und anschaulich darzustellen, um so das Lernen und Verstehen zu vereinfachen. Übersetzungen zwischen arithmetischen Beziehungen und grafischen Diagrammen sind aber nicht nur »Vereinfachungen«, sondern stellen neue Anforderungen dar. Die Übersetzungen zwischen anschaulicher und symbolischer Ebene erfolgen oftmals nur *einseitig*, nämlich von der Veranschaulichung in die symbolische Form. Und dementsprechend sehen die meisten Kinder und viele Lehrerinnen und Lehrer Veranschaulichungen als bloße *Durchgangsstationen* an, die man spätestens bei Erreichen der »eigentlichen« Mathematik vergessen sollte. Die *umgekehrte* Übersetzung eines symbolischen Ausdrucks in eine Veranschaulichung ist für die Schüler dann ungewohnt und gelingt nicht so problemlos. Gerade die *wechselseitige* Übersetzung, d.h. eben auch der Übergang von der symbolischen auf die anschauliche Ebene sollte ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts sein, insbesondere auch im Hinblick auf anschauliche Beweise (vgl. Wittmann/Müller 1988).

Zu den Besonderheiten beim Gebrauch von Diagrammen und Anschauungsmitteln im Mathematikunterricht finden sich in der didaktischen Literatur vor allem die folgenden zentralen Gesichtspunkte:

- Diagramme und Anschauungsmittel sind nicht selbsterklärend, sie erfordern ein eigenes Verstehen, und sie sind immer auch »Lernstoff« (vgl. u.a. Schipper 1982).

- Diagramme und Anschauungsmittel sollten nach dem Prinzip »Weniger ist mehr« benutzt werden. Viele, voneinander völlig verschiedene Diagramme verwirren; es kommt auf eine gute Auswahl und sorgfältige Beschränkung an (Wittmann 1993, 1998).
- Diagramme und Anschauungsmittel sollten nicht nur sporadisch eingesetzt werden, sondern in fortsetzbarer Weise kontinuierlich benutzt werden bei ständigem Ausbau und zunehmender Verallgemeinerung der Diagramme.
- Diagramme und Anschauungsmittel sind nicht Bilder, sondern *symbolische* Diagramme, in denen die mathematischen Beziehungen anders – kontrastierend – als in algebraischen oder arithmetischen Formeln/Aufgaben enthalten sind. Die in der Veranschaulichung möglicherweise enthaltene mehrdeutige, mathematische Struktur muss vom Schüler immer aktiv wahrgenommen und interpretiert werden (Jahnke 1984; Steinbring 1994, 1997).

Wir möchten mit unseren Beispielen speziell folgende Problematik beim Einsatz von Diagrammen und Anschauungsmitteln darstellen. Einerseits gibt es Veranschaulichungen, die eher *Prozesse* verdeutlichen (z.B. der Rechenstrich) und andere (z.B. das 400er-Punktfeld), die eher *ganzheitlich* gelesen werden. Dieser Wechsel zwischen *dynamischen* und *statischen* Les- und Deutungsweisen kann dazu beitragen, Begründungen für arithmetische Gesetzmäßigkeiten zu entwickeln. Diese Problematik soll im vorliegenden Beitrag diskutiert werden, und zunächst seien dazu zwei Unterrichtsszenen skizziert.

2. Operative Aufgabenpaare am 400er-Punktfeld und am Malkreuz

Grundlage der folgenden Ausführungen sind Aufgabenpaare des Typs $5 \cdot 17$ *und* $7 \cdot 15$, $7 \cdot 19$ *und* $9 \cdot 17$ oder $5 \cdot 18$ *und* $8 \cdot 15$. Ein Faktor ist jeweils einstellig, der andere zweistellig (mit Zehnerziffer *1*). Die Schüler (einer dritten Klasse) bearbeiten zu Beginn dieser Phase verschiedene Arbeitsblätter, und das Berechnen der jeweiligen Aufgabenpärchen stellt sie vor keinerlei Probleme. Die Arbeitsblätter der Schüler dokumentieren, dass einige das 400er-Feld überhaupt nicht nutzen. Andere zeichnen lediglich das gesamte Feld ein, und nur vereinzelt wählen die Kinder eine gliedernde Darstellung des 400er-Feldes oder beschriften es.

Die Schüler erklären nun anhand des folgenden Tafelbildes, warum es sich hier um *Paare* von Aufgaben handelt, wobei auch am Tageslichtschreiber das 400er-Feld präsent ist und genutzt werden könnte.

•	10	6
4	40	24

•	10	4
6	60	24

142 A: Da werden nur die Einer vertauscht. Bei der Aufgabe.

143 L: Hm. Kannst du das einmal mit der Aufgabe sagen, wie du das meinst?

144 A: Also, bei der ersten sind ja vier mal sechzehn, und bei der zweiten sind sechs mal vierzehn, und da sind dann eigentlich nur die Einer vertauscht.

