Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung

H. Steinbring

In: *Journal für Mathematik–Didaktik*, Jahrgang 21, 2000, Heft 1, S. 28 – 49.

Heinz Steinbring

Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung

Zusammenfassung. Interaktive Konstruktionen neuen mathematischen Wissens mit den einhergehenden Verallgemeinerungen können in der Grundschule nicht mit den "klassischen" Mitteln der elementaren Algebra durchgeführt werden. Das neue Wissen ist an die situativen Lern- und Erfahrungskontexte der Kinder gebunden und sie müssen lernen, im Besonderen das Allgemeine zu erkennen. Ein besseres Verstehen dieser Problematik ist ein zentrales Ziel eines von der DFG finanzierten Projektes. In diesem Beitrag wird die Konzeption der epistemologisch orientierten Analyse mathematischer Interaktionen des Forschungsprojektes dargestellt. An zwei typischen Unterrichtsepisoden wird dieser Forschungsansatz verdeutlicht; im Zentrum der Analyse steht die Wechselwirkung zwischen der (allgemeinen) *kommunikativen* Dimension in der unterrichtlichen Interaktion und der *epistemologischen* Dimension des neu zu entwickelnden Wissens.

Abstract. Interactive constructions of new mathematical knowledge together with accompanying generalisations cannot be performed in primary teaching with "classical" means of elementary algebra. The new knowledge is dependent on the children's' situative contexts of learning and experience. The young students have to learn to see the general in the particular. A better understanding of this problematique is a central aim of a research project funded by the German Research Community (DFG). In this contribution the concept of an epistemologically oriented analysis of mathematical interaction as it is used in this research project is presented in an exemplary manner. The research approach is demonstrated with the help of two typical teaching episodes; the main focus is on the interplay between the (general) communicative dimension of the teaching interaction and the epistemological dimension of the new knowledge to be developed.

1. Einleitung

Die interpretative Analyse dokumentierter mathematischer Unterrichtsprozesse kann von verschiedenen theoretischen Standpunkten aus erfolgen. In diesem Beitrag werden insbesondere zwei Dimensionen und ihre Wechselbezüge als die grundlegende theoretische Perspektive auf interaktive Lehr-Lern- Prozesse eingenommen: Der besondere Charakter der *Unterrichtskommunikation* und die spezifische *epistemologische Natur mathematischen Wissens*. Die soziale Konstruktion neuen Wissens wird hierbei letztlich als ein interaktiver Prozeß mit "offenem" Ausgang aufgefaßt, der nicht vollständig vorab determiniert werden kann. Ein besseres Verstehen darüber, von welchen Bedingungen der "Erfolg" interaktiver Konstruktionen neuen mathematischen Wissens beeinflußt wird, ist eine zentrale Fragestellung eines von der DFG finanzierten Forschungsprojektes: "Epistemologische und sozial-interaktive Bedingungen der Konstruktion mathematischer Wissensstrukturen (im Unterricht der Grundschule)*)" (vgl. Steinbring et al. 1998; Steinbring 1999).

Unter der hier eingenommenen theoretischen Perspektive wird desweiteren von einer Auffassung zum mathematischen Wissen ausgegangen, nach der sich dieses Wissen nicht in fertigen Definitionen, Sätzen und Beweisen erschöpft, sondern die Entwicklung des Wissens als Herstellung von Deutungen zwischen symbolischen Strukturen und möglichen Referenzkontexten betrachtet wird. Diese Sichtweise auf die Natur des mathematischen Wissens ist für die hier durchgeführten Untersuchungen wichtig, weil erst unter diesem Blick der Erfolg mathematischer Unterrichtsprozesse nicht nach der "Korrektheit bzw. Fehlerhaftigkeit fertigen mathematischen Wissens” beurteilt wird, sondern unterschiedliche Formen der unterrichtlichen Interaktionen als soziale Konstruktionen mathematischen Wissens mit einer jeweils “situationsspezifisch konstituierten Auffassung” über dieses Wissen gesehen werden können.

Grundschulkindern ist es etwa gar nicht möglich, neues mathematisches Wissen und die dazu erforderlichen verallgemeinernden Begründungen mit den “klassischen” Konzepten der elementaren Algebra zu produzieren, um das noch unbekannte Wissen zu beschreiben bzw. mit diesem zu operieren. In der Grundschule ist das neue mathematische Wissen in charakteristischer Weise an die situativen Lern– und Erfahrungskontexte der Schülerinnen und Schüler gebunden. Bei ihren Versuchen der Verallgemeinerung arithmetischer Beziehungen müssen die Kinder eigene situative Beschreibungen entwickeln, sie können nicht auf fertige algebraische Notationen zurückgreifen. Dennoch sind sie sehr wohl in der Lage, im Besonderen das Allgemeine zu sehen und mit eigenen Worten zu benennen (zum Problem von Anschauung und Begründung vgl. Jahnke 1984; zu einem kommunikationstheoretischen Analyseansatz von mathematischer Argumentation vgl. Krummheuer 1998). Solche interaktiven Geschehnisse kann man aber nur dann als echte mathematische Konstruktionsprozesse auffassen, wenn mathematisches Wissen nicht als ein vorgefertigtes, objektives und logisch konsistentes Produkt gesehen, sondern die Herstellung von Beziehungen zwischen Symbolsystemen und Deutungskontexten in den Mittelpunkt gestellt wird.

2. Annäherung an das Forschungsproblem: Ist Unmögliches möglich?

Das Zusammenspiel zwischen den Formen der Kommunikation im Unterrichtsverlauf und den in der Interaktion (implizit und explizit) hergestellten Auffassungen und Deutungen zum mathematischen Wissen ist der theoretische Ausgangspunkt für die epistemologisch orientierte Interaktionsanalyse. Wie man diese Wechselbeziehung z.B. in Unterrichtsepisoden wahrnimmt und auch analysiert, hängt von grundlegenden Annahmen über die erkenntnistheoretische Natur des mathematischen Wissens ab. Die Wechselbeziehungen zwischen diesen zentralen Elementen “Formen der Unterrichtskommunikation”, “interaktive konstituierte Mathematikdeutung” und “Natur des mathematischen Wissens” sollen beispielhaft an einer (erfundenen) kurzen Unterrichtsepisode in einem ersten Herangehen verdeutlicht werden.

Im Unterricht einer 6. Klasse werden verschiedene Beschreibungen von Ergebnissen eines Würfelwurfs als Ereignisse aufgeschrieben; z.B.: “Würfle eine 6!”; “Würfle eine Zahl kleiner oder gleich 2!”, “Würfle eine gerade Zahl!” usw. An der Tafel stehen Ereignisse wie z.B.: $\{6\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3\}$, $\{5, 6\}$ oder $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Hier beginnt die Episode “*Ist das unmögliche Ereignis möglich?*”.

1	L	Es gibt eine Teilmenge, die wir nie schreiben werden, aber wir wollen sie erwähnen.
2	S	Klammer auf eins, drei, fünf Klammer zu.
3	S	.... die ungeraden.
4	L	Ja, das haben wir gehabt.

5	S	Zahl kleiner gleich eins.
6	L	Das könnte man machen. Wie würdest du das als Menge schreiben?
7	S	Eins in Klammern.
8	L	Richtig! Wenn ich jetzt sage: Würfle eine Zahl kleiner als eins?
9	S	... das geht nicht! ……
10	L	Das ist auch ein Ereignis! Dieses Ereignis .....
11	mehrere S	.... geht nicht! ..... geht nicht!!
12	L	Wie können wir das mit einem Adjektiv versehen?
13	S	..... das unsichere Ereignis.
14	L	Wir sagen einfach das unmögliche Ereignis. Was ist das für eine Teilmenge, wenn ich vom unmöglichen Ereignis spreche?
15	S	Das ist die leere Menge, nämlich nix in Klammern.
16	S	Das gibt es doch alles gar nicht!

Aus einer Betrachtungsweise, die den Blick vornehmlich auf die kommunikativen Beiträge in dieser Episode richtet, könnte man analysieren, daß auf den Impuls des Lehrers (1) mehrere Vorschläge der Schüler erfolgen: Es wird die Menge bzw. das Ereignis der ungeraden Zahlen angeboten (2, 3); der Lehrer signalisiert indirekte Ablehnung (4), und darauf wird alternativ das Ereignis “Zahl $\leq$ 1” angeboten und vom Lehrer mit der Frage, wie es – als Menge – geschrieben wird, scheinbar angenommen. Die Antwort – {1} – wird akzeptiert, der Schülervorschlag wird vom Lehrer aufgegriffen und modifiziert: “Würfle eine Zahl kleiner als eins!” Dazu gibt es abwehrende Reaktionen: “Das geht nicht!”. Der Lehrer erklärt jedoch auch diese Beschreibung zu einem (möglichen) Ereignis: Mit welcher Eigenschaft läßt sich dieses Ereignis beschreiben? In Bedeutungsaushandlungen mit den Schülern wird über unsicheres Ereignis das unmögliche Ereignis vereinbart. Und welche Menge gehört zu diesem unmöglichen Ereignis? Ein Schüler scheint sich an die leere Menge zu erinnern (15); während ein anderer Schüler zugleich abweisend reagiert: “Das gibt es doch alles gar nicht!” (16).

