Heinz Steinbring (2004), Zählen als selbstähnlicher Prozess – Ideen zu einer arithmetischen Lernumgebung für Lehramtsstudierende.
In: Krauthausen, G. & Scherer, P. (Hrsg.) *Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik – Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut Spiegel*, Donauwörth: Auer Verlag, S. 135 – 143.

Heinz Steinbring/Dortmund

Zählen als selbstähnlicher Prozess – Ideen zu einer arithmetischen Lernumgebung für Lehramtsstudierende

Die Entwicklung arithmetischer Begriffsaspekte ist für die fachliche Ausbildung der Lehramtsstudierenden ein zentrales Anliegen. Dazu reicht es nicht aus, die elementare Zahlentheorie mit ihren Definitionen, Sätzen und Beweisen Schritt für Schritt strukturiert und hierarchisch aufzubauen. Für ein inhaltliches Verstehen sind Rückbezüge, Verknüpfungen und Durchdringungen der sich herausbildenden arithmetischen Begriffsideen wesentlich. Ein solches Vorgehen soll exemplarisch verdeutlicht werden. Zählen ist zunächst ein einfacher, linearer Prozess des ›Immer eins weiter‹. Die elementaren Konzepte des ›Stellenwertsystems‹, ›Änderung der Basis‹, ›Umrechnung in Stellenwertsysteme mit anderer Basis‹ und die Verallgemeinerung der Basis auf negative Zahlen, z.B. das sog. ›negative Binärsystem‹ (Knuth) ermöglichen es dann, Zählen als einen selbstähnlichen Prozess zu verstehen, wobei dieser Prozess an gewissen Entwicklungspunkten den bisher schon durchlaufenen Zählprozess iteriert, usw.

Einleitung: Verallgemeinern durch Verfremden

Die Verfremdung und eine dadurch beabsichtigte Verallgemeinerung mathematischer Begriffsideen kann als ein didaktisches Prinzip verstanden werden, durch das Studierende zu einer tieferen Durchdringung und Erkundung mathematischer Strukturen und Beziehungen angeregt werden sollen (vgl. z.B. Gellert 2000). In der elementaren Arithmetik ist es eine Tradition, dass ein vielschichtiges Verständnis der mathematischen Beziehungen des unreflektiert benutzten Dezimalsystems dadurch befördert werden soll, dass es mit Stellenwertsystemen zu anderen Basiszahlen konfrontiert und mit ihnen verglichen wird. Die Verfremdung des Vertrauten durch Veränderung und Verallgemeinerung soll neue und bisher verdeckte Strukturen ans Licht bringen. Zu beachten ist z.B. bei der Behandlung anderer Stellensysteme jedoch, dass bei allen notwendigen arithmetischen Aktivitäten mit dem neuen mathematischen Wissen diese nicht zu bloßen algorithmischen Umwandlungen und zum schematischen Rechnen in anderen Stellenwertsystemen degenerieren, sondern dass die Funktion des Vergleichens und Verallgemeinerns zum Tragen kommt.

Dass es Zahldarstellungen in anderen Stellenwertsystemen gibt, ist den meisten Studierenden und auch sonst vielen nicht mathematisch interessierten Menschen bekannt, wenn auch häufig nur oberflächlich und diffus – insbesondere ist hier als Beispiel das Dual- oder Binärsystem (und zum Teil auch das 16er-System) im Rahmen der Entwicklungen der Computertechnik zu nennen. Verfremdungen zum Dezimalsystem treten z.B. bei Benutzung dieser anderen Stellensysteme in der Übertragung von Regeln – etwa Teilbarkeitsregeln – auf: Welche Regeln gelten ›allgemein‹ und welche nicht?

Für jeden Studierenden ist es aber eine große Überraschung und eine komplette Verfremdung zu hören, dass es Stellenwertsysteme mit einer *negativen* Basiszahl gibt. Und auch in der Mathematik sind solche Stellenwertsysteme erst seit ca. 50 Jahren bekannt (siehe Knuth 1969, S. 171).