Andreas erkennt, dass sich in beiden Aufgaben die gleichen Ziffern finden und lediglich die Einer vertauscht werden, d.h. beide möglichen Kombinationen des Zehners mit einer Einerstelle gebildet werden.

Der Schüler Jan geht sofort dazu über, den Unterschied der beiden Ergebnisse zu erläutern, bei den bearbeiteten Aufgaben entweder 20, 30 oder 40:

146 J: Also, mir ist da etwas aufgefallen, die vier mal sechzehn und die sechs mal vierzehn sind Pärchen, und der Unterschied sind zwanzig. Weil vier bis zur sechs, das sind zwei, und weil die zehn stehen bleibt, ist die da vielleicht verdoppelt worden, deshalb sind die Punkte auch stehen geblieben.

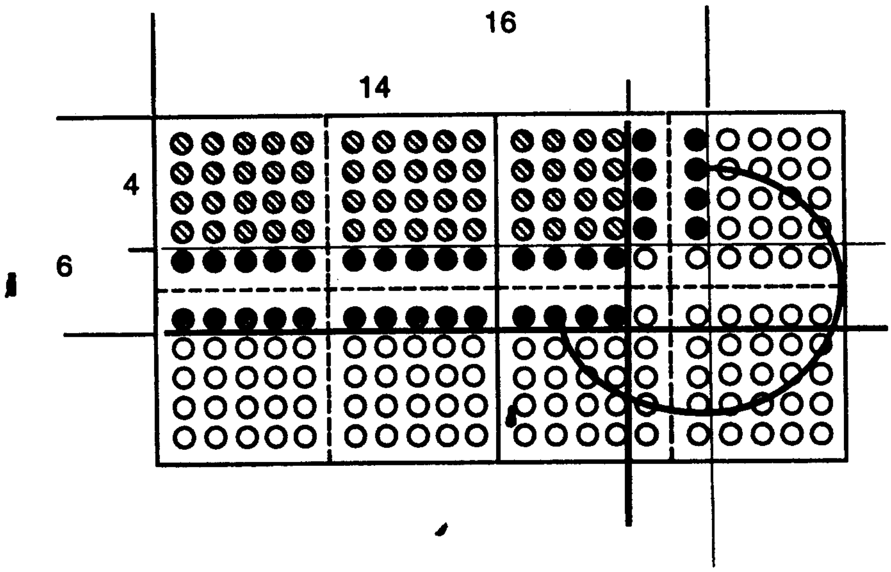
Jans Begründung erfolgt auf der *Zahlen*ebene: Zu den beiden Unterschieden *2* (der Einerstellen) und *20* (der Ergebnisse) und dem Unveränderten (10) wird eine geeignete Operation gesucht, hier das ›Verdoppeln‹, ohne auf die Strategien zur Berechnung oder auf Veranschaulichungen zurückzugreifen. Es hat ein wenig den Anschein, als ob Jan *rät*, welche Operation wohl passen könnte.

Thorsten liefert anschließend eine ausführliche Erläuterung am Malkreuz:

149 T: Also, hier das sind ja vier mal zehn, sind vierzig und vier mal sechs sind vierundzwanzig. Und da sechs mal vier auch vierundzwanzig sind, dann ist das so, dass die beiden Zeilen gleich sind. Und da hier vorne eine sechs steht, sind da zwanzig mehr als da, bei den Zehnern. Also das hier, wenn man sechs mal zehn rechnet, sind das zwanzig mehr, als wenn man vier mal zehn rechnet. Die vierundzwanzig bleibt immer stehen, und darum sind das zwanzig mehr.

Thorsten identifiziert die gleichen Ergebnisfelder (*24*) mit den zugehörigen Malaufgaben am Malkreuz. Der Unterschied des Gesamtergebnisses resultiert aus den unterschiedlichen Teilprodukten in der ersten Spalte (*4·10* und *6·10*). Auffällig ist, dass anschließend – trotz Aufforderung der Lehrerin – kein Kind diese Erläuterung am Punktfeld demonstrieren will. Hierbei handelt es sich nicht um eine Ausnahmesituation: Auch in anderen Unterrichtsepisoden zeigte sich die Tendenz, Multiplikationsaufgaben eher mit halbschriftlichen Strategien, in diesem Fall am Malkreuz, zu lösen als am Punktfeld darzustellen.

