aus: Selter, Ch. & Walther, G.: Mathematiklernen und gesunder Menschenverstand. Festschrift für Gerhard Norbert Müller. Ernst Klett Grundschulverlag: Leipzig / Stuttgart / Düsseldorf 2001, S. 174-183

Heinz Steinbring, Dortmund

Der Sache *mathematisch* auf den Grund gehen – heißt Begriffe bilden

Einleitung

Im Mathematikunterricht der Grundschule spielt der Sachbezug eine ganz wichtige Rolle für das Lernen elementarer mathematischer Begriffe und Operationen. Durch das Einbeziehen von „Sachen" – also konkreten Gegebenheiten, realen Situationen, Ereignissen aus der Lebens- und Erfahrungswelt der Kinder – erhofft man sich u. a. eine direkt fassbare und unmittelbar einleuchtende Grundlage, auf der die Mathematik „leichtverständlich aufgebaut" werden könnte; zudem soll der Sachbezug auch ein Stück Legitimation für die Notwendigkeit, Mathematik zu lernen, liefern. Doch die Realität des alltäglichen Mathematikunterrichts widerspricht dieser didaktischen Hoffnung, denn es ist allgemein bekannt, dass gerade Sachaufgaben für viele Kinder zu den schwierigsten mathematischen Anforderungen überhaupt gehören.

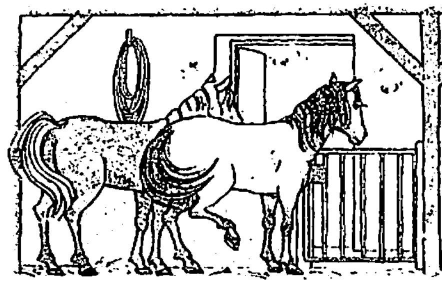
Hinter dem angesprochenen Dilemma steckt neben anderen Problemen auch die Frage: Worin besteht die Besonderheit in der Beziehung zwischen der Sache und der Mathematik? Zwischen der Sache und der Mathematik – so die These dieses Beitrags – vermittelt nicht eine Eins-zu-Eins Übersetzung, bei der die konkreten Sachelemente direkt mit mathematischen Symbolen und Operationszeichen verbunden werden. Wesentlich für eine produktive Verbindung zwischen der Sache und der Mathematik ist die Konstruktion von Beziehungen, Strukturen und Zusammenhängen im Sachkontext, denn letztlich zielt die Mathematik auf solche Strukturen. Dies entspricht von Seiten der Mathematik einer Auffassung, nach der die Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen (Devlin, 1997; Orton, 1999; Steinweg, 2000; Wittmann, 1997) charakterisiert werden kann. Und von Seiten der Sache sei an die kritische Äußerung von Heinrich Winter erinnert, dass die Beziehung zwischen Wirklichkeit und Mathematik zu einseitig linear von der Wirklichkeit hin zur Mathematik gesehen und allzu optimistisch bewertet wird. „Auf jeden Fall werden, wenn man die Sache ernst nimmt (die Sachsituationen etc.) Diskontinuitäten zwischen Lebenswelt und arithmetischen Begriffen sichtbar, die grundsätzlicher Natur sind. In der Didaktik ist bisher das Verhältnis zwischen innen und außen, zwischen rein und angewandt allzu harmonisch-optimistisch eingeschätzt worden" (Winter, 1994, S. 11).

Angesichts dieser Problematik wird die Beziehung zwischen Mathematik und Anwendungsfällen meist mit Hilfe der umfassenden Konzepte von Mathematisierung und Modellbildung charakterisiert; in diesem Beitrag wird versucht, einen bei Mathematisierungen von schon elementaren Sachverhalten zentralen theoretischen Aspekt anzusprechen: die Entwicklung von Begriffen durch die Konstruktion wichtiger mathematischer *Beziehungen*.

Wie wird der Realitätsgehalt von Sachaufgaben eingeschätzt?

Die folgende Sachaufgabe gehört zu den Lieblingsaufgaben des Jubilars (vgl. Das Zahlenbuch Mathematik im 4. Schuljahr, 1997, S. 51):

Aufgabe 1:



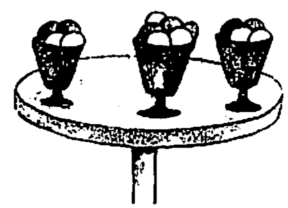
An einem Herbstabend werden in einem Stall 11 Tiere gezählt.
Es sind Pferde und Fliegen.
Zusammen haben sie 60 Beine.
Wie viele Pferde und wie viele Fliegen sind es?