Wenn man das Beispiel des negativen Binärsystems betrachtet, dann werden zunächst anstelle der Potenzen von 2 in den jeweiligen Stellen die Potenzen von (– 2) eingetragen; jetzt können durch die Ziffern 0 und 1 Zahlen dargestellt werden, und zwar sowohl natürliche, wie auch negative Zahlen:

$(-2)^4$ = 16	$(-2)^3$ = –8	$(-2)^2$ = 4	$(-2)^1$ = –2	$(-2)^0$ = 1	Zahl im Dezimalsystem
		0	0	1	1
		1	1	0	2
		1	1	1	3
		1	0	0	4
		1	0	1	5
		0	1	1	– 1
		0	1	0	– 2
	1	1	0	1	– 3
	1	1	0	0	– 4
	1	1	1	1	– 5

Tab. 1: Das negative Binärsystem

Dieses sogenannte negative Binärsystem gibt zu vielen mathematischen Entdeckungen Anlass. Eine Eigenschaft besteht offenbar darin, dass man ohne die Benutzung von Vorzeichen negative Zahlen darstellen kann. Aus der Stellentafel entnehmen wir, dass gilt: $(-3) = (1101)_{(-2)}$.

In dieser Zahldarstellung lässt sich z.B. plausibel machen, dass das Produkt zweier negativer Zahlen selbst positiv ist (vgl. hierzu den negativ-binären Abakus nach Gardner 1974; siehe auch Steinbring 1994).

Systematisieren durch Musterentwicklung

Wir wollen hier der elementaren Frage nachgehen, ob auf diese Weise wirklich *alle* ganzen Zahlen im negativen Binärsystem dargestellt werden. Dazu erzeugen wir die durch die Ziffern 0 und 1 geschriebenen Zahlen zur Basis (– 2) schematisch nach dem Kilometerzählerverfahren (wie bei den Dualzahlen). In die erste Spalte neben der Stellentafel wird die Zahl im Zehnersystem notiert, daneben wird die Nummer der Zahl in ihrer ›Abzählreihe‹ (bei Null beginnend) notiert (siehe Tab. 2).

Im negativen Binärsystem durchlaufen wir systematisch alle Kombinationen von 0 und 1; im Dezimalsystem ist zunächst jedoch keine Systematik zu erkennen, aus der man direkt auf die Vollständigkeit aller negativen Zahlen schließen könnte. So kann man Sprünge auf andere Zahlen – etwa von (– 5) auf 16 – und auch Einerschritte in Gruppen

– 4, 5 oder (– 10), (– 9) – erkennen. Aber es fehlen auch noch Zahlen, die hoffentlich später auftauchen werden (siehe Tab. 2).

16	-8	4	-2	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0

Zahl im Dezimal-system	Nummer der Zahl
0	0
1	1
– 2	2
– 1	3
4	4
5	5
2	6
3	7
– 8	8
– 7	9
– 10	10
– 9	11
– 4	12
– 3	13
– 6	14
– 5	15
16	16

Tab. 2: Die Abfolge der Zahlen im negativen Binärsystem

In arithmetischen Tabellen lässt sich anhand der notierten Zahlen häufig nur mühsam ein Muster erkennen. Eine grafische Veranschaulichung der arithmetischen Beziehungen kann hier eine Unterstützung liefern. Wenn die Zahlen im Dezimalsystem: 0, 1, – 2, – 1, 4, 5, 2, 3, – 8, …… der Reihe nach einfach auf dem Zahlenstrahl eingezeichnet werden, dann bleibt die Abfolge der Schritte und Sprünge unsichtbar. Daher soll die geometrische Darstellung ›entzerrt‹ werden: Es wird die ›obere Halbebene‹ benutzt, die ›Zahl im Dezimalsystem‹ wird als x–Wert notiert, und die ›Nummer der Zahl‹ als y–Wert. In den folgenden Darstellungen sind die ersten 64 Zahlen (Abb. 1) bzw. die ersten 1024 Zahlen (Abb. 2) des negativen Binärsystems grafisch dargestellt.