Eine geeignete Darstellung und Begründung für den Zusammenhang zwischen den Aufgaben *4·16* und *6·14* lässt sich am 400er-Feld folgendermaßen verdeutlichen:



Beide Aufgaben sind in ein und dasselbe Punktfeld eingetragen: Beiden Aufgaben ist das Teilfeld *4·14* gemeinsam (schraffiert). Das zusätzliche *4·2*-Feld der ersten Aufgabe muss in ein *2·4*-Feld umgelegt bzw. umgedeutet werden (schwarze Markierung). Die beiden Aufgaben unterscheiden sich also lediglich durch das *2·10*-Feld (grau markiert). (Die Aufgabe mit der kleineren Einerstelle beim Zehner weist das größere Ergebnis auf, hier: 4·10 zu 6·10.) Das *ganzheitliche*, eher *statische* Diagramm muss also zergliedert und eher *dynamisch* gedeutet werden.

Der Zusammenhang verdeutlicht sich also bei Punktfeld und Malkreuz auf ganz unterschiedliche Weise: Am Malkreuz müssen beide Aufgaben separat dargestellt werden, und man erkennt die beiden gleichen Ergebnisse (Multiplikation der Einerstellen). Hieran erkannten die Schüler sofort, dass sich bei der Multiplikation der Einerstellen nichts ändert, d.h. das Uminterpretieren eines Teilfeldes ist nicht notwendig.

•	10	6
4	40	

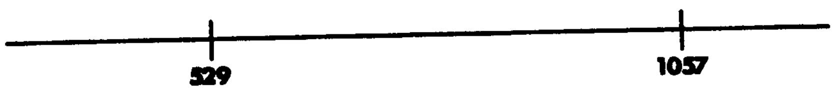
•	10	4
6	60	

Die Darstellung am Malkreuz ist jedoch reduziert, und lediglich am Punktfeld wird anschaulich klar, dass es sich nicht um ein und dieselbe Aufgabe handelt, sondern um eine Multiplikation mit entsprechender Tauschaufgabe. Das am Punktfeld gemeinsame Feld *4·14* ist am Malkreuz lediglich implizit enthalten, aufgeteilt in die Felder *4·10* und *4·4*.

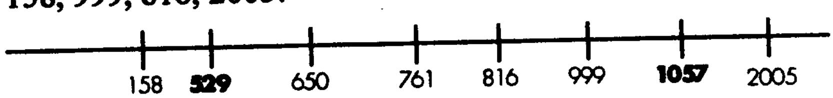
3. Von einer Veranschaulichung zu einer Begründungsstruktur für Rechenstrategien am leeren Rechenstrich

- *Was ist ein Rechenstrich und wie trägt man hier Zahlen »korrekt« ein?*

Zur Einführung des neuen Diagramms *Rechenstrich* wird den Kindern (in einer vierten Klasse) das folgende Beispiel vorgegeben; zwei Zahlen sind schon markiert:



Mehrere Schüler tragen auf dem Rechenstrich nacheinander diese Zahlen ein: 761, 650, 158, 999, 816, 2005:



Die Anordnung der Zahlen in diesem Diagramm ruft eine kontroverse Diskussion darüber hervor, ob ihre Darstellung korrekt ist. Die Schülerinnen und Schüler gehen vom bekannten Zahlenstrahl und seiner äquidistanten Skalierung aus. Zum Beispiel wird bemerkt, dass 529 nicht den etwa gleichen Abstand zu 158 haben dürfe wie zu 650. Dieses Problem, dass die *arithmetischen* Abstände der Zahlen auch auf dem Rechenstrich *geometrisch* korrekt wiedergegeben werden, wird von den Kindern auch bei anderen Aufgaben und Beispielen immer wieder angesprochen. Eine zweite Vorstellung über den Rechenstrich bezieht sich auf die »komplette Beschriftung« mit den Hundertern, wie sie es vom Zahlenstrahl her kennen. In der hier gegebenen Darstellung fehlen einige

Hunderter-Zahlen: die 200, 300 und 400. Sie dienen den Kindern als Orientierung für die korrekte Einteilung des Rechenstrichs.

Beim Rechenstrich kommt es jedoch im wesentlichen nur auf die korrekte Anordnung der Zahlen nach ihrer Größe an, nicht auf die »korrekten« geometrischen Abstände der Zahlen zueinander. Dies betont die Lehrerin zum Ende der Einführungsstunde ganz deutlich: *»Am wichtigsten ist die Reihenfolge.«*

- *Wie rechnet man mit dem Rechenstrich?*

Die Lehrerin schreibt eine Additionsaufgabe an, die »mit« dem Rechenstrich berechnet werden soll: »544 + 296 = __«. Die Schüler wollen zunächst das Ergebnis dieser Aufgabe an der richtigen Stelle auf dem Rechenstrich eintragen; dazu müssen sie erst die Aufgabe rein arithmetisch berechnen und dann entsprechend auf dem Rechenstrich notieren. Oliver erklärt sein Rechenverfahren, das dem der »Stellenwerte extra« gleicht:

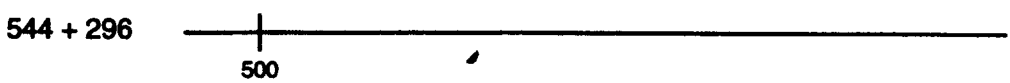
69 O: Also ich verkleinere die Zahl ...