Eine ausschließlich kommunikative Analyse könnte beispielsweise die “Logik” in der Abfolge der sprachlichen Beiträge erkunden und zu erklären versuchen, wie bestimmte Äußerungen zustande gekommen sein mögen. Wie ist zum Beispiel der Vorschlag “… das unsichere Ereignis” (13) zu interpretieren? Der Lehrer hatte das jetzt gesuchte Ereignis als ein ebenso “am Rande” stehendes Ereignis charakterisiert, wie das zuvor diskutierte “sichere Ereignis”, und dieser Kontrast mag den Schüler zu seiner Kennzeichnung geführt haben. Auch ist das Aufgreifen des Schülervorschlags “Zahl $\leq$ 1” durch den Lehrer mit seiner Modifikation “Zahl < 1” aus kommunikativer Analysesicht bestimmt bemerkenswert. Zudem sind Äußerungen, wie die letzte: “Das gibt es doch alles gar nicht!” (16) höchst vielfältig deutbar: Unmögliche Ereignisse sind unmöglich, leere Mengen sind keine Mengen, oder das ist doch alles Quatsch. Entsprechend solcher beispielhafter Untersuchungsziele sagt eine rein kommunikative Analyse von (mathematischer) Unterrichtsinteraktion zunächst noch gar nichts über die mathematische Qualität oder den Lernzuwachs der Kinder aus. “… die ‚mikroskopischen' Analysen alltäglicher mathematischer Unterrichtsgespräche [zeigen], daß der Versuch von Schülern, sich reibungslos in den Unterrichtsgesprächen anzupassen, sogar dem Mathematiklernen abträglich sein kann

… Wir sollten der Versuchung widerstehen, Mathematiklernen mit der erfolgreichen Beteiligung des Schülers an Interaktionsmustern zu identifizieren“ (Voigt 1994, S. 82).

Geht man von einer Auffassung über die (elementare) Mathematik aus, wonach die mathematische Fachsprache in unzweideutiger Weise mathematische Gegenstände beschreibt, die im logischen Gebäude der Mathematik ihren festen Platz haben, dann führt diese Unterichtsinteraktion – mit den inzwischen wohl bekannten Mustern und Routinen – doch eigentlich zu einem korrekten, brauchbaren mathematischen Ziel: Das unmögliche Ereignis entspricht der leeren Menge. Zumindest ein Schüler scheint sich daran erinnern zu können, und vielleicht weckt dies auch das Verstehen einiger anderer Klassenkameraden. Unter dieser Perspektive liefert eine rein kommunikative Analyse dann vielleicht zusätzliche Hinweise darauf, wie mathematische Interaktionen ablaufen, in denen es um die Vermittlung festen, eindeutigen mathematischen Wissens geht.

Legt man jedoch eine Sichtweise zugrunde, nach der das mathematische Wissen erst in der Interaktion (und in der Aktivität) entstehen kann, es sich also um einen Prozeß der interaktiven Deutung von mathematischen Begriffen und Bezeichnungen handelt und nicht um die Vermittlung schon existierenden festen Wissens, dann kann eine zunächst kommunikative Deutung durch eine epistemologisch orientierte Analyse grundlegende Ergänzungen erfahren. Im Verlaufe dieser Unterrichtsepisode sollen die Schüler Spielereignisse mit mathematischen Bezeichnungen und Zeichen beschreiben: So entspricht der Spielregel: “Würfle eine gerade Zahl” das Ereignis: $\{2, 4, 6\}$, und diese mathematische Beschreibung wird noch mit der entsprechenden Menge bzw. Teilmenge in Verbindung gesetzt. In der Interaktion geht es also um die Deutung neuer Zeichen bzw. Symbole (der mit Mengenklammern und Zahlen dargestellten Ereignisse) unter Bezugnahme auf ein konkretes Würfelspiel mit Regeln. Genau darin liegt der Kern der epistemologischen Perspektive: Wie erhalten die neuen mathematischen Zeichen und Symbole Bedeutung, und von welcher Art ist diese (Be-)Deutung?

Den zunächst gemeinsam betrachteten Beispielfällen “Würfle eine 6!”; “Würfle eine Zahl kleiner oder gleich 2!” usw. entsprechen konkrete, durchführbare Würfelexperimente mit beobachtbaren Ausfällen. Schon die “Ausweitung” der Spielregeln auf “alle Zahlen” und dann noch stärker auf das Beispiel “Würfle eine Zahl < 1!” gehen über den konkreten Spielkontext hinaus. Diese “unrealistischen” Spielregeln bieten nicht dieselbe Erklärungsgrundlage für die entsprechenden mathematischen Zeichen, wie die zuvor behandelten Beispiele. Sie sind in der Tat nicht möglich, und zwar in einem unmittelbaren Sinne. Die Einführung des unmöglichen Ereignisses und auch der leeren Menge erfordern und bewirken eine grundlegende Umdeutung des Erklärungskontextes dieser Begriffe. Diese Begriffe sind nur als relationale Elemente eines strukturellen, operativen Netzes, und nicht länger als empirisch erklärbare mathematische Kennzeichnungen verstehbar (vergleichbar ist z.B. der Übergang von den positiven Zahlen zur Null, oder später zu den negativen Zahlen). Letzten Endes handelt es sich bei dem “unmöglichen Ereignis” bzw. der “leeren Menge” um einen theoretischen Term (Jahnke 1978), der nur durch ein Relationssystem gedeutet werden kann; damit ist er auch in der Kommunikation nicht durch einen eindeutigen referentiellen Bezug auf einen festen Gegenstand mitteilbar.

Unter einer epistemologisch orientierten Analyse läßt sich in der vorliegenden Episode geradezu ein Deutungskonflikt für die Erklärung des Begriffs “Ereignis” (der Interpretation der mathematischen Zeichen) im Übergang von einer empirischen Deutung zu einer notwendigen – aber hier nicht wirklich ins Auge gefaßten – strukturellen Deutung konstatieren. Diese “Unmöglichkeit” einer Bedeutungsherstellung auf der bisherigen Erklärungsebene scheinen mehrere Schüler vehement mit “… das geht nicht!” (9, 1) zum Ausdruck bringen zu wollen. Während dann ein Schüler sich auf das eingespielte Interaktionsritual mit dem Lehrer einläßt und so routinemäßig auf der kommunikativen Ebene das “unmögliche Ereignis” und die “leere Menge” entwickelt werden, kann am Ende immerhin ein Schüler diesem “faulen” Kompromiß einer gemeinsam ausgehandelten Wissensdeutung mit den Worten widerstehen: “Das gibt es doch alles gar nicht!” (16).

3. Unterrichtliche Kommunikation und situativ konstituierte Epistemologie des mathematischen Wissens

Der theoretischen Beschreibung und Analyse von mathematischen Interaktionsprozessen gemäß den Wechselbeziehungen zwischen der kommunikativen und epistemologischen Dimension liegen zwei theoretische Orientierungen zugrunde, die sich zum einen auf das Luhmannsche Konzept von Kommunikation stützt (z. B. Luhmann 1997, S.190 - 230) und zum anderen das epistemologische Dreieck benutzt (z.B. Maier & Steinbring 1998; Steinbring 1989; 1991; 1998). Eine zureichende, umfassende Erörterung dieser theoretischen Positionen ist hier nicht möglich (siehe dazu Steinbring et al. 1998); im folgenden sollen daher nur die Grundideen beschrieben werden, soweit sie für die sich anschließende Analyse von exemplarischen Episoden aus dem Mathematikunterricht der Grundschule erforderlich sind.

In der systemtheoretischen Beschreibung sozialer Systeme wird »Kommunikation« von Luhmann als der fundamentale Begriff der Soziologie eingeführt. “Die Kommunikation ist das Letztelement oder die spezifische Operation … sozialer Systeme. Sie besteht aus der Synthese dreier Selektionen: (1) Mitteilung; (2) Information; (3) Verstehen der Differenz zwischen Information und Mitteilung” (Baraldi, Corsi & Esposito 1997, S. 89). Mit dieser theoretischen Grundperspektive beschreibt Luhmann Gesellschaft mit ihren sozialen Teilsystemen insgesamt. Hier soll nur auf den zentralen “Mechanismus” von Kommunikation eingegangen werden, soweit er für unser Anliegen relevant ist.

“Man spricht von Kommunikation, wenn Ego versteht, daß Alter eine Information mitgeteilt hat; diese Information kann ihm dann zugeschrieben werden. Die Mitteilung einer Information (Alter sagt zum Beispiel »Es regnet«) ist nicht an sich Information. Die Kommunikation realisiert sich nur, wenn sie verstanden wird: wenn die Information (»Es regnet«) und Alters Intention für die Mitteilung (Alter will zum Beispiel Ego dazu bringen, einen Regenschirm mitzunehmen) als unterschiedliche Selektionen verstanden werden. Ohne Verstehen kann Kommunikation nicht beobachtet werden: Alter winkt Ego zu, und Ego läuft ruhig weiter, weil er nicht verstanden hat, daß der Wink ein Gruß war. Das Verstehen realisiert die grundlegende Unterscheidung der Kommunikation: die Unterscheidung zwischen Mitteilung und Information” (Baraldi, Corsi & Esposito 1997, S. 89).

Beispiele für eine so verstandene Kommunikation finden sich in der obigen Unterrichtsepisode. So teilt Alter – der Lehrer – mit: “Ja, das haben wir gehabt” (4). Und Ego – ein

Schüler – zeigt durch seine Mitteilung, daßVerstehen beobachtbar wird: “Zahl kleiner gleich eins” (5). Der Lehrer wollte mit seiner Mitteilung nicht einfach die Information geben, daß dieses Beispiel schon einmal vorkam, sondern daß noch nicht der vom ihm intendierte Fall angegeben wurde; der Schüler probiert ein anderes Beispiel, und er macht dazu eine weitere Mitteilung. Die Kommunikation am Ende der Episode könnte man so interpretieren. Der Lehrer macht die Mitteilung: “Das unmögliche Ereignis ist möglich.”, wobei er die Intention zu haben scheint, die (nicht realisierbare) Spielregel “Würfle eine Zahl < 1” formal den anderen Regeln “Würfle eine Zahl ≤ 1” oder “Würfle eine Zahl > 1” gleichzustellen. Ein Schüler teilt mit: “Das unmögliche Ereignis ist unmöglich” und verbindet mit dieser Mitteilung eine andere Information als vom Lehrer intendiert; während ein weiterer Schüler scheinbar durch seine Mitteilung “Das unmögliche Ereignis ist die leere Menge” ein Verstehen beobachtbar macht.