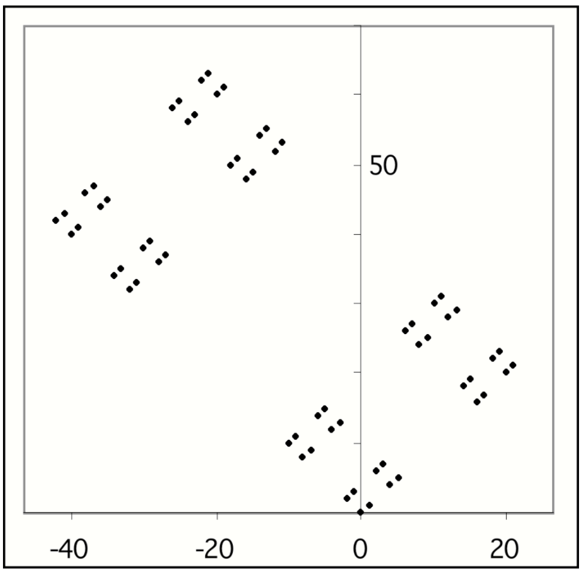

Abb. 1: Die ersten 64 Zahlen

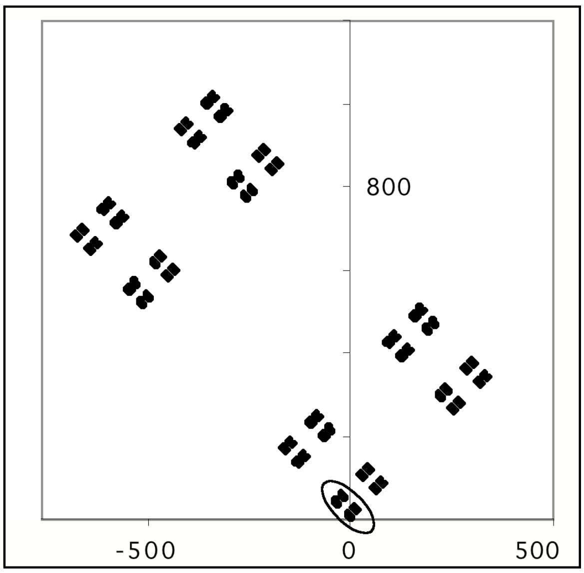

Abb. 2: Die ersten 1024 Zahlen

Die grafische Repräsentation der arithmetischen Symbole bringt ein zunächst nicht sichtbares Muster ans Licht. Überraschend mag es sein, dass die beiden Muster in Abb. 1 und Abb. 2 ›gleich‹ aussehen. Bei genauerem Hinschauen wird man feststellen, dass die grafische Darstellung aus Abb. 1 gerade dem oval umrandeten Ausschnitt der grafischen Darstellung in Abb. 2 entspricht. Und daraus lässt sich anschaulich ein systematisches Fortsetzungsprinzip erkennen: Die Darstellung der ersten 64 Zahlen (im oval umrandeten Ausschnitt) wird in passender Weise versetzt nach ›rechts oben‹ zur y–Achse neu aufgetragen; dann wird das neue, gesamte Muster entsprechend nach ›links oben versetzt‹ zur y–Achse passend angeschlossen, und dann wieder nach ›rechts oben‹, dann nach ›links oben‹ usw. usf.. Versetzt zur y–Achse werden die bis dahin erzeugten Muster sozusagen verdoppelt und angebaut. Es handelt sich hierbei um ein ›selbstähnliches Muster‹: Die Musterform im Kleinen reproduziert sich fortlaufend im Großen.