Versuche mit deinem Partner diese Aufgabe zu bearbeiten. Diese Aufgabe ist schwierig und nicht in einem Schritt zu lösen. Daher probiert verschiedene Möglichkeiten aus, versucht an die Lösung heranzukommen, und gebt nicht auf!

Manch Kritiker wird einwenden, dass es sich doch nicht um eine tatsächliche Sachaufgabe handeln würde, denn der beschriebene Sachverhalt sei doch letztlich nicht wahrheitsgetreu bzw. authentisch; zudem, wenn man wissen möchte, wie viele Pferde und Fliegen im Stall sind, dann könne man einfacher als alle Beine zu zählen gleich die Tiere selbst abzählen und so in der realen Situation das Problem lösen. Diese Aufgabe erscheine doch zu sehr für die Mathematik konstruiert zu sein.

Diese Aufgabe lässt sich mit Blick auf den dargestellten Sachverhalt variieren. Beispielsweise lassen sich die beiden folgenden Sachkontexte konstruieren:

Aufgabe 2:



Auf dem Kindergeburtstag geht die Mutter mit 10 Kindern ins Eiscafé Piccolo. Dort bestellen sich die Kinder und die Mutter Eisbecher mit 4 oder mit 6 Eiskugeln. Als nach einer Viertelstunde alle 11 Eisbecher leer geschleckt waren, musste die Mutter dem Kellner genau 30,– DM bezahlen. Im Eiscafé Piccolo kostet eine Kugel Eis 50 Pfennig.
Die Mutter überlegt: „In wie vielen der 11 Eisbecher waren 4 Kugeln und in wie vielen waren 6 Kugeln?"

Könnt ihr der Mutter helfen und herausfinden, wie viele Eisbecher 4 und wie viele 6 Kugeln enthielten?

Aufgabe 3:

Zum Geburtstag bekommt Herr Müller von seiner Frau einen riesigen Strauß mit 60 Blumen geschenkt, denn er ist 60 Jahre alt geworden. Der Strauß besteht nur aus roten und gelben Rosen. Herr Müller möchte wissen, wie viele rote Rosen im Strauß sind. Frau Müller verrät ihm nur: „Natürlich sind es insgesamt 60 Rosen. Ich habe den Strauß aus 11 kleinen Sträußen zusammengestellt. Die kleinen Sträuße enthielten immer entweder 6 rote oder 4 gelbe Rosen." Herr Müller rechnet und sagt: „Dann sind es insgesamt 48 rote Rosen!"

Stimmt Herrn Müllers Rechnung?
Wenn Herr Müller richtig gerechnet hat, erklärt warum!

Sind nun diese geänderten Sachkontexte wirklichkeitsnäher als die Pferde und Fliegen im Stall? Was manche erfahrenen Sachrechen-Didaktiker vielleicht als realistischer einschätzen würden, sieht aus der Sicht von Kindern natürlich ganz anders aus. Einige Kinder haben die drei Aufgaben – teils mit Hinweisen für mögliche Strategien – bearbeitet und sind auch zu korrekten arithmetischen Lösungen gekommen. Ihnen wurden zu allen drei Aufgaben auch die folgenden Fragen gestellt:

Jetzt schaut euch die drei Aufgaben noch einmal nacheinander an.
Was denkt ihr? Könnte jede der drei Geschichten wirklich so passiert sein, oder könnten sie erfunden worden sein?
Wenn die Geschichte in der Aufgabe 1) [bzw. 2 oder 3] wirklich so passiert sein könnte, dann erklärt warum!
Wenn die Geschichte in der Aufgabe 1) [bzw. 2 oder 3] nicht wirklich so passiert sein kann, sondern erfunden ist, dann erklärt warum!

Die Pferde-und-Fliegen-Aufgabe wurde einmal als eher realistisch eingeschätzt:

Weil es neben denn Po von Pferden es immer fliegen [gibt]

Aber es wurden beispielhaft auch Zweifel geäußert:

Man kann nicht alle Pfligen zehlen
er geht keiner in den Stal und zehlt
die Beine

Entgegen der Erwartung erfahrener Didaktiker schätzen einige Kinder den Realitätsgehalt der zweiten Aufgabe negativ ein:

Die Geschichte kann nicht wahr sein weil, es gibt kein Lisrüfe was Picolo heißt.