Wenn man Kommunikation beobachtet – wie zum Beispiel die Unterrichtsepisode – dann registriert man eine Abfolge von Mitteilungen und man rekonstruiert die davon zu unterscheidenden Informationen, indem man versucht,Verstehen zu identifizieren. Die Unterscheidung von Mitteilung, Information und Verstehen gründet Luhmann auf de Saussures Unterscheidung zwischen Bezeichnendes (signifiant), Bezeichnetes (signifié) und Zeichen (signe). In einer Interaktion werden somit laufend in Form von “Bezeichnenden” Mitteilungen gegeben, die von den intendierten Informationen (den “Bezeichneten”) unterschieden werden müssen, und erst durch die Wahrnehmung dieser Unterscheidung kann Verstehen in Form der Herstellung eines “Zeichens” entstehen.

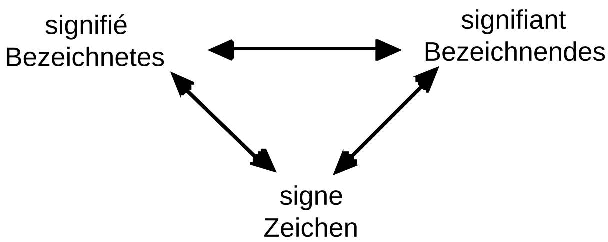


Fig. 1: Das semiotische Dreieck nach de Saussure

Der Mitteilende kann nur ein Bezeichnendes mitteilen, aber das vom Mitteilenden intendierte Bezeichnete, welches dann erst zu einem verstandenen Zeichen führen kann, bleibt offen und relativ unbestimmt; es kann nur vom Mitteilungsempfänger hergestellt werden, indem er selbst ein neues Bezeichnendes artikuliert. Luhmann erklärt dies so: “Wir gehen nicht von der Sprechhandlung aus, die ja nur vorkommt, wenn man erwarten kann, daß sie erwartet und verstanden wird, sondern von der Situation des Mitteilungsempfängers, also dessen, der den Mitteilenden beobachtet und ihm die Mitteilung, aber nicht die Information, zurechnet. Der Mitteilungsempfänger muß die Mitteilung als Bezeichnung einer Information, also beides zusammen als Zeichen (als Form der Unterscheidung von Bezeichnendem und Bezeichnetem) beobachten ….” (Luhmann 1997, S. 210). Der Empfänger darf das mögliche Bezeichnete *nicht strikt* dem Redner zuordnen, er muß es “selbst herstellen”, es entsteht in der sozialen Kommunikation.

Auf diese Weise kann Kommunikation erst zu einem sich selbst reproduzierenden, lebendigen System werden. Und in diesem “kommunikativen Mechanismus” besteht der für unser Anliegen wichtige Gesichtspunkt: Die Mitteilungen (Bezeichnenden) des Lehrers – oder der Schüler – beinhalten nicht in sich schon die Information (ein Bezeichnetes); diese

Unterscheidung, und damit der Wechselbezug zwischen Bezeichnendem und Bezeichnetem kann nur in der Interaktion zwischen den Teilnehmern hergestellt werden, ansonsten gibt es keine Kommunikation. Demgegenüber wird im Mathematikunterricht meist stillschweigend davon ausgegangen, daß die mathematischen Bezeichnenden genau ein wohlbestimmtes Bezeichnetes haben – {} bezeichnet definitiv das unmögliche Ereignis {Zahl ≤ 1} – was zu einer Zerstörung der mathematischen Kommunikation führen kann: Es besteht die Gefahr, die Mitteilung, z.B. “unmögliches Ereignis”, schon für die Information, z.B. “unmögliches Ereignis”, zu halten (oder halten zu müssen).

Die besondere Wechselbeziehung zwischen “Zeichen / Symbolen” und “Objekten / Referenzkontexten” ist zentral für die Beschreibung und Analyse von *mathematischer* Unterrichtskommunikation als einer spezifischen sozialen Interaktion. Jedes mathematische Wissen bedarf *bestimmter Zeichen- bzw. Symbolsysteme* zur Erfassung und zur Kodierung des Wissens. Diese Zeichen haben zunächst für sich alleine keine Bedeutung, sie muß von den lernenden Kindern hergestellt werden. Damit mathematische Zeichensysteme Bedeutung erhalten, bedürfen sie ganz allgemein gesprochen, angemessener *Referenzkontexte*. Bedeutungen für mathematische Begriffe werden als Wechselbeziehungen zwischen Zeichen-/Symbolsystemen und Referenzkontexten / Gegenstandsbereichen vom Erkenntnissubjekt aktiv konstruiert (Steinbring 1993). Der Zusammenhang zwischen den Zeichen zur Kodierung des Wissens und den Referenzkontexten zur Etablierung der Bedeutung des Wissens läßt sich im *epistemologischen Dreieck* darstellen. Die Beziehungen zwischen den Eckpunkten dieses Dreiecks sind nicht explizit definiert, sie bilden ein sich wechselweise stützendes und ausbalancierendes System. In der fortschreitenden Entwicklung des Wissens werden entsprechend die Interpretationen der Zeichensysteme und der entsprechenden Referenzkontexte modifiziert bzw. verallgemeinert.

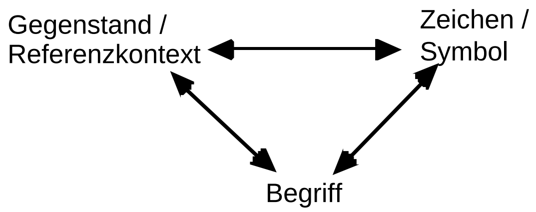


Fig. 2: Das epistemologische Dreieck

Der Unterscheidung zwischen “Bezeichnendem, Bezeichnetem und Zeichen” soll für die mathematische Unterrichtsinteraktion das epistemologische Dreieck an die Seite gestellt werden. Im Unterschied zum semiotischen Dreieck wurde für das epistemologische Dreieck eine andere Terminologie gewählt: “Zeichen / Symbol, Referenzkontext und Begriff”. Sie trägt der Tatsache Rechnung, daß mathematische Bezeichnende immer schon selbst Zeichen sind, und daß in der Mathematik über die Funktion hinaus ein “Zeichen / Symbol” zu sein, der mathematische Begriff von zentraler epistemologischer Bedeutung ist (und damit an die Stelle des “Zeichen” tritt). Mathematische Begriffe lassen sich somit ganz allgemein als “symbolisierte, operative Beziehungen” zwischen ihren abstrakten Kodierungen und den sozial intendierten Deutungen auffassen. “Eine epistemologische Sicht der Mathematik verändert insgesamt die Einstellung …, weil sie die Einteilungen nach elementarem und höherem Standpunkt bzw. nach trivialen und erhabenen Inhalten auf ihre Weise transzendiert und den jeweiligen Wissenserwerb als Teil eines einheitlichen menschlichen Erkenntnisprozesses ausweist” (Hefendehl-Hebeker 1999, S. 110).

4. Die interaktive Deutung abstrakter Zeichen in mathematischen Lernumgebungen – Die Analyse exemplarischer Unterrichtsepisoden

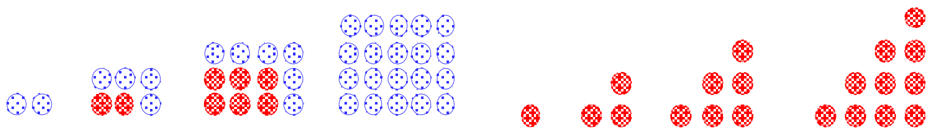
Im folgenden werden interaktive Muster der Konstruktion und Begründung neuen mathematischen Wissens in zwei typischen Unterrichtsepisoden analysiert. In einer Unterrichtsreihe – aus der das erste Beispiel stammt – wurde eine Lernumgebung zu figurierten Zahlen bearbeitet, in welcher zur Deutung der mathematischen Zeichen entsprechend ein *geometrischer* Referenzkontext zur Verfügung stand. Die zweite Episode ist einer Unterrichtsreihe zum Thema “Streichquadrate” (vgl. Wittmann & Müller 1990/92) entnommen, in welcher die neuen mathematischen Zeichen in *arithmetisch strukturierten* Referenzkontexten gedeutet wurden.

4.1 Dennis und seine Lehrerin begründen den Übergang vom zweiten zum dritten Rechtecksmuster

Die hier betrachtete Episode (aus einer 4. Klasse) entstammt der dritten Unterrichtsstunde dieser kurzen Reihe zum Thema “Figurierte Zahlen”. In der ersten Stunde wurden Dreieckszahlen und zugehörige Additionsaufgaben diskutiert; die 2. Stunde befaßte sich mit Rechteckszahlen und zugehörigen Malaufgaben. In dieser Stunde ging es zunächst um folgendes. An der Tafel sind die Plättchenkonfigurationen sowohl für die ersten vier Rechteckssowie Dreieckszahlen zu sehen. Darüber steht jeweils das Zahlzeichen für die entsprechende Anzahl der Plättchen. Rabea und Dennis haben ein Zusammenhang bemerkt: Jede Dreieckszahl ist die Hälfte einer Rechteckszahl. Zur Veranschaulichung wurden bei den Rechtecksfeldern einige Plättchen umgedreht. Entsprechend zu den Plusaufgaben bei den Dreieckszahlen sollten dann auch Plusaufgaben bei den Rechteckszahlen gefunden werden. Und anschließend sollten diese Plusaufgaben an den Punktefeldern durch entsprechend farblich markierte Plättchenbereiche gezeigt werden.

In dem hier verwendeten kurzen Ausschnitt geht es nun um eine spezielle Begründungsfrage: Warum ist die Plättchenkonfiguration für das dritte Rechteck, welche die Schülerin Nushin durch Umdrehen von Plättchen auf die rote Seite hergestellt hat, korrekt?