71 O: Fünfhundert.

73 O: Dann zweihundert, sind siebenhundert.

75 O: Die neu-, die vierzig und die neunzig sind dreiß-, äh, einhundertdreißig, sind schon achthundertdreißig.

Oliver rechnet folgendermaßen: 544 + 296 = (500 + 200) + (40 + 90) .... Die Teilaufgabe: 500 + 200 soll nun am Rechenstrich dargestellt werden:



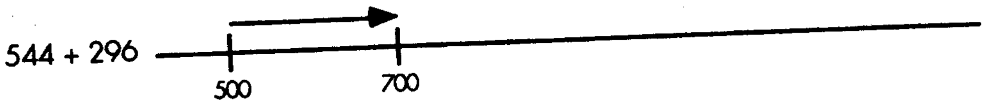
Wie kann der zweite Summand und das Ergebnis der Addition auf dem Rechenstrich notiert werden? Erst nach einer langwierigen Diskussion wird unter Rückgriff auf die Idee des »Pfeils« die gesuchte Darstellung am Rechenstrich von Christian vorgestellt:

129 C: Also irgendwie so ein Pfeil, so, und da drauf steht.

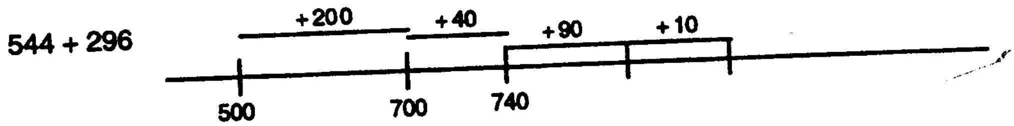
132 L: Ja, wo fängt der Pfeil denn an?

133 S: *[mehrere S reden durcheinander]* Am Strahl.

134 L: So, und bis wohin geht der? Ja? Lass die Pfeilspitze mal weg. Mirco?



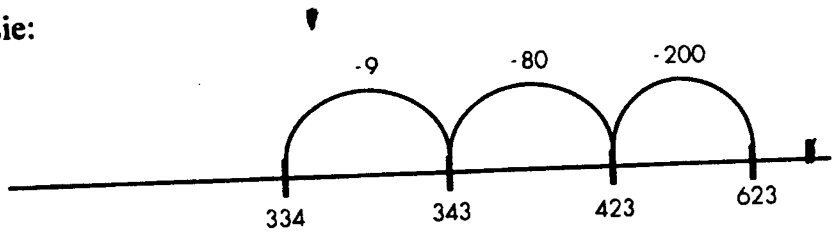
Sobald den Schülern diese visuelle Deutung der »+ 200« klar ist, können sie schnell die fehlenden halbschriftlichen Rechnungen auf den Rechenstrich übertragen: 544 + 296 = (500 + 200) + (40 + 90) + 10. Nach und nach ergibt sich folgendes Diagramm:



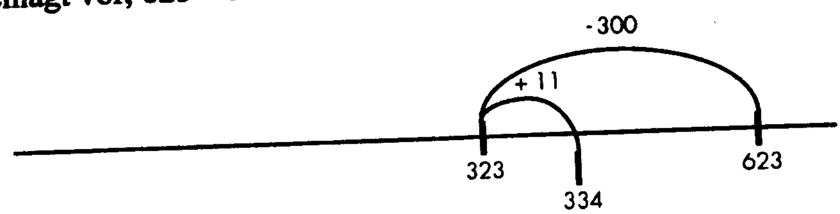
- *Was sind »günstige« Strategien bei Minusaufgaben am Rechenstrich?*

In der Besprechung einer Partnerarbeit werden zur Bearbeitung der Minusaufgabe »623 – 289 = __ « drei verschiedene Vorschläge diskutiert.