Weil ~~Von~~ kein Kind 6 Kugeln essen kan

Ebenso wurde die dritte Geschichte von den Kindern als erfunden erklärt – obwohl sie ja viele wahre Aspekte enthält:

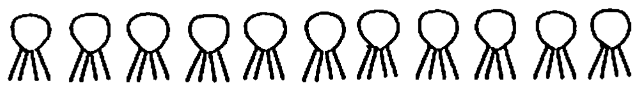
Es kann nicht sein weil es zu viele Blumen sind.

Weil keiner ein zum geburtztag 11 Blumenstäuse schenkt

Diese exemplarischen Antworten verdeutlichen, dass Kindern anderes als relevant für eine Realitätsbewertung von Sachaufgaben erscheint, als etwa Didaktikern. Dies ist keine empirisch bestätigte Aussage, aber die Beispiele zeigen, dass auch gut gewählte Sachkontexte für Kinder nicht automatisch und spontan Realitätstreue oder Echtheit der beschriebenen Situation ausdrücken. Schon hier formulieren Kinder mit ihren Worten Unterschiede zwischen der Sache und der Mathematik. Es scheint so zu sein, dass den Sachaufgaben – auch wenn sie scheinbar noch so wirklichkeitsnah konstruiert wurden - nicht an sich schon Realitätsrelevanz zugesprochen werden kann; jeweilige Einschätzungen über den Realitätsgehalt – insbesondere wenn Kinder sie treffen sollen – werden von vielen subjektiven Aspekten und unterschiedlich gewichteten Perspektiven abhängen. Realitätsgehalt ist nicht a priori vorgegeben, sondern muss im Lern- und Unterrichtsprozess entwickelt werden.

Begriffsbildung in Sachaufgaben als die Konstruktion von neuen Beziehungen

Die Pferde-und-Fliegen-Aufgabe ist in der Mathematikdidaktik wohl bekannt (etwa als Hühner-und-Kaninchen-Aufgabe, siehe Polya, 1966, S. 48ff, siehe auch Dörfler, 1988). Und in didaktischen Analysen ist herausgearbeitet worden, dass eine Bearbeitung dieser Problemstellung keineswegs die elementare Algebra oder die Auflösung zweier Gleichungen erfordert. Darüber hinaus hat Gerhard Müller (Müller, 1995; Wittmann & Müller, 1997a & 1997b) gezeigt, dass Kinder der Grundschule diese Aufgabenstellungen erfolgreich durchdringen können, und – was von besonderem Interesse ist – dass viele Grundschulkinder bei geeigneter Anleitung zu höchst unterschiedlichen und schlagkräftigen Lösungsstrategien gelangen können. Eine der Lösungsstrategien benutzt eine ikonische Repräsentation des Sachverhalts. Die Tierkörper werden stilisiert als Kreise (oder Kullern) gezeichnet, und dann wird ihnen in geeigneter Weise die zur Verfügung stehende Anzahl der Beine „angeheftet". Bei diesem Vorgehen werden allen 11 Tieren zunächst 4 Beine zugeordnet:



Dann wird überlegt, dass nach „Verteilen" von $4 \cdot 11 = 44$ Beinen noch 16 Beine - und zwar immer je zwei - an weitere Tiere verteilt werden müssen:

Auf diese Weise werden 8 Fliegen mit je 6 Beinen und drei Pferde mit je 4 Beinen konstruiert. Die Aufgabe ist gelöst.

Die zentrale Idee der Koppelung zwischen Sache und Mathematik soll darin zu finden sein, dass im Sachkontext eine mathematische Beziehung konstruiert wird. Wo versteckt sich in unserem Beispiel diese Beziehungs-Konstruktion? Handelt es sich nicht doch um eine Übersetzung der Sachelemente (Tiere, Beine etc.) in Dingsymbole, mit denen geschickt manipuliert wird? (vgl. Karaschewski, 1966, S. 101ff). Eine erste Beschreibung der hier dargestellten Bearbeitungsstrategie führt zu der folgenden Charakterisierung:

„Alle Tiere haben (mindestens) vier Beine und einige Tiere haben *zwei Beine mehr*. Wie kann man die Anzahl der Tiere ermitteln, die *zwei Beine mehr* haben?"