2 6 12 20 1 3 6 10



2 = 2
2 + 4 = 6
2 + 4 + 6 = 12

1 = 1
1 + 2 = 3
1 + 2 + 3 = 6
1 + 2 + 3+ 4 = 10

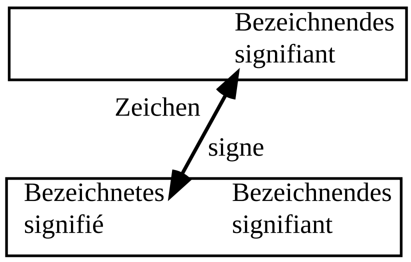
4.1.1 Dennis’ Begründung

154 D Also die, die [*L. legt die linke Hand auf die roten Plättchen der dritten Rechteckszahl*], die Sechs, die werden auch da rüber geschoben.

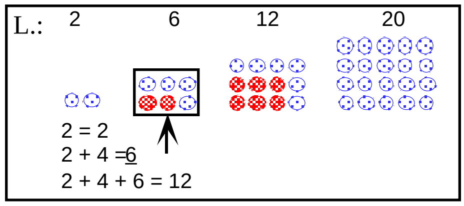
156 D Hier, ähm, das ist fast so [*geht zur Tafel*], also man muß das einfach nur doppelt machen. Hier [*zeigt mit dem Zeige- und Mittelfinger der linken Hand auf die roten Plättchen der zweiten Rechteckszahl*], da müssen hier einfach noch Plättchen und hier [*zeigt nacheinander mit dem rechten Zeigefinger unter die beiden roten Plättchen der zweiten Rechteckszahl*]. Das wär dann auch das Gleiche. Das müßte eigentlich nur noch doppelt sein. [*zeigt mit der rechten Hand auf die ganze zweite Rechteckszahl, und schaut zwischendurch zu den Plättchen der dritten Rechteckzahl hinüber*].

158 D Wenn's hier zwei jetzt wären [*zeigt unter die beiden roten Plättchen der zweiten Rechteckszahl*] und hier kommen jetzt noch einer hin [*deutet auf die Stelle unterhalb des blauen Plättchens in der rechten Spalte der blauen Plättchen der zweiten Rechteckszahl*]. Und hier kommen noch … – [*deutet links neben die erste Spalte der Plättchen der zweiten Rechteckszahl*].

Betrachten wir diese Äußerungen unter einer kommunikativen Perspektive auf die Interaktion als einer Kette von "Bezeichnenden", in der die Unterscheidung von »Bezeichnendes, Bezeichnetes, Zeichen« wirksam wird. Dennis beginnt mit der Mitteilung des folgenden "Bezeichnenden":

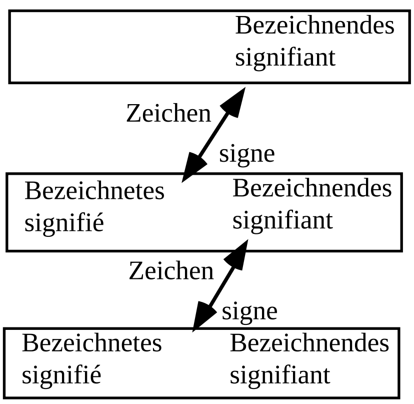


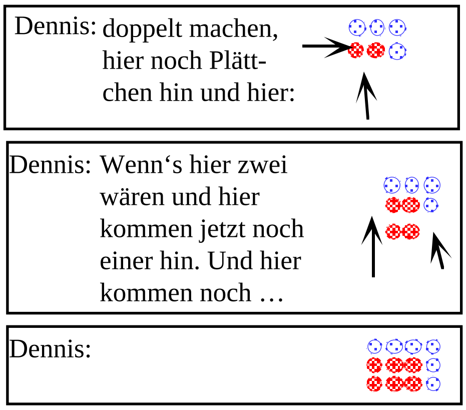
Dennis: Also …… die Sechs, die werden auch wieder da rüber geschoben.



An dieser Stelle bleibt offen, was Dennis damit intendiert. Die Lehrerin deutet sein Bezeichnendes, indem sie ein weiteres Bezeichnendes hervorhebt; sie legt ihre linke Hand auf alle sechs Plättchen, die offenbar in die roten sechs Plättchen des dritten Musters überführt werden sollen (wie man es später erkennt). Dennis beabsichtigt wohl, diese sechs Plättchen an die dritte Position zu stellen; um die entsprechende Konfiguration zu erhalten, sind weitere Plättchen erforderlich (dies wird nachträglich ersichtlich).

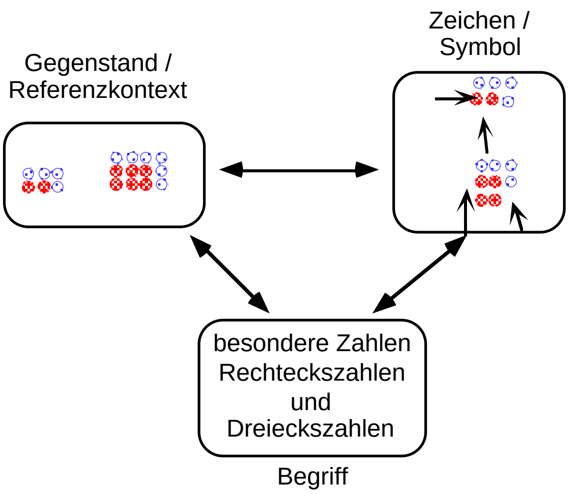
Mit der Idee, das zweite Muster an die dritte Stelle zu verschieben, deutet Dennis dann an, daß für die Herstellung des dritten Musters aus dem zweiten noch weitere rote und blaue Plättchen angefügt werden müssen, um so die gegebene Konfiguration zu erhalten. Er zeigt an die Stellen im zweiten Muster, wo rote Plättchen eingefügt und wo blaue angelegt werden müßten, um so das dritte Muster zu bekommen. Dennis legt kein neues Muster – es existiert ja schon – er stellt es sich vor und blickt dazu auf das existierende dritte Muster. Dennis gibt ein Konstruktionsverfahren des dritten Musters aus dem zweiten an, bei dem neue rote und blaue Plättchen hinzugefügt werden, ohne das Muster der zweiten Konfiguration z.B. durch Umdrehen der Plättchen abzuändern.





Als Begründung dafür, warum das dritte Rechtecksmuster von Nushin korrekt ist, beschreibt Dennis eine Konstruktion des dritten aus dem zweiten Muster. Die Darstellung dieser Konstruktion bleibt auf den konkreten Beispielfall begrenzt und dabei wird in gewissem Sinne die Kenntnis des dritten Musters benutzt, um das zweite Muster durch Anlegen neuer Plättchen in das dritte zu verwandeln. Im Prinzip könnte dieses Bauprinzip fortgesetzt werden, doch diese Intention ist nicht aus Dennis' Beschreibung herauszulesen. Zudem wäre aus dieser "konkreten" Fortsetzung nicht das arithmetische Fortsezungsprinzip in einfacher Weise herauszulesen. Hier zeigen sich ganz exemplarisch die besonderen Schwierigkeiten, mit Hilfe von Plättchenmustern zu argumentieren (vgl. Wittmann 1995; Wittmann & Müller 1988). Unter Benutzung des epistemologischen Dreiecks kann man einen *direkten* Zusammenhang zwischen den von Dennis konstruierten neuen Zeichen (zusätzliche neue rote und blaue Plättchen) und dem vorhandenen Kontext des existierenden dritten Musters konstatieren. Es werden auf diese Weise nicht in erster Linie Beziehungen thematisiert.

Dennis geht es um den Nachweis, daß ganz konkret das dritte Muster stimmt: Sein Konstruktionsverfahren scheint für ihn die Begründungsbasis für die Korrektheit des dritten Musters zu sein. Man könnte jedoch aus dem zweiten Muster durch Anlegen und Hinzufügen von weiteren roten und blauen Plättchen andere als das hier gelegte dritte Muster erzeugen. Die Korrektheit kann nicht von einem ad hoc Konstruktionsverfahren abhängen, sie muß etwas mit der „Form", die fortgesetzt werden soll, zu tun haben; zudem ist das richtige Plättchenmuster kein "logisch" zu entscheidendes Faktum.



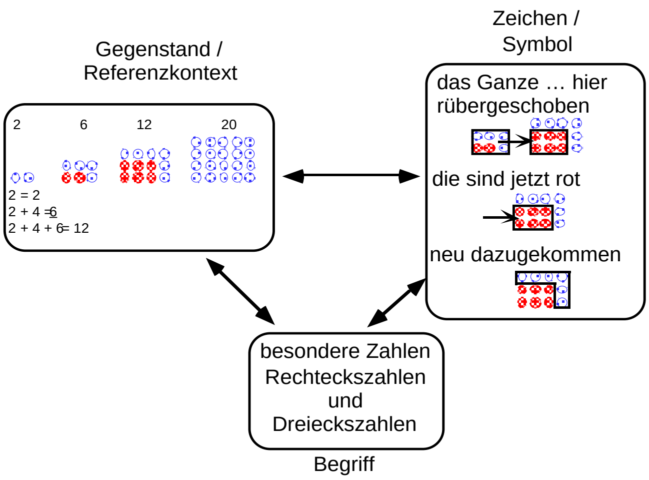
4.1.2 Die Begründung der Lehrerin

159	L	… das Ganze, die Sechs [*zeigt auf die zweite Rechteckszahl*] die haben wir hier rübergeschoben. [*zeigt auf die roten Plättchen der dritten Rechteckszahl*] Das haben wir auch gemacht. Und darum sind die jetzt auch rot [*umfährt mit der Hand die roten Plättchen der dritten Rechteckszahl*]. Weil das ist das, was wir hier schon stehen haben. Also das hier steht ja hier <u>wieder</u> [*kreist jeweils "2 + 4" in den Additionsaufgaben der zweiten und dritten Rechteckszahl mit Kreide ein*]. So, und was sind diese hier außen? Die Blauen, was sollen die? [*zeigt auf den Winkel, den die blauen Plättchen der dritten Rechteckszahl bilden, Dennis geht zurück zu seinem Platz*] Bastian.
160	B	Das sind die, die vorn noch übriggeblieben sind, also die, die neu dazukommen.
161	L	Genau, das sind die Sechs [*zeigt auf den Winkel, den die blauen Plättchen der dritten Rechteckszahl bilden*] plus sechs [*zeigt auf den Summanden "6" der Additionsaufgabe der dritten Rechteckszahl und unterstreicht ihn mit Kreide*], die wir hier haben. Dann sind wir wieder bei zwölf. [*zeigt auf die Summe "12" der dritten Rechteckszahl*].