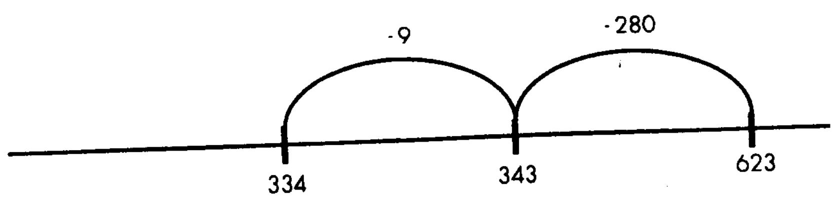
Diana rechnet nach dem Verfahren »Schrittweise«: 623 – 200 – 80 – 9; dazu zeichnet sie:



Marcel schlägt vor, 623 – 300 + 11 zu vereinfachen, und er zeichnet:



Viktoria erstellt den dritten Vorschlag; sie rechnet: 623 – 280 – 9 und zeichnet dazu:



Diese drei Vorschläge werden verglichen: Welcher ist »am günstigsten«? Marcels Vorschlag wird von Diana deshalb als der günstigste bewertet, weil er der »kürzeste« ist. Die Idee, dass 289 nahe bei 300 liegt wird als ein Grund genannt, sofort 300 zu subtrahieren. Jetzt muss der hierbei entstehende »Rechenfehler« korrigiert werden.

Marcel stellt Überlegungen dazu an, wie mit der 11, die zuviel subtrahiert wurde, verfahren werden müsste.

161 M: Ja, also, durch das, also, <u>danach</u> wird ja noch die <u>elf</u> abgez', also, dazu wieder gerechnet, also -

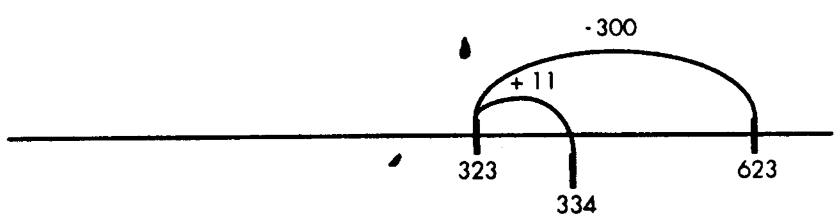
163 M: - abgezogen von der dreihundert -

165 M: - da kommt man ja auf zweihundertneunundachtzig -

Marcel gelingt es, die arithmetische Beziehung: $623 - 289 = 623 - 300 + 11$ sprachlich zu begründen; er merkt auch an, dass die 11 von der 300 abgezogen werden muss, was bekanntlich in der »Klammer–Schreibweise« so aussieht:

$$623 - 289 = 623 - (300 - 11).$$

Diese schwierige Beziehung (von einem zu großen Subtrahenden etwas zu subtrahieren bedeutet, diesen Betrag zum Minuenden zu addieren) wird nun am Rechenstrich mit seiner geometrischen Beziehungsstruktur *ganzheitlich* sichtbar:



Die Vorschläge von Diana und Viktoria stellen eine »Übersetzung« des arithmetischen Rechenweges in ein »grafisches Verlaufsdiagramm« am Rechenstrich dar, der Rechenweg wird *nachgezeichnet*. Eine andere Deutung lässt sich dem Vorschlag von Marcel entnehmen. Einerseits kann man das Diagramm am Rechenstrich natürlich wieder als den Ablauf des Rechenweges verstehen; man kann andererseits aber auch den Blick auf die strukturellen Beziehungen im Diagramm richten und diese Struktur zur Erklärung der Rechenstrategie benutzen, so wie es auch Marcel versucht hat. Auf diese Weise wird das Diagramm zu einer »*symbolischen Struktur*«, mit der man verschiedene Rechnungen begründen kann.

4. Statische und dynamische Deutungen

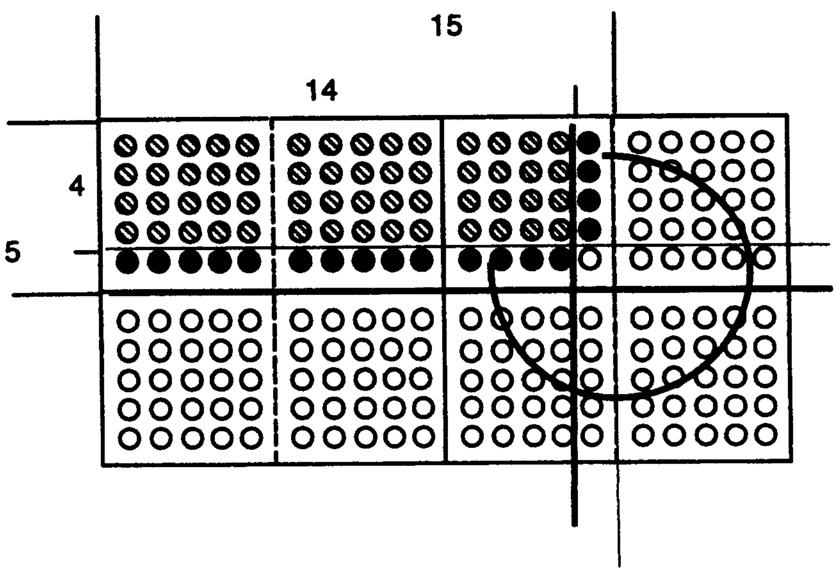
- *Punktfeld*

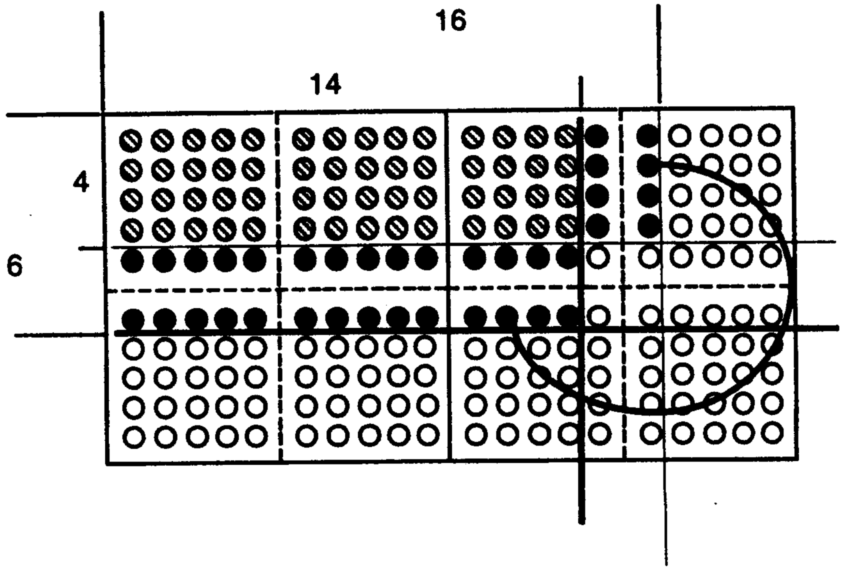
Die Schüler beschreiben und begründen in der ersten Unterrichtsszene primär und spontan an Zahlen, dort anhand des Malkreuzes, welches als eine Art Protokoll des Rechenwegs genutzt wird. Das Argumentieren an Zahlen bedeutet aber nicht unbedingt, dass lediglich am *konkreten Beispiel* argumentiert würde, sondern kann durchaus in *allgemeiner Art* erfolgen. Die Übersetzung der Aufgabenpaare bspw. in eine algebraische Form liefert folgende Darstellung im Malkreuz. Die Differenz, der Unterschied zwischen *10a* und *10b*, muss jedoch noch gedeutet werden.