Bei dem, was hier exemplarisch mit „zwei Beine mehr" beschrieben ist, handelt es sich wesentlich um die wichtige, hier konstruierte Beziehung im Sachkontext, welche eine „Anwendung" der Mathematik ermöglicht und damit eine Beziehung zwischen Sache und Mathematik in unserem Beispiel eröffnet. „Zwei Beine mehr" ist keine unmittelbare, konkrete Eigenschaft von lebendigen Tieren, es ist eine Konstruktion, die ja auch nur im bewusst hergestellten Vergleich zwischen bestimmten Tieren möglich wird, also in der Tat eine Beziehungs-Konstruktion. Diese Beziehung ist wirkungsvoll und kann produktiv zur Bearbeitung weiterer Problemstellungen ausgebaut werden.

Wenn in der jeweiligen Sache intern eine neue Beziehung konstruiert wird, wenn aus Sicht der Mathematik also nicht die sichtbaren, konkreten Eigenschaften des Sachverhalts im Zentrum stehen, sondern vielleicht noch unsichtbare Beziehungen zwischen den Sachelementen, dann wird deutlich, dass auch ganz unterschiedliche Sachkontexte bei aller „sachlichen" Unterschiedlichkeit aus mathematischer Perspektive hinsichtlich der im Sachkontext konstru-

ierten Beziehungsstruktur sehr wohl „gleich" sein können. Damit erhalten wir in produktiven Verbindungen zwischen Sache und Mathematik zum einen interne Beziehungen in jeweiligen Sachkontexten, die zum anderen zu externen Beziehungen zwischen verschiedenartigen Sachkontexten über die Gleichheit der Struktur führen können.

Für Kinder sind solche externen Beziehungen und „Gleichheiten" zwischen den oft so verschiedenartig aussehenden Sachkontexten meist sehr schwer zu erkennen. Die Kinder haben die drei Aufgaben mit Strategien des Probierens oder der Anwendung vorgegebener beispielhafter Lösungswege (siehe Das Zahlenbuch 4, 1997, S. 51) bearbeitet und so Lösungen entwickelt. Die zu Grunde liegende „strukturelle Gleichheit" zwischen den drei Aufgaben haben sie dabei nicht bemerkt. Es ist ja auch eine schwierige Anforderung, die Tierbeine mit den Eiskugeln oder den Rosen „gleich" zu setzen, oder die Tiere mit den Blumensträußen und mit den Eisbechern.

Um dem Problem der Beziehungs-Konstruktion weiter nachgehen zu können, sollen folgende Kurz-Bezeichnungen gewählt werden. Wir betrachten – aus didaktischer Analyseperspektive, die im Lehramtsstudium oder auch bei der Unterrichtsvorbereitung wichtig ist, und nicht als Vorschlag zum konkreten Vorgehen für die Kinder – die beiden folgenden Gleichungen:

(1) $O_1 \cdot a_1 + O_2 \cdot a_2 = A$ (2) $O_1 + O_2 = O$ $(a_1 < a_2)$

A sei die Anzahl aller Einzeldinge (Anzahl aller Beine, aller Eiskugeln, aller Rosen);
O sei die Anzahl aller Objekte (Anzahl aller Tiere, aller Eisbecher, aller Blumensträuße);
a_i sei die Anzahl der Einzeldinge pro Objekt (4 Beine, 6 Beine, 4 Kugeln, 6 Kugeln, ...);
O_i sei die Anzahl der Objekte der Art i (Anzahl der Pferde, der Fliegen, der Becher mit vier Kugeln, mit 6 Kugeln, der Sträuße mit 4 bzw. mit 6 Rosen).