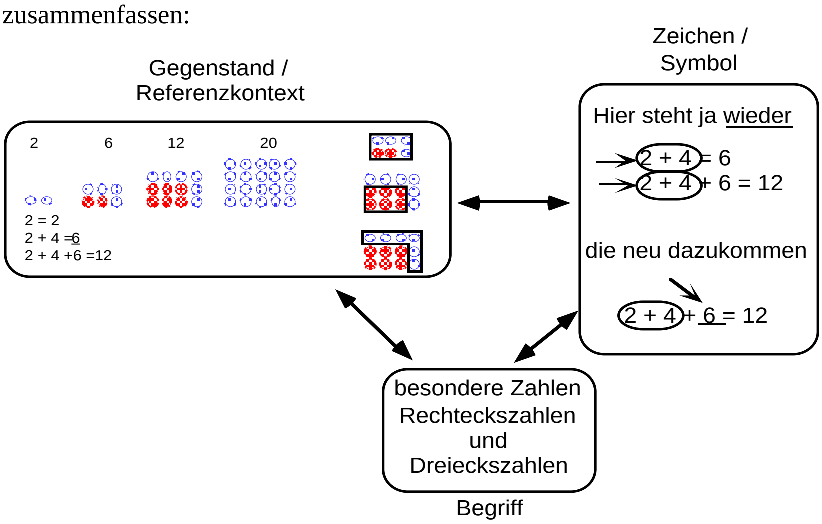
Mit dem ersten Teilargument (159, 160) deutet die Lehrerin an, wie das zweite Muster durch „Rüberschieben" auf das Rechteck der roten Plättchen im dritten Muster (und gleichzeitiges Umdrehen der blauen Plättchen) als ein Teil dieses Musters verstanden werden kann. Der Winkel der blauen Plättchen im dritten Muster besteht aus Plättchen, die neu hinzukommen. Auch hier wird ein Konstruktionsverfahren mit den folgenden Schritten beschrieben: Das zweite Muster rüberschieben, alle (alten) Plättchen auf rot umdrehen, einen Winkel (neuer) blauer Plättchen rechts anlegen. Die Eindeutigkeit des Verfahrens dient wieder als Begründung der Korrektheit des dritten Musters. Im Prinzip ist dieses Verfahren auch verallgemeinerbar; aber die Allgemeinheit des Fortsetzungsprinzips wird nicht explizit angesprochen – nur indirekt, z.B. in den Bemerkungen: „… die haben wir hier rübergeschoben." (159) und: „… "Das sind die, … die neu hinzukommen." (160).

Mit dem zweiten Teilargument (161) stellt die Lehrerin eine Verbindung zwischen den Plusaufgaben und dem zweiten und dritten Plättchenmuster her. Die beiden Summanden der zweiten Plusaufgabe (2 + 4) und der dritten Plusaufgabe (2 + 4) stellen das zweite Muster und die roten Plättchen im dritten Muster dar; der Winkel der blauen Plättchen wird durch den dritten Summanden in der dritten Plusaufgabe dargestellt, die „+ 6". In diesem zweiten Teilargument kommt eher eine gewisse Offenheit zum Ausdruck, da hier die Beziehung zwischen den Summanden der Plusaufgaben (und zum zweiten und dritten Muster) mit einer Beziehung zwischen den beiden Mustern (ihre Fortsetzungskonstruktion) in Beziehung gesetzt wird.

Gemäß der epistemologischen Deutung im Dreieck ergibt sich folgende Darstellung für das erste Teilargument. Im Referenzkontext der Plättchenmuster erzeugt die Lehrerin ein neues Zeichen, indem sie einen Übergang vom zweiten zum dritten Muster angibt. Einerseits ist dieses neue Zeichen (aus drei Teilelementen) für den betrachteten Beispielfall eindeutig und fest bestimmt; es soll die Korrektheit des dritten Musters begründen. Es könnte aber auch als ein „allgemeines“ Zeichen gedeutet werden, wenn hierin das Prinzip des Überganges zum nächst größeren Muster gelesen wird.In der Interaktion gibt es in der Episode keine direkt erkennbaren Hinweise darauf, daß dieses Zeichen auf andere Fälle übertragen werden soll oder könnte – weder von den Schülern, noch von der Lehrerin.



Das zweite Teilargument der Lehrerin läßt sich im epistemologischen Dreieck folgendermaßen zusammenfassen:



Die Lehrerin konstruiert in der arithmetischen Struktur der Plusaufgaben neue Zeichen durch Einkreisen und durch Unterstreichen. Zum einen werden diese Zeichen auf Plättchenmuster direkt bezogen: (2 + 4) auf das zweite Muster und auf die roten Plättchen im dritten Muster, sowie die unterstrichene 6 auf den Winkel der blauen Plättchen im dritten Muster. Zum anderen stehen diese Zeichen in einer Beziehung zueinander: sie kommen zugleich in der zweiten und der dritten Plusaufgabe vor, und sie beziehen sich auch auf den Übergang vom zweiten zum dritten Muster. Beim zweiten Teilargument wird durch die von der Lehrerin eingeführten Zeichen der Beginn einer Strukturierung des arithmetischen Kontextes der Plusaufgaben sichtbar, die den Zeichen nicht nur die Funktion einer direkten Zuweisung zu Elementen des Referenzkontextes gibt, sondern ihnen über eine hier mögliche, beginnende strukturelle Fortsetzung die Deutung als "symbolisierte, operative Beziehungen" verleiht. In dieser Fortsetzung könnten mehr und mehr neue Beziehungen aufgebaut werden.

4.2 Kim und Eva argumentieren mit einer unbekannten Zahl im Streichquadrat

Die in einer jahrgangsgemischten 3./4. Klasse durchgeführte kurze Reihe befaßte sich mit dem Thema Streichquadrate. Streichquadrate entstehen aus der Addition von gewissen Randzahlen (in Form einer Tabelle; vgl. Fig. 4). Streichquadrate haben die folgende Eigenschaft: Man darf in einem (3 · 3) Streichquadrat beliebig 3 Zahlen wählen (einkreisen), so daß es in jeder Spalte und in jeder Zeile genau eine eingekreiste Zahl gibt. Die Summe von drei so bestimmten Zahlen ist konstant – unabhängig von ihrer Auswahl (vgl. Fig. 5).

15	16	17
14	15	16
13	14	

Fig. 3

+	5	6	7
10	15	16	17
9	14	15	16
8	13	14	

Fig. 4

~~15~~	~~16~~	17
~~14~~	15	~~16~~
13	14	

Fig. 5

In den Stunden zuvor haben die Kinder mit Hilfe des sog. Streichalgorithmus die besondere Eigenschaft der Konstanz der Summe bei gegebenen Quadraten beobachtet; dann wurden Verfahren zur Herstellung von Streichquadraten aus Additionstabellen diskutiert und es wurde untersucht, wie die Streichsumme mit den Randzahlen zusammenhängt. In dieser Stunde haben die Kinder nun folgende Problemstellung zu bearbeiten: Wie kann man in einem Streichquadrat, in dem eine Zahl fehlt, diese Lücke so füllen, daß das Streichquadrat wieder hergestellt ist? (vgl. Fig 3). Es werden mehrere Strategien entwickelt: Einmal wird die Zahl 15 aufgrund der sichtbaren arithmetischen Regelmäßigkeit genannt; dann werden mögliche Randzahlen rekonstruiert (vgl. Fig. 4). In der folgenden Episode macht Kim einen anderen Vorschlag; sie will zur Bestimmung der fehlenden Zahl die Zauberzahl (die konstante Summe von drei eingekreisten Zahlen) benutzen.

4.2.1 Kims Begründung anhand der Zauberzahl

60 K Öh, man könnte es auch so machen, daß man, man jetzt das schon machen würde. Dann und dann noch nicht die Zahl hat. Und dann das zusammen ausrechnet, was da fehlt. Und dann kann man sich auch so ausrechnen wie, was da hin kommt.

Kim formuliert im ersten Teil der Episode ein ganz allgemeines und zunächst unverständliches Argument; erst in einem weiteren Argumentationsschritt werden Aspekte dieser Deutung nachträglich erschließbar. In ganz allgemeiner Weise könnte Kim folgende Deutung im Auge haben: “Man kann schon den Streichalgorithmus durchführen, wenn man die Zahl in der Lücke noch nicht gefunden hat.” Mit dem zweiten Teil des Bezeichnenden “Und dann das zusammen ausrechnet, was da fehlt. Und dann kann man sich auch so ausrechnen wie, was da hin kommt.” könnte wieder in ganz allgemeiner Weise intendiert sein: “Die drei Zahlen addieren und ausrechnen, was in der Lücke fehlt. Man kann sich so (mit der Additionsaufgabe für die Zauberzahl) ausrechnen, was in die Lücke kommt.”

Bevor Kim mit ihrer eigentlichen Begründung beginnt, wurde zuvor ausführlich die Berechnung der Zauberzahl aus den drei Zahlen 13, 15 und 17 durchgeführt; die Streichaufgabe wurde notiert und berechnet: 13 + 15 + 17 = 45. Hier setzt die Argumentation ein.