Dieses anschauliche Fortsetzungsprinzip bedeutet, dass die 2^n Zahlen (von der 0.) bis zur 3. bzw. 7., 15., … , (2^n – 1). Zahl gerade ein vollständiges ›Zahlensegment‹ abdecken, dass dann ›verdoppelt‹ (mal links, mal rechts) wieder angebaut wird. Damit ist ein plausibles ›Induktionsargument‹ dafür gegeben, dass bei Fortsetzung nach dem hier dargestellten Vorgehen alle ganzen Zahlen im negativen Binärsystem auch vorkommen.

Systematisieren durch Vergleich von Mustern

Wenn man Zahlen in einem negativen Binärsystem repräsentieren kann, dann auch in einem Stellenwertsystem zur Basis (– 3). Im Folgenden sind sofort die entsprechenden grafischen Muster für die ersten 81 (Abb. 3) bzw. 729 Zahlen (Abb. 4) entsprechend dem obigen Vorgehen dargestellt.

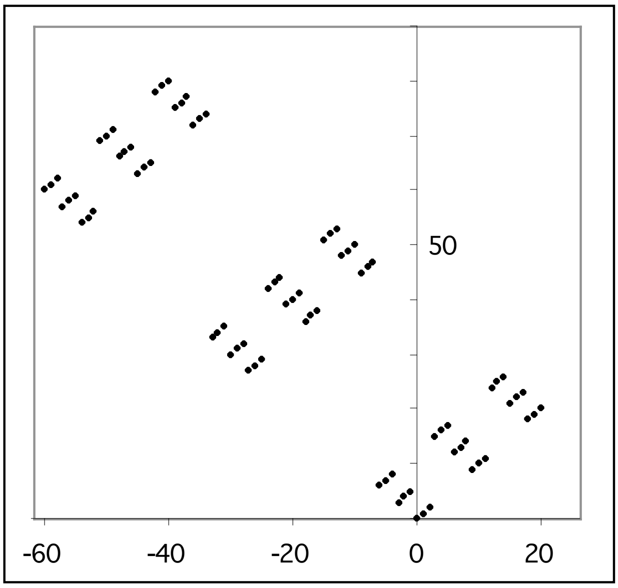

Abb. 3: Die ersten 81 Zahlen

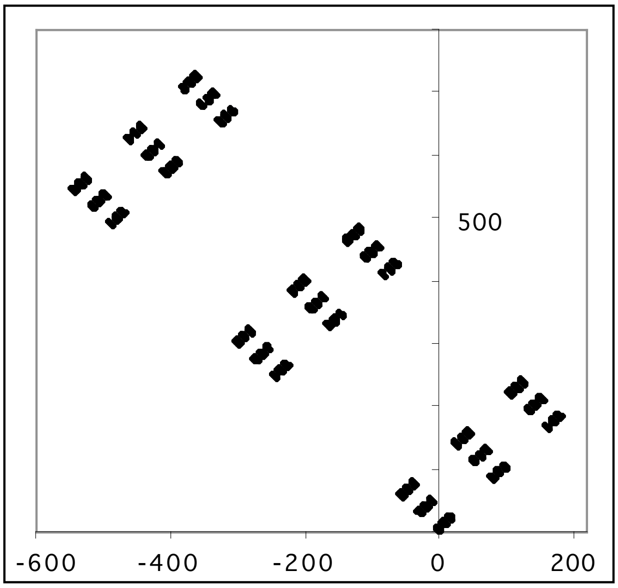

Abb. 4: Die ersten 729 Zahlen

Wieder lassen die grafischen Darstellungen Muster sichtbar werden, die in einer arithmetischen Tabelle versteckt bleiben. Auch lässt sich das Prinzip der Selbstähnlichkeit wieder beobachten: Auch wenn auf den ersten Blick diese beiden Muster als ›gleich‹ erscheinen, so steckt das Muster der ersten 81 Zahlen (Abb. 3) als ein ›Anfang‹ im Muster der ersten 729 Zahlen (unten links in Abb. 4). Auch ist hier ein plausibles, anschauliches Fortsetzungsprinzip erkennbar, das garantiert, dass alle ganzen Zahlen sich auf diese Weise im Stellenwertsystem zur Basis (– 3) schreiben lassen. Im Vergleich mit dem negativen Binärsystem wird deutlich, dass nun die schon vorhandenen Muster in der Fortsetzung jeweils zweimal kopiert und dann passend (immer links bzw. rechts von der y–Achse) angebaut werden.