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich die inhaltliche Beschreibung: „Alle Tiere haben (mindestens) vier Beine und einige Tiere haben *zwei Beine mehr*" wie folgt kurz ausdrücken:

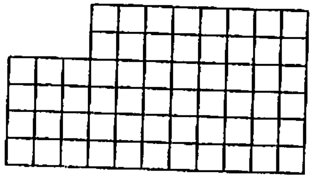
„Es werden an alle Tiere vier Beine vergeben", lässt sich so kurz darstellen: $O \cdot a_1$
„Es bleiben dann noch weitere Beine über (für die Tiere mit zwei Beinen mehr)", lässt sich so ausdrücken: $(A - O \cdot a_1)$
„Einige Tiere haben zwei Beine mehr", heißt nun: $O_2 \cdot (a_2 - a_1)$
Die Anzahl der weiteren, jeweils zwei Beine, ist gleich der Anzahl der 6-beinigen Tiere mal zwei Beinen, bedeutet also mit den Abkürzungen: $(A - O \cdot a_1) = O_2 \cdot (a_2 - a_1)$

Dies führt zur Lösung: $O_2 = \dfrac{(A - O \cdot a_1)}{(a_2 - a_1)}$.

Die im Sachverhalt konstruierte Beziehung »Zwei Beine mehr« bzw. $(a_2 - a_1)$ erlaubt es auf Seiten der mathematischen Lösungsstrategie, die zwei Gleichungen auf eine Gleichung für das unbekannte O_2 zurückzuführen. Wir rechnen damit so, wie die Kinder es in ihrer ikonischen Strategie vorgemacht haben: $\dfrac{60 - 4 \cdot 11}{2} = 8$ (Anzahl der 6-beinigen Fliegen).

Mit Hilfe begrifflicher Beziehungen neue Sachaufgaben konstruieren

Es wurden in Aufgabe 2) von 11 Personen 60 Eiskugeln in Portionen zu 4 oder zu 6 Kugeln gekauft. Diese Situation kann man folgendermaßen veranschaulichen:



Diese Veranschaulichung lässt sich mit zwei arithmetischen Gleichungen beschreiben:

(1) $11 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 60$ (2) $3 \cdot 4 + 8 \cdot (4 + 2) = 60$

Gleichung (1) dient der Konstruktion der Zahl 8 (die Anzahl der Personen die zusätzlich zwei Kugeln mehr erhielten) aus den gegebenen Zahlen: 11 Personen, 60 Kugeln, 4er und 6er Becher); Gleichung (2) stellt eine Um-Deutung von (1) dar, in der man die Anzahl der 4er Becher und der Becher „mit zwei mehr" Kugeln ablesen kann.

Mit dieser Deutung lässt sich die Aufgabenstellung ausweiten, sowie durch eine größere Variationsbreite auf mehr „Fälle" anwenden, und gleichzeitig erweist sich die Lösungsstrategie mit der enthaltenen Beziehungs-Konstruktion als tragfähig.

Aufgabe 4: Eine Gruppe von 18 Kindern kauft in einem Eissalon Becher mit 4, 5 oder 6 Eiskugeln; sie bezahlen für insgesamt 85 Eiskugeln. Wie viele Becher mit 4, 5 oder 6 Kugeln sind an diese Gruppe verkauft worden?

Arithmetische Lösungsstrategie:
$18 \cdot 4 + 13 \cdot 1 = 85$
$5 \cdot 4 + 13 \cdot (4 + 1) + 0 \cdot (4 + 2) = 85$
Lösung: 5 Kinder kaufen 4 Kugeln und 13 Kinder kaufen 5 Kugeln.
Es gibt weitere Lösungen:
$18 \cdot 4 + 11 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 85$
$6 \cdot 4 + 11 \cdot (4 + 1) + 1 \cdot (4 + 2) = 85$
Lösung: 6 Kinder kaufen 4 Kugeln, 11 Kinder kaufen 5 Kugeln und ein Kind kauft 6 Kugeln.
Systematisches Probieren führt schließlich zu den folgenden weiteren Lösungen:
7 (8, 9, 10, 11) Kinder kaufen 4 Kugeln,
9 (7, 5, 3, 1) Kinder kaufen 5 Kugeln und
2 (3, 4, 5, 6) Kinder kaufen 6 Kugeln.

Selbst anspruchsvolle Aufgaben, die üblicherweise nur mit Hilfe der Algebra lösbar erscheinen, lassen sich mit der hier entwickelten Strategie unter Benutzung der inhärenten begrifflichen Beziehung des »mehr als« erfolgreich bearbeiten.