147 K Und dann könnte man’s noch so machen. Die Fünfzehn kreist man ein [*zeigt auf die Fünfzehn in der ersten Zeile*] und <u>die</u> Fünfzehn [*zeigt auf die Fünfzehn in der zweiten Zeile*] und rechnet das zusammen. Und rechnet dann noch aus, wieviel das dahin noch muß bis zur fünfundvierzig.

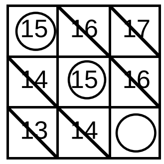
Mit dem Bezeichnenden “Die 15 kreist man ein und <u>die</u> 15. Dann rechnet das zusammen.” wird intendiert, den Streichalgorithmus auf zwei Zahlen in der Diagonalen anzuwenden. Das zweite Bezeichnende “Und rechnet dann noch aus, wieviel das dahin noch muß bis zur fünfundvierzig.” läßt sich so interpretieren: Aus der Summe von 15 und 15 muß man noch bis zur 45 rechnen (die Differenz bestimmen); diese Zahl gehört dann in das leere Feld.

An dieser Stelle wenden einige Mitschülerinnen ein, daß doch gar nichts gerechnet werden kann. “Ja, das bringt doch nichts … Wo willst du denn dann noch hinrechnen? … Genau. Du weißt ja noch gar nicht, welche Zahl rauskommt!” (152, 153).

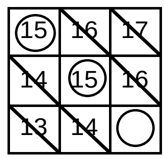
Damit Kim ihre Begründung ausführlich erläutern kann, stellt die Lehrerin die ursprüngliche Form des Quadrats wieder her.

161 K Man rechnet erst, man rechnet erstmal die Zahlen aus, die ich raus da, die stehen was da rauskommt. Und da…, und dann rechne…

165 K Die Drei, oh, also die, die und dann rechnet man dann hinter fünfzehn [*kreist die Fünfzehn in der zweiten Zeile ein*], nimmt man so. Streicht das durch, das durch. Und das durch, und das durch. [*streicht die Zahlen, die in der gleichen Spalte und Zeile wie die Fünfzehn sind, durch*] Dann nimmt man noch die Fünfzehn. [*kreist die Fünfzehn in der ersten Zeile ein*] Streicht dann die Siebzehn durch und die Dreizehn. [*streicht die noch nicht gestrichenen Zahlen, die in der gleichen Spalte und Zeile wie die Fünfzehn sind, durch*] Und dann kreist man das ein hier, hier. [*kreist das leere Feld ein*] Und dann muß man hier ausrechnen, fünfzehn und fünfzehn sind ja dreißig, wieviel noch fehlt zur Fünfundvierzig.

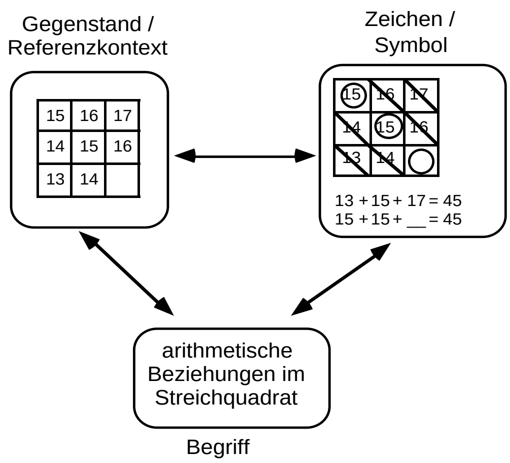


Kim wiederholt, daß zuerst die Berechnung der Zauberzahl vorgenommen werden soll, z.B. wie dies schon in der Additionsaufgabe durchgeführt wurde. Dann beginnt Kim konkret mit der Anwendung des Streichalgorithmus auf die beiden 15 (in der zweiten und in der ersten Zeile). Mit dem Bezeichnenden “Und dann kreist man das ein hier, hier.” wird intentional der Streichalgorithmus auf eine (unbekannte) dritte Zahl angewendet, die fehlende Zahl auf dem leeren Feld. Im zweiten Bezeichnenden “dann muß man hier ausrechnen, fünfzehn und fünfzehn sind ja dreißig, wieviel noch fehlt zur Fünfundvierzig.” wird einerseits die Berechnung der Zauberzahl aus den drei eingekreisten Zahlen intendiert: 15 und 15 sind 30. Mit der dritten eingekreisten Stelle kann aber nicht weitergerechnet werden. Andererseits soll jetzt “umgekehrt” mit der unbekannten Stelle so gerechnet werden, daß an diese Stelle die Zahl kommt,wieviel von 30 bis zur 45 (der Zauberzahl) fehlt. Das “Schema” der Berechnung der Zauberzahl wird auf die leere Stelle übertragen und damit ein neues Zeichen intendiert und auch ikonisch dargestellt. Mit Unterstützung der Lehrerin notiert Kim die Additionsaufgabe als eine Ergänzungsaufgabe. Mit dem Bezeichnenden “15 + 15 + __ = 45” wird intentional auf den Streichalgorithmus für drei Zahlen verwiesen und gleichzeitig auf die “unbekannte” Zahl auf dem leeren Feld; auf diese Weise wird ein neues (offenes) Zeichen geschaffen und in mathematischen Symbolen hingeschrieben. Zwar wird den Kindern die Schreibweise von Ergänzungsaufgaben aus anderen arithmetischen Kontexten schon bekannt gewesen sein, doch die genaue Beobachtung der interaktiven Herstellung der Aufgabe 15 + 15 + __ = 45 (jetzt mit drei Summanden) läßt bei Kim Überraschung und Ungewißheit vermuten, so daß man von einer tatsächlichen, interaktiven Neukonstruktion in dieser Situation sprechen kann.



13 + 15 + 17 = 45
15 + 15 + __ = 45

Aus epistemologischer Sicht kann man feststellen, daß Kim bei dem operativen Umgang mit der unbekannten Zahl auf dem leeren Feld in ihrer Argumentation essentiell neues Wissen konstruiert. Man kann nicht nur mit konkreten Zahlen rechnen, sondern auch das Schema des Streichalgorithmus auf beliebige Felder – *mit*, aber auch *ohne* Zahlen – übertragen. Kim stellt ihre Argumentation schon in gewisser “logischer” Abfolge dar. Zuerst wird die Zauberzahl aus drei möglichen Streichzahlen ermittelt (der Zweck ist hier noch nicht absehbar); dann wird der Algorithmus auf zwei Zahlen und das leere Feld angewendet, und dazu benötigt man letztlich die Kenntnis der Zauberzahl (hier wird die notwendige Berechnung der Zauberzahl einsichtig): Das neu konstruierte mathematische Wissen in der Argumentation von Kim läßt sich mit dem epistemologischen Dreieck zusammenfassend charakterisieren.



Die neue Beziehung (die unbekannte Zahl bzw. “Variable”) wird in zwei Weisen symbolisiert, einmal im Streichquadrat als “eingekreiste Zahl” zur Ermittlung der Zauberzahl, zum anderen in der Rechnung als “fehlender Summand” in einer Additionsaufgabe, bei der die zu ermittelnde Zauberzahl – das Ergebnis – schon bekannt ist. In diesem Darstellungskontext wird situationsbezogen mit einer “mathematischen Unbekannten” gearbeitet; diese unbekannte Zahl (die fehlende Zahl) wird in einer mathematischen Beziehung als neues Wissen konstruiert (als das neue mathematische Objekt) und in die strukturellen Beziehungen des Streichquadrats eingebunden.

4.2.2 Eva wiederholt die Begründung anhand der Zauberzahl

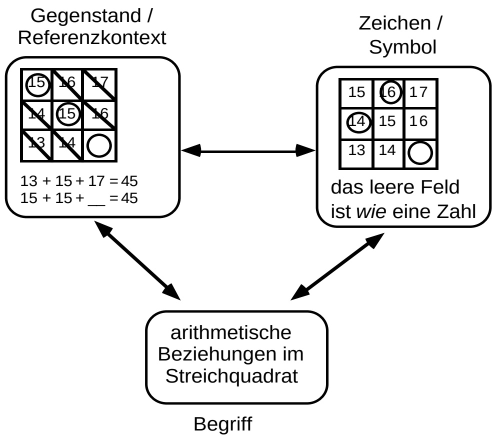
In der Besprechung der Strategie von Kim fordert die Lehrerin u.a. auch Eva auf zu erklären, wie der Trick funktioniert.

193	E	Also, öhm, man muß drei Zahlen nehmen aus dem Zauberquadrat. Die zusammenrechnen. Aber nicht das leere Feld, was soll man da viel rechnen, ne?
196	E	Ja. Und dann hat man die Zauberzahl raus. Dann muß man, öhm, das, öhm, öhm, nochmal drei Zahlen nehmen, aber da muß jetzt auch dieses leere Feld drin sein. Und dann muß man von der Zahl, die dann h… kommt, rauskommt von den beiden, muß man noch bis zur Fünfundvierzig.

Mit dem ersten Bezeichnenden (193) intendiert Eva die Berechnung der Zauberzahl aus drei beliebigen Zahlen aus dem Zauberquadrat. Zudem sagt sie: “Aber nicht das leere Feld, was soll man da viel rechnen, ne?”. Dieses Feld kann und soll nicht zur Berechnung der Zauberzahl benutzt werden.

Mit dem zweiten Bezeichnenden (196) soll das Schema des Streichalgorithmus auf drei andere Zahlen übertragen werden: “… nochmal drei Zahlen nehmen, aber da muß jetzt auch dieses leere Feld drin sein.” Das leere Feld wird mit einer Zahl gleichgesetzt; auf diese Weise kennzeichnet Eva eine mathematische Unbekannte in situationsspezifischer Form. Eva will zunächst die Berechnung der Zauberzahl auch auf diese drei Zahlen übertragen, bemerkt aber im Sprechen, daß die dritte “Zahl” fehlt, und ändert ihre Beschreibung: “Und dann muß man von der Zahl, die dann h… kommt, rauskommt von den beiden, muß man noch bis zur Fünfundvierzig.” So gibt sie die Berechnung der fehlenden Zahl an.