Neue Zusammenhänge durch Verallgemeinerung von Verfahren erklären

Der Nachweis, dass z.B. im Dualsystem alle natürlichen Zahlen mit den beiden Ziffern 0 und 1 repräsentiert werden, lässt sich durch die Angabe eines Umwandlungsverfahrens vom Dezimalsystem ins Dualsystem führen. Man wählt eine beliebige Dezimalzahl, z.B. 17, und wandelt diese mit dem Verfahren in eine Dualzahl um; wenn diese Dualzahl entsprechend den Regeln und Definitionen des binären Stellenwertsystems wieder die Zahl 17 ergibt, dann ist der Nachweis erbracht. Die Allgemeingültigkeit des Umwandlungsverfahrens erschließt sich letztlich schon aus der Anwendung auf Beispielfälle.

In der elementaren Arithmetik wird das folgende Umwandlungsverfahren benutzt:

$$\begin{aligned} 17 &= 8 \cdot 2 + 1 \\ 8 &= 4 \cdot 2 + 0 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\ 1 &= 0 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 1)_{(2)}$$

Für die Beispielzahl 17 werden fortlaufend die Vielfachen von 2 mit den Resten 1 oder 0 bestimmt. Die Reste ergeben dann die Dualzahl $(10001)_{(2)}$. Dies kann man durch geschicktes ›Ausrechnen‹ überprüfen, indem man bei dem obigen Umwandlungsverfahren von unten beginnend einsetzt (die innerste Klammer entspricht der zweitletzten Zeile im Verfahren):

$$\begin{aligned} 17 \quad &= [[[[1 \cdot 2 + 0] \cdot 2 + 0] \cdot 2 + 0] \cdot 2 + 1] \\ &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= (10001)_{(2)} \end{aligned}$$

Damit ist an der Beispielzahl 17 im Prinzip gezeigt, dass sich in der binären Darstellung mit den Ziffern 0 und 1 alle natürlichen Zahlen darstellen lassen. Denn die Umwandlung der dezimalen 17 mit diesem Verfahren ins Binärsystem ergibt gerade die Dualzahl, die nach den Regeln des Positionssystems sich zu 17 berechnen lässt.

Dieses bekannte, elementare Umwandlungsverfahren von Zahlen im Dezimalsystem ins Dualsystem soll nun zu einem Verfahren der Umwandlung von ganzen Zahlen im Dezimalsystem ins negative Binärsystem verallgemeinert werden. Entsprechend werden nun die auftretenden Reste 0 und 1 untersucht, die bei den fortlaufenden Vielfachen von (– 2) zu einer gegebenen ganzen Zahl auftreten. Das Umwandlungsverfahren wird an der Beispielzahl (– 17) gezeigt.

$$\begin{array}{rl}
(-17) = & (+9)\cdot(-2)+1 \\
(+9) = & (-4)\cdot(-2)+1 \\
(-4) = & (+2)\cdot(-2)+0 \\
(+2) = & (-1)\cdot(-2)+0 \\
(-1) = & (+1)\cdot(-2)+1 \\
(+1) = & \quad 0\cdot(-2)+1
\end{array}$$

$$(1\;1\;0\;0\;1\;1)_{(-2)}$$

Auch jetzt überprüfen wir durch geschicktes Nachrechnen und Einsetzen die Darstellung der Zahl (– 17) im negativen Binärsystem, und ob die hier mit dem Umwandlungsverfahren erzeugte Darstellung im (– 2) – System tatsächlich die Zahl (– 17) ist.

$$\begin{aligned}
(-17) \quad &= \big[\big[\big[[[1\cdot(-2)+1]\cdot(-2)+0]\cdot(-2)+0\big]\cdot(-2)+1\big]\cdot(-2)+1\big] \\
&= 1\cdot(-2)^5+1\cdot(-2)^4+0\cdot(-2)^3+0\cdot(-2)^2+1\cdot(-2)^1+1\cdot(-2)^0 \\
&= (110011)_{(-2)}
\end{aligned}$$

Die Überprüfung führt zum gewünschten Ergebnis. Die allgemeinere Anforderung bei der Anwendung des Umwandlungsverfahrens besteht darin, genau die Reste 0 und 1 bei der fortlaufenden Ermittlung der Vielfachen von (– 2) zu erhalten. Ansonsten verläuft das Verfahren in gleicher Weise, und es lässt sich auch auf das negative Dreier–System übertragen.

Aufgabe für den Jubilar: Man wandle die Zahlen 60 und (– 60) ins negative Dreier–System um und überprüfe diese Umwandlung durch Addition der beiden Zahlen im negativen Dreier–System!

Durch produktive Aufgaben Muster erkunden

Im Dualsystem (zur Basis 2) und im negativen Dualsystem (zur Basis – 2) werden die Ziffern 0 und 1 zur Darstellung der Zahlen benutzt. Die Ziffernfolge einer Zahl nennt man auch das Zahlwort. In dem Beispiel $11 = (1011)_{(2)}$ ist das Zahlwort die Ziffernfolge 1011 und 11 der dezimale Zahlwert dieser im Zweiersystem dargestellten Zahl.

Aufgabe 1) Für welche Zahlworte (mit den Ziffern 0 und 1) gilt, dass dieses Zahlwort einmal im Dualsystem und dann im negativen Dualsystem den gleichen dezimalen Zahlwert ergibt? $[(\text{ZAHLWORT})_{(2)} = (\text{ZAHLWORT})_{(-2)}]$. Charakterisieren Sie die Muster der Ziffern in den gesuchten Zahlworten! Wo lassen sich diese Zahlen in den grafischen Darstellungen (Abb. 1 und Abb. 2) finden?

Aufgabe 2) Für welche Zahlworte (mit den Ziffern 0 und 1) gilt, dass die Summe der beiden Zahlwerte, die dieses Zahlwort einmal im Dualsystem und einmal im negativen Dualsystem ergibt, Null ist? [$(\text{ZAHLWORT})_{(2)} + (\text{ZAHLWORT})_{(-2)} = 0$]. Charakterisieren Sie die Muster der Ziffern in den gesuchten Zahlworten! Wo lassen sich diese Zahlen in den grafischen Darstellungen (Abb. 1 und Abb. 2) finden?

Aufgabe 3) Untersuchen Sie mit analogen Fragestellungen diese arithmetischen Eigenschaften auch im Dreier- und negativen Dreiersystem!

Aufgabe 4) Im Vergleich zwischen Dualsystem und negativem Dualsystem kann man an einigen Zahlen folgende Beziehung beobachten:

$$(110)_{(2)} = 6 = 3 \cdot 2 = 3 \cdot (110)_{(-2)} \text{ und}$$
$$(11000)_{(2)} = 24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot (110000)_{(-2)}$$

[Allgemein: $(\text{ZAHLWORT})_{(2)} = 3 \cdot (\text{ZAHLWORT})_{(-2)}$]. Lassen sich noch mehr Zahlen mit dieser Eigenschaft finden? Können Sie allgemein alle Zahlen mit dieser Eigenschaft charakterisieren?

Aufgabe 5) Im Vergleich zwischen Dreiersystem und negativem Dreiersystem kann man an einigen Zahlen folgende Beziehung beobachten:

$$(110)_{(3)} = 12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot (110)_{(-3)} \text{ und}$$
$$(2200)_{(3)} = 24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot (2200)_{(-3)}$$

[Allgemein: $(\text{ZAHLWORT})_{(3)} = 2 \cdot (\text{ZAHLWORT})_{(-3)}$]. Lassen sich noch mehr Zahlen mit dieser Eigenschaft finden? Können Sie allgemein alle Zahlen mit dieser Eigenschaft charakterisieren?

Zusammenfassender Rückblick: Zählen als ein selbstähnlicher, iterierter Prozess

Einem ersten Verständnis des Zählens der natürlichen Zahlen unterliegt die Vorstellung des schrittweisen ›um Eins Weitergehens‹. Die Einheit wird immer wieder angefügt, um zur nächsthöheren Zahl zu gelangen. Eine solche Sichtweise auf den Zählprozess kann man als ein lineares, schrittweises Vorgehen beschreiben und als einen linearen Verlauf in einem Diagramm darstellen (siehe Abb. 5).

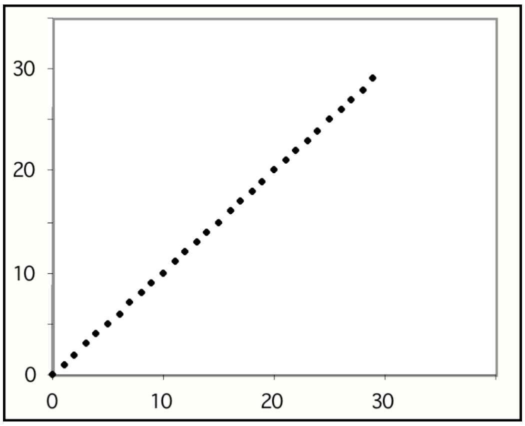

Abb. 5: Zählen Schritt für Schritt

Ähnlich wie in den vorigen Abbildungen ist für die bekannten natürlichen Zahlen im Dezimalsystem zu jeder Nummer der Zahl (von 0 bis n) auf der x–Achse die zugehörige natürliche Zahl auf der y–Achse markiert. Dies macht den linearen Verlauf der Abfolge der Zahlen sichtbar.

Gegenüber einer Deutung des Zählens als einem linearen, schrittweisen Prozess (Abb. 5) führt der Weg über die Stellenwerte und auch über die Stellenwerte mit einer negativen Zahl als Basis zu einer veränderten Sicht auf die Art des Zählprozesses. Als vergleichbares Beispiel zum Zählprozess der natürlichen Zahlen (Abb. 5) ist in den Abbildungen 6 und 7 dargestellt, wie sich grafisch die Zahlenabfolge der natürlichen Zahlen darstellt, wenn man die Basis (– 10) anstelle der Basis 10 benutzt.

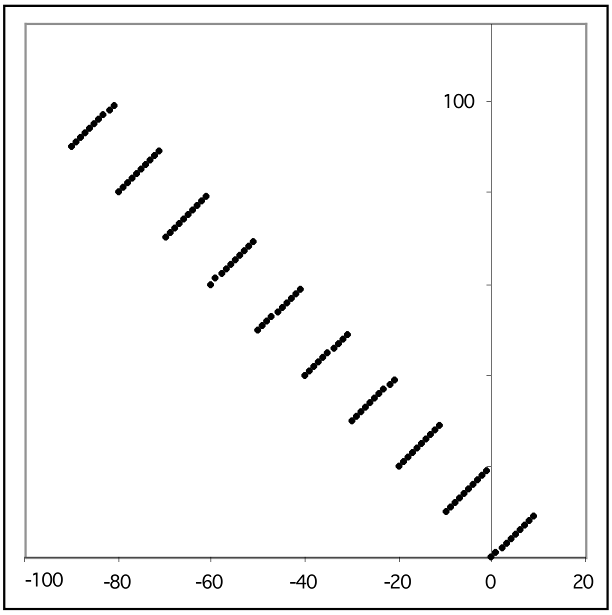

Abb. 6: Iteriertes Zählen bis 100

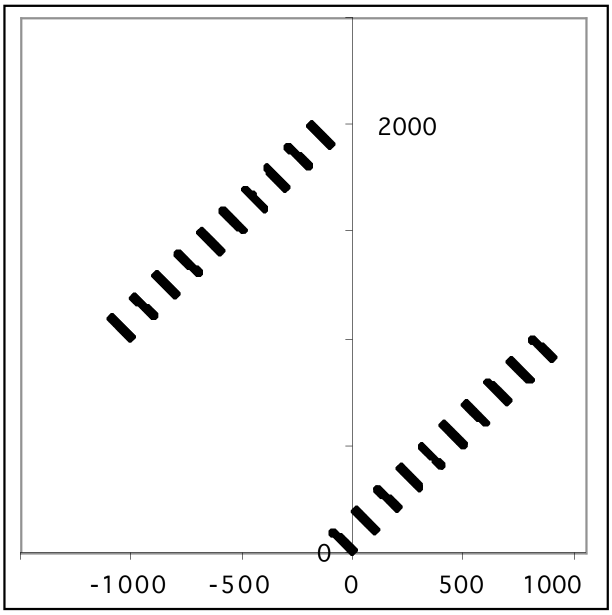

Abb. 7: Iteriertes Zählen bis 2000

Abbildung 6 zeigt den Zählprozess von 0 bis 99. Dieser Abschnitt ist in Abbildung 7 in der Grafik wiederum ›links unten‹ enthalten. Zunächst beginnt (Abb. 6) das Zählen linear: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 wie in Abbildung 5. Doch dann wird das erste Muster neunmal kopiert und passend ›links nach oben‹ von der y–Achse angebaut. Dies kann man so verstehen, dass nun nicht weiter um Eins weitergezählt wird, sondern dass mit dem ersten ›Zehnerabschnitt‹ als neuer Zähleinheit neunmal weitergezählt wird. Danach wird dieser gesamte Abschnitt von (0 bis 99) als neue Zähleinheit genommen und auch damit neunmal weitergezählt (Abb. 7). Dieser Prozess wird iteriert fortgesetzt.

›Die inhaltlich-anschauliche oder phänomenologische Bearbeitung [mathematischer Probleme] beruht wesentlich darauf, dass bestimmte Darstellungen der betrachteten Objekte zur Verfügung stehen: Treppen für Summen aufeinanderfolgender Zahlen und Rechtecke für Produkte, die Zahlengerade als geometrisches Modell der Zahlenreihe … Diese Darstellungen erlauben eine experimentelle Untersuchung der betreffenden mathematischen Kontexte in ähnlicher Weise, wie naturwissenschaftliche Sachverhalte naturwissenschaftliche Experimente ermöglichen‹ (Wittmann 2001, S. 236). Ganz in diesem Sinne sind die grafischen Veranschaulichungen der Zahlen (siehe die Abb. 1, 2, 3, 4, 6 und 7) ›Darstellungen der betrachteten mathematischen Objekte‹ und erlauben so mathematisch experimentelle Untersuchungen der Problemstellung, die auf der phänomenologischen Ebene zunächst unsichtbare mathematische Beziehungen und Strukturen der Erkenntnis zugänglich machen.

Literatur

Gardner, M. (1974): Mathematical Games – How to Turn a Chessboard into a Computer and to Calculate with Negbinary Numbers. *Scientific American* (4), 106-111.

Gellert, U. (2000): Verfremdung als Methode der Lehrerausbildung – Ein Beispiel zum mathematischen Anfangsunterricht. *mathematica didactica*, H. 1, S. 72-82

Knuth, D. E. (1969): *The Art of Computer Programming. Vol. II, Seminumerical Algorithms*. Reading Mass.: Addison-Wesley Publishing Company.

Steinbring, H. (1994): Symbole, Referenzkontexte und die Konstruktion mathematischer Bedeutung – am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht. *Journal für Mathematikdidaktik*, 15 (3/4), 277-309.

Wittmann, E. Ch. (2001): Rettet die Phänomene! In: Selter, C. & Walther, G. (Hg.), *Mathematiklernen und gesunder Menschenverstand. Festschrift für Gerhard Norbert Müller*. 222-242. Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett-Grundschulverlag.