Aufgabe 5: „Das Problem der 100 Vögel" aus einem Buch des chinesischen Mathematikers Chang Ch'iu-chien (um 485 n. Chr.). Ein Hahn kostet 5 Sapeks, eine Henne 3 Sapeks und 3

Küken 1 Sapek. Wie viele Hähne, Hennen und Küken, insgesamt 100, kosten zusammen 100 Sapeks?

Dieser Aufgabe, die etwa in der Sekundarstufe I (Klasse 8) im Rahmen von Gleichungen mit mehreren Variablen als „Sternchen"-Aufgabe gestellt wird, werden folgende Hinweise beigefügt: „Stelle ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und drei Variablen auf und forme so um, dass eine Variable wegfällt. Versuche dann, Lösungen durch Probieren zu finden."

Das am Beispiel der Eiskugeln entwickelte Verfahren ermöglicht es uns, mit der Strategie der Beziehung des „mehr als" auf ganz systematische Weise die gesuchten Lösungen zu finden.

Die Ausgangsgleichungen lauten:

$\frac{1}{3}$ Sapek · Anzahl der Küken + 3 Sapeks · Anzahl der Hennen + 5 Sapeks · Anzahl der Hähne = 100 Sapeks
Anzahl der Küken + Anzahl der Hähne + Anzahl der Hennen = 100
Wir führen eine Änderung ein, die zu einer ganzzahligen Gleichung führt:
1 Sapek · Anzahl Küken + 9 Sapeks · Anzahl Hennen + 15 Sapeks · Anzahl Hähne = 300 Sapeks

Gemäß dieser Gleichung kostet eine Henne 8 Sapeks *mehr als* ein Küken und ein Hahn kostet 14 Sapeks *mehr als* ein Küken; dies sind die wichtigen Beziehungen für die elementare Lösungsstrategie.

Die erste Gleichung der folgenden Tabelle (in Lösung 1) ergibt sich aus der Überlegung, dass alle 100 Tiere mindestens (nach neuem Ansatz) 1 Sapek kosten, dies führt zu einer Aufteilung in 100 Tiere mit mindestens 1 Sapek Kosten, wobei 200 Sapek noch zusätzlich mit $25 \cdot 8 = 200$ für etwas teurere Tiere verwendet werden können, nämlich für Hennen, die $1 + 8 = 9$ Sapeks (nach geändertem Ansatz) kosten. Für Hähne bleibt hier kein zusätzliches Geld übrig. Die dritte Zeile unter Lösung 1 enthält die Rückrechnung auf die Ausgangsgleichung.

Lösung	Küken	Hennen	Hähne	Sapeks
(1)	$100 \cdot 1$	$+ \; 25 \cdot 8$	$+ \; 0 \cdot 14$	$= 300$
	$75 \cdot 1$	$+ \; 25 \cdot (1 + 8)$	$+ \; 0 \cdot (1 + 14)$	$= 300$
	$75 \cdot \frac{1}{3}$	$+ \; 25 \cdot 3$	$+ \; 0 \cdot 5$	$= 100$
(2)	$100 \cdot 1$	$+ \; 18 \cdot 8$	$+ \; 4 \cdot 14$	$= 300$
	$78 \cdot 1$	$+ \; 18 \cdot (1 + 8)$	$+ \; 4 \cdot (1 + 14)$	$= 300$
	$78 \cdot \frac{1}{3}$	$+ \; 18 \cdot 3$	$+ \; 4 \cdot 5$	$= 100$
(3)	$100 \cdot 1$	$+ \; 11 \cdot 8$	$+ \; 8 \cdot 14$	$= 300$
	$81 \cdot 1$	$+ \; 11 \cdot (1 + 8)$	$+ \; 8 \cdot (1 + 14)$	$= 300$
	$81 \cdot \frac{1}{3}$	$+ \; 11 \cdot 3$	$+ \; 8 \cdot 5$	$= 100$
(4)	$100 \cdot 1$	$+ \; 4 \cdot 8$	$+ \; 12 \cdot 14$	$= 300$
	$84 \cdot 1$	$+ \; 4 \cdot (1 + 8)$	$+ \; 12 \cdot (1 + 14)$	$= 300$
	$84 \cdot \frac{1}{3}$	$+ \; 4 \cdot 3$	$+ \; 12 \cdot 5$	$= 100$