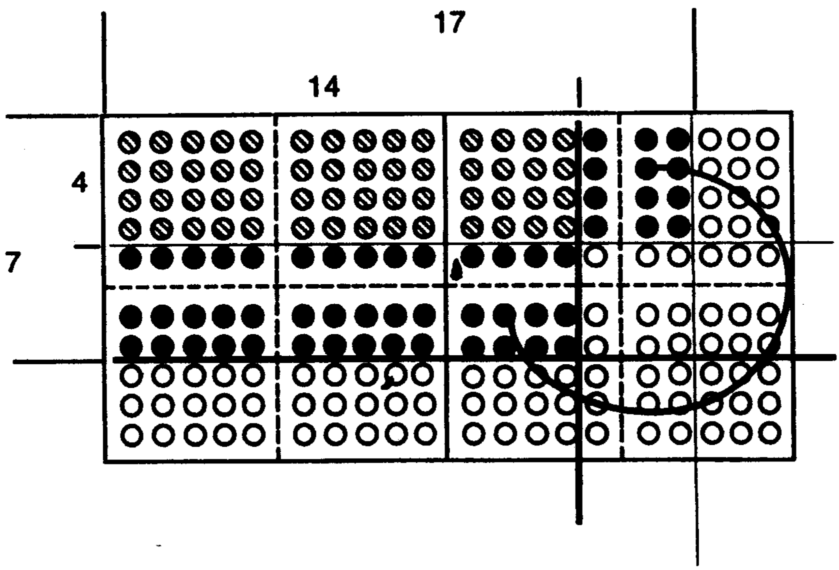
•	10	b
a	10a	ab

•	10	a
b	10b	ba

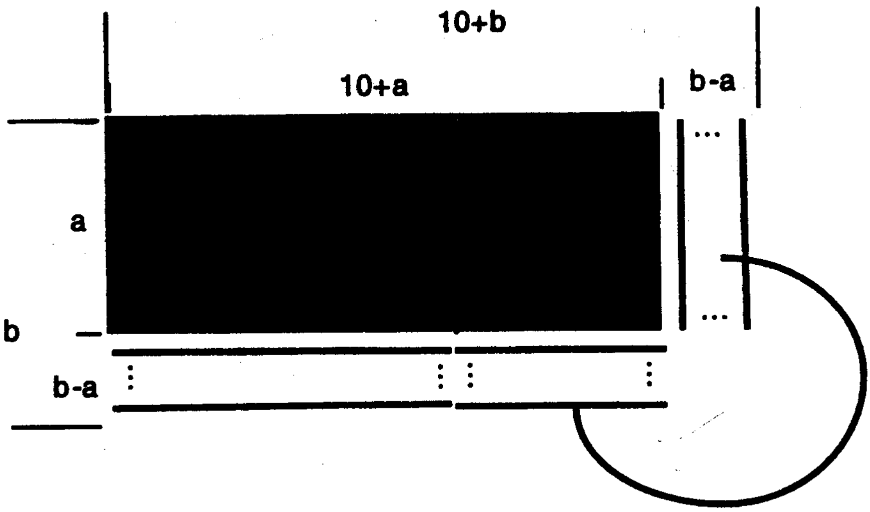
Die Deutungsmöglichkeiten am Punktfeld sind noch weitreichender: Betrachtet man mehrere Aufgabenpaare mit einem sich ändernden Zusammenhang (z.B. Differenz 10, 20, 30; gemäß dem operativen Prinzip; vgl. Wittmann (1985) wird ein Faktor jeweils beibehalten, der andere wird jeweils um 1 erhöht), kann man nun sowohl die invarianten als auch die veränderlichen Teile identifizieren:







Deutet man das Punktfeld in dieser Sequenz in *dynamischer* Art, so verdeutlichen sich auch die Zusammenhänge bei den weiteren auftretenden Differenzen: Je größer der Unterschied der beiden Einerstellen, desto weiter sind die beiden Folienkreuze auseinandergezogen, in der folgenden Abbildung auch dargestellt für den allgemeinen Fall:

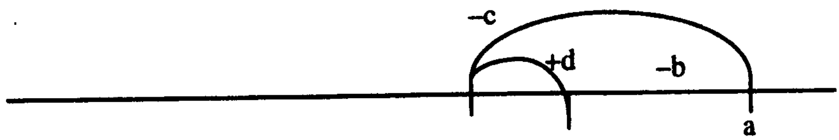


Ein derartiges Verstehen setzt eine aktive Deutung des Punktfeldes voraus: Die bei den Kindern eher *ganzheitliche* Deutung kann dies erschweren. Andererseits ist eine solche ganzheitliche Wahrnehmung dann von Vorteil, wenn die Kinder im Unterricht schnell und auch effizient in Punktfeldern vorgegebene Anzahlen bestimmen sollen, um auf diese Weise zählendes Rechnen zu vermeiden (vgl. Scherer 1999). Für ein allgemeineres Verständnis solcher Diagramme ist es jedoch erforderlich, auch *dynamische* Deutungen vorzunehmen (bspw. Uminterpretation von Punktfeldern für die Verdeutlichung von Rechengesetzen; vgl. auch Steinbring 1999).

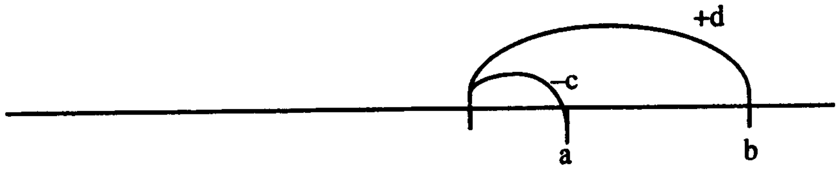
- *Rechenstrich*

In einer anderen Weise als beim 400er-Punktfeld wird beim Rechenstrich der Wechsel zwischen einer statischen und einer dynamischen Deutung eines Veranschaulichungsmittels vollzogen. Dient der Rechenstrich zunächst in Form eines Ablaufdiagramms zur »Protokollierung« der einzelnen Schritte einer (halbschriftlichen) Rechnung, so dient die eher statische und relationale Struktur eines gezeichneten Diagramms am Rechenstrich dazu, den »algebraischen«, strukturellen Zusammenhang von Rechenoperationen symbolisch zu visualisieren. Dieser strukturelle Aspekt wird besonders klar, wenn wir in der arithmetischen Aufgabe die verdeckte »algebraische Struktur« hervorheben. Für die »Rechenstruktur« in Marcels Darstellung sind z.B. die beiden folgenden Deutungen denkbar:

- $a - b = a - c + d = a - (c - d)$, wobei für den Subtrahenden gilt: $b = (c - d)$; in unserem Beispiel: $289 = (300 - 11)$



- a + __ = b wird in a + (–c + d) = b verändert; Beispiel: 334 + __ = 623 wird in 334 –11 + 300 = 334 + (–11 + 300) = 623 verändert; Ergebnis: 300 – 11 = 289



Ist der Rechenstrich zunächst bei seiner Einführung ein Mittel, um den arithmetischen Rechenweg in einem Diagramm möglichst getreu nachzuzeichnen, so kommt später bei dem Vergleich effektiver Rechenstrategien und ihrer Begründung am Rechenstrich eine neue Deutung in den Blick. Der Rechenstrich kann als ein strukturiertes, symbolisches Diagramm zu einer Begründungsbasis für das Funktionieren von arithmetischen Strategien werden. Ob jeweils eine solche Rechenstrategie – wie die Konstanz der Summe, oder der Differenz – gewählt und sinnvoll benutzt werden sollte, das hängt von speziellen Gegebenheiten der Zahlen und ihrer Struktur im Dezimalsystem ab.

5. Rückblick: Die Rolle von Veranschaulichungsmitteln in der Grundschule

Diagramme und Veranschaulichungsmittel sollen in der Grundschule dazu beitragen, mathematische Rechnungen nicht bloß als kleinschrittige Rezepte und Algorithmen zu »verstehen«, sondern durch Wahrnehmung von Beziehungen in verschiedenen Rechenstrategien und Rechenverfahren (etwa den schriftlichen Rechnungen) diese Rechnungen als arithmetisch-algebraische Strukturen zu sehen und diese unter Nutzung der Diagramme bewerten und auch begründen zu können.

Derartige Prozesse vollziehen sich aber nicht automatisch, wie das Beispiel des Punktfeldes zeigt, welches nur nachgeordnet genutzt wird. Ein Diagramm ist potenziell mehrdeutig und muss immer aktiv gedeutet werden, während die Zahlen, die Zahlensätze, für die Kinder oft vergleichsweise eindeutig sind. Das Begründen am Punktfeld kann somit für die Kinder schwieriger sein als das Begründen mit Zahlen. Das *sukzessive Berechnen* kann mit einer eher *ganzheit-*

lichen oder *statischen Sichtweise* eines Diagramms (hier: Punktfeld) kollidieren (nicht zuletzt auch durch mögliche sprachliche Schwierigkeiten bei der Übersetzung). Die Schüler bevorzugen oftmals Veranschaulichungen, welche eher *sukzessiv* bearbeitet und gelesen werden (z.B. Rechenstrich, Malkreuz), aber erst im Zusammenspiel von statischen und dynamischen Deutungen kann sich *allgemeines* Verständnis entwickeln.

Häufig dient die Veranschaulichung den Schülern am Anfang nicht als eigentliches Mittel zur Erläuterung und Begründung, sondern als Verifikation bspw. einer zuvor an Symbolen durchgeführten Strategie. Dies macht aber lediglich einen ›Teil‹ anschaulichen Beweisens oder allgemeinen Verstehens aus. Wie gezeigt, können Veranschaulichungen auch eine »symbolische Struktur« erhalten, d.h. sie können nicht nur *exemplarische* Beispiele, sondern *allgemeingültige* Begründungen liefern. Nicht schon die Kenntnis eines Rechen*wegs*, sondern erst die Wahrnehmung der *Struktur* der Rechnung ermöglicht *mathematisches Verstehen.*

Literatur

Jahnke, H. N.: Anschauung und Begründung in der Schulmathematik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth 1984, S. 32-41.

Scherer, P.: Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen. Leipzig 1999.

Schipper, W.: Stoffauswahl und Stoffanordnung im mathematischen Anfangsunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik, H. 2, 1982, S. 91-120.

Steinbring, H.: Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule. In: Mathematische Unterrichtspraxis, H. 4, 1994 S. 7-19.

Steinbring, H.: Kinder erschließen sich eigene Deutungen – Wie Veranschaulichungsmittel zum Verstehen mathematischer Begriffe führen können. In: Grundschule , H. 3, 1997, S. 17 – 19.

Steinbring, H.: Offene Kommunikation mit geschlossener Mathematik? In: Grundschule, H. 3, 1999, S. 8 - 13.

Sundermann, B./Selter, C.: Halbschriftliches Rechnen auf eigenen Wegen. In: Müller, G. N./Wittmann, E. Ch. (Hrg.): Mit Kindern rechnen. Frankfurt am Main 1995, S. 165-178.

Treffers, A.: Didactical backround of a mathematics program for primary education. In: Streefland, L. (Hrg.): Realistic Mathematics Education in Primary School. Utrecht 1991, S. 21-56.

Wittmann, E. Ch.: Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: mathematik lehren, H. 11, 1985, S. 7-11.

Wittmann, E. Ch.: Standard Number Representations in the Teaching of Arithmetic. In: Journal für Mathematik-Didaktik, H. 2/3, 1998, S. 149 - 178.

Wittmann, E. Ch.: »Weniger ist mehr«: Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Müller, K. P. (Hrg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim 1993, S. 394-397.

Wittmann, E. Ch./Müller, G. N.: Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Bender, P. (Hrg.): Mathematikdidaktik in Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter, Berlin 1988, S. 237-257.