Aus epistemologischer Sicht wird in Evas Darstellung deutlich, daß sie in erster Linie ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung einer fehlenden Zahl im Streichquadrat (unter Benutzung der Zauberzahl) Schritt für Schritt beschreibt. (1) Streichalgorithmus auf drei (eingekreiste) Zahlen anwenden und die Zauberzahl bestimmen; (2) Streichalgorithmus auf zwei Zahlen und das leere Feld anwenden; (3) Aus der Zauberzahl und der Teilaufgabe der zweiten Additionsaufgabe die fehlende Zahl ermitteln. Eva wechselt zwischen allgemeinen Konzepten und exemplarischen Bezügen; z.B. drei beliebige Zahlen aus einem Zauberquadrat und die konkrete Zahl 45 als Kennzeichnung des allgemeinen Begriffs Zauberzahl. In ihrer Darstellung unterscheidet sie jedoch deutlich zwischen der Unmöglichkeit,



eine Summe mit dem leeren Feld als Summanden berechnen zu können (193), und der Möglichkeit, mit dem leeren Feld (eine “Vorform” der mathematischen Unbekannten) wie mit (bekannten) Zahlen rechnen zu können, wenn man das Ergebnis (die Zauberzahl) schon kennt (197). Dieser Aspekt der Deutung des leeren Feldes als “Zahl” in Evas Begründung des Tricks von Kim läßt sich so im epistemologischen Dreieck zusammenfassen. Die Konstruktion des neuen Wissens “mit unbekannter Zahl rechnen“ kommt eigentlich in der Aussage vor: „nochmal drei Zahlen nehmen, aber jetzt muß auch dieses leere Feld drin sein”; insgesamt geht es Eva in der Wiederholung des Arguments von Kim darum, möglichst allgemein – bei teilweisem Bezug auf konkrete Zahlen – das Verfahren zur Bestimmung der unbekannten Zahl darzustellen. Damit überwiegt in ihrer Darstellung der logisch, strukturelle Anteil gegenüber dem konstruktiven Teil der Neukonstruktion mathematischen Wissens.

5. Die Klassifikation von Begründungstypen

Im Zentrum dieser epistemologisch orientierten interpretativen Analyse stehen die Wechselwirkungen zwischen den kommunikativen und den epistemologischen Bedingungen mathematischer Kommunikationen und sozialer Wissenskonstruktionen. Die erste Dimension “Kommunikative Deutung des mathematischen Wissens” fokussiert auf die Spannung zwischen der (direkten) Vermittlung von Faktenwissen und der Konstruktion neuer Deutungen; die zweite Dimension “Epistemologische Charakterisierung des mathematischen Wissens” bezieht sich auf die Spannung zwischen der (empirischen) Situiertheit und der (relationalen) Allgemeinheit des neuen Wissens (vgl. das Klassifikationsraster, Fig. 6).

Kommunikation **Epistemologie**	Vermittlung vorgegebener Eigenschaften des Gegenstands der Kommunikation: Fakten, Regeln, logischer Zusammenhang	Balance zwischen *Fakten–Vermittlung* und *Deutungs–Konstruktion*	Konstruktion potentieller Deutungen des Gegenstands der Kommunikation: Beziehungen, Symbole, Begriffsaspekte
empirische, situierte Kennzeichnung mathematischen Wissens			
Balance zwischen *Situiertheit* und *Allgemeinheit*			
strukturelle, relationale Allgemeinheit mathematischen Wissens			

Fig. 6 Klassifikationsraster mathematischer Interaktionen

Bei der interaktiven Konstruktion neuen mathematischen Wissens steht die kommunikative Dimension in der Spannung zwischen den direkt mitteilbaren konkreten Eigenschaften des Gegenstands der Kommunikation in seiner logischen, deduktiven Darstellung von Fakten und Regeln sowie den zu konstruierenden neuen Deutungen des Kommunikationsgegenstandes als symbolischen, operativen Beziehungen und Begriffsaspekten. Die Konstruktion tatsächlich neuen *mathematischen* Wissens erfordert die Heraushebung und Benennung einer Beziehung als “dem” neuen mathematischen Gegenstand, der zunächst ontologisch zu deuten ist und dann auch in die logische Struktur des vorhandenen Wissens eingeordnet werden muß.

Die zweite Dimension bezieht sich auf die epistemologische Natur des mathematischen Wissens. Hier steht die Spannung zwischen einer anfänglich empirischen Deutung elementarer mathematischer Begriffe und einem Verständnis, daß mathematische Begriffe Beziehungen und Strukturen in symbolisierter und operativer Weise verkörpern, im Mittelpunkt. Wenn ein (auch schon relativ begrenzter) Konstruktionsschritt neuen Wissens vollzogen werden soll, dann ist eine mathematische Verallgemeinerung im Spiel. Ansonsten werden auf der logischen Wissensebene ausschließlich dort vorfindbare “quasi empirische” Fakten konstatiert. (Kinder geben verifizierende “Begründungen” der Art, daß “die Rechnung oder das Ergebnis stimmt”.) Um über die Feststellung von vorfindbaren Fakten hinausgehen zu können, müssen sinnvolle, neue Beziehungen konstruiert werden.

Für eine Klassifikation verschiedener Typen interaktiver Konstruktionsprozesse sind die “vorausgreifenden” Beschreibungen des neuen Wissens (von Schülern, Schülerinnen und Lehrerin) zentrale Hinweise. Im Spannungsfeld der beiden Dimensionen des Austauschs von vorgegebenen Fakten gegenüber der Deutungs–Konstruktion (*kommunikative* Dimension) sowie der empirischen Situiertheit gegenüber der intendierten Allgemeinheit des neuen Wissens (*epistemologische* Dimension) sollen aus den hier betrachteten Epsioden beispielhaft verschiedene, von Schülerinnen, Schülern und Lehrerin interaktiv erzeugte, spezifische Formen der Beschreibung und der Deutung des neuen Wissens identifiziert werden. Diese “Schlüsselworte” zur Beschreibung des neuen, zu konstruierenden Wissens werden benutzt um die jeweiligen kommunikativen Konstruktionen und Wissensbegründungen an den entsprechenden Stellen im Klassifikationsmodell einzuordnen.

5.1 Die Konstruktion des dritten Musters unter empirischem Kontextbezug

Dennis interpretiert das Problem der Herstellung des dritten Plättchenmusters sehr stark situativ. Er nimmt die Eigenschaften des dritten Musters wahr und erklärt dann, wie zu dem zweiten Muster rote und blaue Plättchen hinzugelegt werden müssen, um so aus dem zweiten durch zusätzliche Plättchen das dritte Muster zu konstruieren.

Die von Dennis gegebene Beschreibung enthält konkrete, die Situation kennzeichnende Schlüsselworte.

Dennis: “… man muß <u>das einfach nur doppelt machen</u>.”

Dennis: “… da müssen <u>hier einfach noch Plättchen und hier</u>”

Dennis: “… und <u>hier kommen jetzt noch einer hin</u>…”

Dennis arbeitet in einem konkreten Kontext ohne den Bezug zu allgemeineren Strukturen. Auch die anschließende Erläuterung der Lehrerin, mit der sie das Fortsetzungsprinzip verdeutlichen will, beschränkt sich auf den Beispielfall des Überganges vom zweiten zum dritten Muster, und in dieser Beispielkonstellation bleiben verallgemeinerbare Aspekte verdeckt und implizit. Vielleicht steckt eine potentielle Verallgemeinerung in den Äußerungen: "Und darum sind die auch jetzt rot." (159) und: "So, und was sind diese hier außen? Die Blauen, was sollen die? [*zeigt auf den Winkel, den die blauen Plättchen der dritten Rechteckszahl bilden, …*]" (159), mit denen tendenziell angesprochen werden soll, daß das aktuelle Rechteck zum "roten" Teil des nächsten Rechtecks wird und ein "blauer" Winkel zusätzlich angefügt wird. Es bleibt in der anschließenden Interaktion offen, ob die Verallgemeinerbarkeit dieser Aussagen aufgenommen wird oder die Aussagen auf die konkrete Situation begrenzt bleiben.

Kommunikation / **Epistemologie**	Vermittlung von Fakten	Balance zwischen *Fakten–Vermittlung* und *Deutungs–Konstruktion*	Konstruktion neuer Deutungen
empirische Situiertheit	●		
Balance zwischen *Situiertheit* und *Allgemeinheit*			
relationale Allgemeinheit			

Die Lehrerin beschreibt das Fortsetzungsprinzip im Kern so: Alle vorhanden Plättchen des (zweiten) Musters auf die rote Seite nach oben legen (so verändern, daß ein Teilmuster der nächsten Figur entsteht) und dann mit blauen Plättchen einen Winkel anlegen, so daß das nächste Muster erscheint. Diese allgemeine Beziehung hat die Lehrerin im Auge, und sie nimmt DennisErklärung zum Anlaß, um das Vorgehen in ihrer Begründung noch einmal darzustellen (Transkript, 159 – 161). Im Raster läßt sich die Konstruktion des neuen Wissens folgendermaßen klassifizieren: Die von Dennis gegebene Begründung der Konstruktion des neuen Wissens (die Herstellung des dritten Rechteckmusters aus dem zweiten) bleibt im konkreten, situativen Kontext verhaftet und beschreibt eine schrittweise Vorgehensweise ("logischer" Zusammenhang) ohne erkennbare Tendenzen der Verallgemeinerbarkeit auf mögliche Fortsetzungen (bei den folgenden Mustern). Diese Verallgemeinerbarkeit scheint von der Lehrerin in Aspekten intendiert zu sein und auch bei der von ihr gegebenen Erklärung möglich, in der Interaktion wird diese jedoch nicht deutlich genug expliziert (bzw. von den Schülerinnen und Schülern aufgegriffen).

5.2 Die Konstruktion der fehlenden Zahl unter relationalem Kontextbezug

Kims erste Beschreibungen (in 60 und in 147) enthalten in kondensierter Form das allgemeine Argument und die neue Wissensbeziehung; in der sich anschließenden Interaktion wird diese Beschreibung detailliert und konkretisiert, ohne den allgemeinen Charakter in Frage zu stellen. Kim wendet das Verfahren des Einkreisens von drei Zahlen zur Berechnung der Zauberzahl auch auf das leere Feld an. Die Addition von drei eingekreisten Zahlen wird auf eine "allgemeine" Addition erweitert, bei der auch "unbekannte" Zahlen addiert werden können (was in einer rein arithmetischen Situation nicht möglich ist).

Kim: “Und dann kreist man das ein hier, hier. [*kreist das leere Feld ein*] Und dann muß man hier ausrechnen, fünfzehn und fünfzehn sind ja dreißig, wieviel noch fehlt zur Fünfundvierzig.”

Eva gibt später eine weitere Beschreibung für die gegensätzliche Deutung von “unbekannten Zahlen”:

Eva: “Die zusammenrechnen. Aber nicht das leere Feld, was soll man da viel rechnen, ne? Dann muß man, öhm, das, öhm, öhm, nochmal drei Zahlen nehmen, aber da muß jetzt auch dieses leere Feld drin sein.”

Kim hat eine neue, allgemeine Wissensbeziehung konstruiert. Sie rechnet die Zauberzahl auf zwei Weisen aus: Einmal addiert sie drei konkrete, eingekreiste Zahlen, zum anderen addiert sie zwei konkrete, eingekreiste Zahlen und das leere Feld, das sie auch eingekreist hat – also als möglichen Summanden für die Zauberzahl markiert hat. Diese neue Beziehung macht eine Reversibilität in der mathematischen Struktur sichtbar: “Mit drei eingekreisten Zahlen kann man die Zauberzahl bestimmen” wird umgekehrt zu: “Mit der Zauberzahl und zwei eingekreisten Zahlen kann man die dritte eingekreiste Zahl ermitteln”. Kim und Eva führen also neue mathematische Beziehungen und Verallgemeinerungen in ihre Wissenskonstruktion ein; zudem erweitern sie die begrifflichen, mathematischen Aspekte des Gegenstandes “Streichquadrat”.

Kommunikation / **Epistemologie**	Vermittlung von Fakten	Balance zwischen *Fakten–Vermittlung* und *Deutungs–Konstruktion*	Konstruktion neuer Deutungen
empirische Situiertheit			
Balance zwischen *Situiertheit* und *Allgemeinheit*			
relationale Allgemeinheit			

6. Die Besonderheit der Kontextabhängigkeit mathematischen Wissens

Die im Klassifikationsschema enthaltene Problematik wird in der Literatur als der Gegensatz von *Situiertheit* zu *Allgemeingültigkeit* des mathematischen Wissens diskutiert. Gemäß unserer Forschungskonzeption wird damit nicht die grundsätzliche Kontextabhängigkeit mathematischen Wissens in Frage gestellt. Der heikle Punkt in diesem Verhältnis ist die *Art* der Kontextabhängigkeit: Ist die epistemologische Deutung des mathematischen Wissens an die *fertigen*, empirischen Eigenschaften der Situation direkt gebunden bzw. wird sie aus den konkreten Eigenschaften hergeleitet oder dient die Situation mit ihrer Struktur als ein *offener* Referenzkontext, der erst gedeutet werden muß und jeweils neue Deutungen zuläßt? Diese Sichtweise versteht die Situiertheit des mathematischen Wissens als eine Beziehung zwischen Zeichen /Symbolen und Referenzkontext, bei der der vorfindbare Kontext das Wissen nicht direkt erklärt, sondern der situierte Kontext umgedeutet und als eine Verkörperung von strukturellen Zusammenhängen benutzt werden kann, die es erlauben, neues mathematisches Wissen zu konstruieren.

Die von Dennis und seiner Lehrerin gegebene Konstruktion mitsamt der Begründung wird offenbar ausgehend von den empirischen Eigenschaften der dargestellten Plättchenmuster entwickelt; auf diese Weise ergibt sich eine empirische Bindung an den Kontext. Von anderer Art ist die Beziehung der Konstruktion und Begründung neuen Wissens zum Kontext in der zweiten Beispielepisode; so wird z.B. die Interpretation des leeren Feldes als einer “allgemeinen” Zahl nicht aus den empirischen, arithmetischen Eigenschaften des Streichquadrats abgeleitet, sondern diese Deutung wird von Kim (und dann von Eva) in die arithmetische Struktur hineingelesen.

Eine zentrale Problematik der Konstruktion und Begründung neuen mathematischen Wissens besteht darin, daß weder die (konkreten, situierten und strukturellen) Referenzkontexte noch die Zeichen- und Symbolsysteme den mathematischen Begriff unmittelbar enthalten. Zeichen und Referenzkontexte bilden insofern eine mögliche Grundlage zur Konstruktion, als daß mit ihrer Hilfe auf strukturelle Zusammenhänge und Beziehungen hingewiesen werden kann, bzw. daß durch Zeichen und Referenzkontexte strukturelle Zusammenhänge modelliert werden können, die als Verkörperungen von Begriffsbeziehungen interpretierbar sind. Dies bedeutet, daß mathematische Zeichen und Referenzkontexte nicht direkt und unvermittelt das neu konstruierte Wissen wiedergeben, sondern als unabdingbare, ikonische Träger des Wissens im Sinne von Hinweisen auf andere strukturelle Beziehungen des Begriffs Verwendung finden. Schülerinnen und Schüler stehen also im Mathematikunterricht vor dem besonderen Deutungsproblem, sich bei mathematischen Zeichen und zugehörigen Referenzkontexten immer von der Konkretheit der Situation zum Teil zu distanzieren und darin etwas “anderes”, eine andere Struktur zu sehen, zu deuten oder zu erkennen. Diese Problematik wird in der didaktischen Literatur unter der Leitidee diskutiert: “Im Besonderen das Allgemeine erkennen” (vgl. Cobb 1986; Mason & Pimm 1984).

Literatur

Baraldi, C., Corsi, G., & Esposito, E. (1997). GLU. Glossar zu Niklas Luhmanns Theorie sozialer Systeme. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Cobb, P. (1986). Concrete can be abstract: A case study. Educational Studies in Mathematics, 17, 37-48.

Hefendehl-Hebeker, L. (1999). Erleben, wie arithmetisches Wissen entsteht. In: Selter, C. & Walther, G. (Eds.). Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann, (S. 105 - 111). Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

Jahnke, H. N. (1978). Zum Verhältnis von Entwicklung und Wissensbegründung in der Mathematik – Beweisen als didaktisches Problem. Materialien und Studien des IDM, Bielefeld, Band 10, Bielefeld: Universität Bielefeld.

Jahnke, H. N. (1984). Anschauung und Begründung in der Schulmathematik. Beiträge zum Mathematikunterricht, 32 - 41.

Krummheuer, G. (1998). Formats of Argumentation in the Mathematics Classroom. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), Language and Communication in the Mathematics Classroom, (S. 223 – 234). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Luhmann, N. (1996). Takt und Zensur im Erziehungssystem. In N. Luhmann & K.-E. Schorr (Eds.), Zwischen System und Umwelt. Fragen an die Pädagogik., (S. 279 - 294). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Luhmann, N. (1997). Die Gesellschaft der Gesellschaft. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Maier, H., & Steinbring, H. (1998). Begriffsbildung im alltäglichen Mathematikunterricht – Darstellung und Vergleich zweier Theorieansätze zur Analyse von Verstehensprozessen. Journal für Mathematik-Didaktik, 19(4), 292-329.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. Educational Studies in Mathematics, 15, 277 - 289.

Steinbring, H. (1989). Routine and Meaning in the Mathematics Classroom. For the Learning of Mathematics, 9(1), 24-33.

Steinbring, H. (1991). Mathematics in teaching processes - The disparity between teacher and student knowledge. Recherches en Didactique des Mathématiques, 11(1), 65 – 107.

Steinbring, H. (1993). Die Konstruktion mathematischen Wissens im Unterricht – Eine epistemologische Methode der Interaktionsanalyse. Journal für Mathematik-Didaktik, 14(2), 113 - 145.

Steinbring, H. (1998). Elements of Epistemological Knowledge for Mathematics Teachers. Journal of Mathematics Teacher Education, 1(2), 157-189.

Steinbring, H. (1999). Reconstructing the Mathematical in Social Discourse – Aspects of an Epistemology–based Interaction Research, in: Zaslavsky, Orit (Ed.). Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. I, (S. 40 - 55). Haifa: Technion – Israel Institute of Technology.

Steinbring, H. (unter Mitarbeit von Kratzin, C. & Scherer, P.) (1998). Epistemologische und sozial-interaktive Bedingungen der Konstruktion mathematischer Wissensstrukturen (im Unterricht der Grundschule). (Zwischenbericht zu einem DFG–Projekt). Dortmund: Universität Dortmund.

Voigt, J. (1994). Entwicklung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. In H. Maier & J. Voigt (Eds.), Verstehen und Verständigung im Mathematikunterricht - Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung, (S. 77- 111). Köln: Aulis.

Wittmann, E. C. (1995). Legen und Überlegen. Wendeplättchen im aktiv-entdeckenden Rechenunterricht. Grundschulzeitschrift (72), 44 - 46.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Ed.), Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis, Festschrift für Heinrich Winter, (S. 237-257). Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (1990/92). Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd.1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Bd.2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart: Klett.

Anmerkung*) Diese Arbeit entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Forschungsprojekts, Kennziffer: STE 491/5-1 & STE 491/5-2

Anschrift: Prof. Dr. Heinz Steinbring
Universität Dortmund / FB Mathematik
Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts (IEEM)
Vogelpothsweg 87
D–44221 Dortmund
e mail: heinz.steinbring@math.uni-dortmund.de