Die Bestimmung der Anzahlen 18 für Hennen und 4 für Hähne (in Lösung 2) berücksichtigt die ganzzahlige Aufteilung von 200 Sapeks auf die Zusatzkosten für Hennen („8 Sapeks mehr") und die Zusatzkosten für Hähne („14 Sapeks mehr"). Ein systematisches Probieren zeigt, dass nur folgende Kombinationen von Anzahlen für Hennen und Hähne auf diese Weise möglich sind:

Hennen		Hähne		Sapeks
$25 \cdot 8$	+	$0 \cdot 14$	=	200
$18 \cdot 8$	+	$4 \cdot 14$	=	200
$11 \cdot 8$	+	$8 \cdot 14$	=	200
$4 \cdot 8$	+	$12 \cdot 14$	=	200

Damit sind alle Lösungen gefunden.

Rückblick

Die variable Bearbeitung der Pferde-und-Fliegen-Aufgabe hat deutlich gemacht, dass das Verhältnis zwischen Sache und Mathematik in besonderer Weise grundlegende Bedingungen der Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen berücksichtigen muss. Dabei ist weder die einseitige Hervorhebung der empirisch-konkreten Aspekte der Sachsituation noch die Beschränkung auf formale algorithmische oder algebraische Aspekte der Mathematik Ausdruck für einen gesunden Menschenverstand; eine überlegte Sicht auf die durch die Sache gegebenen Besonderheiten bei gleichzeitig notwendigem Ernstnehmen der epistemologischen mathematischen Vorbedingungen zeigt echten mathematischen Menschenverstand, der nicht auf schematische und rein innermathematische Lösungsverfahren zurückgreift, sondern in ausgewogener Weise inhaltliche Bedingungen der Sache durch strukturelle Deutungen so nutzt, dass elementare Lösungen auch ohne künstliche und exzessive mathematische Abstraktionen einsichtsvoll ermöglicht werden. Zudem bietet diese mathematische Sichtweise auf die Bearbeitung von Sachaufgaben produktive Anschlussmöglichkeiten für Grundschulkinder. Die Einführung wesentlicher Beziehungen als erster Schritt zu einer mathematischen Lösung ist der Kern einer elementaren Mathematisierung, die jedoch nahe an der Sache bleibt und im exemplarischen Kontext der Arithmetik erfolgen kann.

Anmerkung: Für kritische Rückmeldungen, die zu einer substanziellen Verbesserung dieses Artikels beigetragen haben, möchte ich mich bei Klaus Ulrich Guder, Petra Scherer, Ralph Schwarzkopf und Anna Susanne Steinweg bedanken. Ebenso sei den Kindern und der Lehrerin für die Erprobung der Aufgaben herzlich gedankt.

Literatur

1. Devlin, K.: Muster der Mathematik, Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur, Berlin: Spektrum Akad. Verlag, 1997.
2. Dörfler, W. (Hrsg.): Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Arbeiten aus

dem Projekt „Entwicklung formaler Qualifikationen im Mathematikunterricht". (Vol. 16), Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Temsky, B. G. Teubner, 1988.
3. Karaschewski, H.: Wesen und Weg des ganzheitlichen Rechenunterrichts, Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1966.
4. Müller, G.: Kinder rechnen mit der Umwelt, in: Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch. (Hrsg.) Mit Kindern rechnen – Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Mathematikunterricht, Arbeitskreis Grundschule, 42–64; 1995.
5. Müller, G., & Wittmann, E. Ch.: Das Zahlenbuch, Mathematik im 4. Schuljahr, Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag, 1997a.
6. Müller, G., & Wittmann, E. Ch.: Das Zahlenbuch, Mathematik im 4. Schuljahr, Lehrerband Nordrhein-Westfalen, Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag, 1997b.
7. Orton, A. (Hg.): Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics, London: Cassel, 1999.
8. Polya, G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Bd. 1. Basel: Birkhäuser, 1966.
9. Steinweg, A. S.: Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern – Epistemologisch-Pädagogische Grundlegung, Dortmund: Universität Dortmund, 2000.
10. Winter, H.: Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen, Grundschule, 26(3), 10–13, 1994.
11. Wittmann, E. Ch.: Operative Proofs in Primary Mathematics, in: Proceedings of Topic Group 8: Proofs and Proofing: Why, when and how? 8th International Congress of Mathematical Education, Seville, Spain, Centrahill Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA).