

Konstitutive Beziehungen Mikropolarer Flüssigkeiten
und die Lösung des Dirichlet'schen Randwertproblems

Diplomarbeit

vorgelegt von

Dipl.-cand. math. Frank Osterbrink
im Fachbereich Mathematik

Universität Duisburg-Essen



Betreuer:
Prof. Dr. P. Neff,
AG Nichtlineare Analysis und Modellierung

Moers, den 18. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
1.1 Notation	4
1.2 Symbolverzeichnis	5
2 Die Dynamik mikropolarer Flüssigkeiten	7
2.1 Euler- und Lagrange Bild	7
2.2 Deformationsgradient und Deformationsrate	10
2.3 Intrinsische Deformationen der Partikel	11
2.4 Das Reynoldssche Transporttheorem	13
2.5 Die Erhaltungssätze der Hydrodynamik	16
2.5.1 Die Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung)	17
2.5.2 Impulserhaltung	18
2.5.3 Drehimpulserhaltung	21
2.5.4 Energieerhaltung	24
3 Die Charakteristik von Materialien - konstitutive Materialgesetze	27
3.1 Zustandsgleichungen für Stokessche Flüssigkeiten	28
3.1.1 Invarianz unter Galilei-Transformationen	29
3.1.2 Prinzip der materiellen Objektivität	32
3.1.3 Die Forderung nach Isotropie	35
3.1.4 Darstellung isotroper Tensorfunktionen	37
3.2 Verallgemeinerung auf mikropolare Flüssigkeiten	40
3.2.1 Mikropolare Flüssigkeiten unter Galilei-Transformationen	41
3.2.2 Isotropieeigenschaften mikropolarer Flüssigkeiten	41
3.2.3 Materielle Objektivität mikropolarer Flüssigkeiten	42
3.2.4 Thermodynamische Restriktionen für die Viskositätskonstanten	47
4 Mathematische Diskussion	50
4.1 Grundlagen der Funktionalanalysis	50
4.1.1 Das Lemma von Lax-Milgram	53
4.1.2 Fixpunktsätze	56
4.1.3 Sobolevräume und Distributionen	60
4.1.4 Einige Einbettungssätze und wichtige Abschätzungen	67
4.2 Mögliche Randbedingungen mikropolarer Flüssigkeiten	72
4.3 Stationäre Dirichlet'sche Randbedingungen	75
4.3.1 Das Gleichungssystem von Stokes	75
4.3.2 Das stationäre Dirichlet Problem ohne Wärmeleitung	77

A Anhang	89
A.1 Vektor- und Tensoridentitäten	89
A.1.1 Ergänzungen zur Vektoranalysis	89
A.1.2 Das Levi-Civita-Symbol alias der ε -Tensor	90
A.1.3 Das Tensorskalarprodukt $\langle A, B \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}$	91
A.1.4 Ergänzungen zu Kapitel 3	91
A.2 Weitergehende Sätze	93
A.2.1 Der Riesz'sche Darstellungssatz	93
A.2.2 Das Lemma von Lax-Milgramm	94
Literatur	96
Eidesstattliche Erklärung	99
Danksagung	100

Kapitel 1

Einleitung

Die Beschreibung und Untersuchung hydrodynamischer Phänomene mit mathematischen Methoden ist eine interessante und für viele Bereiche in Industrie und Forschung bedeutsame Aufgabe der Mathematik. Die bekanntesten Modellen in dieser Disziplin sind die *klassischen Stokesschen Gleichungen* und ihr nichtlineares Pendant, die *Navier-Stokes-Gleichungen*. Mit ihnen lässt sich aber nicht nur die Strömung von Flüssigkeiten, sondern auch die Bewegung von Gasen etwa in der Luftfahrtindustrie untersuchen. Grundlegende

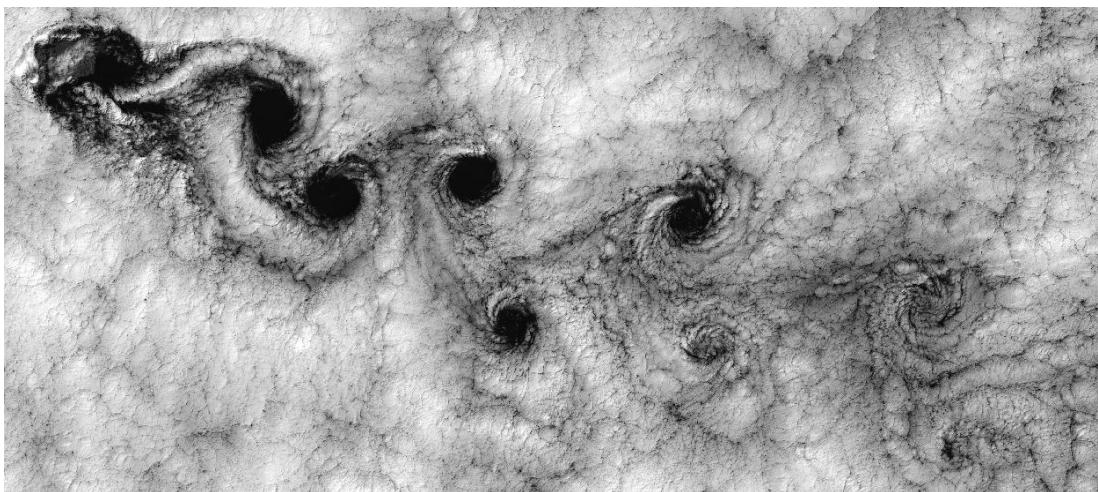


Abbildung 1.1: Wolken-Wirbel auf der Leeseite eines Berges auf den Juan Fernandez Islands im Pazifik längs einer Kármánschen Wirbelstrasse (*Satellitenaufnahme der durch die Juan-Fernández-Inseln entstehenden Wirbel, NASA, landsat / Wikipedia*)

Probleme dieser Theorien sind das Fehlen einer globalen Lösungstheorie sowie die unzureichende Beschreibung von Flüssigkeiten in denen sich mikroskopische Partikel mit der Flüssigkeit mitbewegen¹.

Die Theorie *mikropolarer Flüssigkeiten* verallgemeinert die Navier-Stokes-Gleichungen und versucht diesen Mangel auszugleichen. Physikalisch betrachtet, handelt es sich dabei um viskose Flüssigkeiten in denen sich zufällig orientierte, mikroskopisch kleine, starre Partikel mitbewegen, die um ihre eigene Achse rotieren können. Beispiele dafür sind

¹Die Navier-Stokes-Gleichungen vernachlässigen zum Beispiel die Effekte, die durch die Eigenrotation der Partikel auftreten.

zum Beispiel das menschliche Blut, Schmiermittel in der Industrie oder auch die Nanotechnologie in der Medizin. Mathematisch unterscheiden sich diese Flüssigkeiten von *klassischen* Fluiden dadurch, dass man bei ihrer Beschreibung zusätzlich zur Bewegung der Flüssigkeit, auch eine überlagerte Mikrorotation der Partikel berücksichtigen muss. Eine Konsequenz dieser Neuerung ist die Tatsache, dass der Spannungstensor, der die auf die Flüssigkeit einwirkenden Kräfte modelliert, im Gegensatz zum klassischen Fall nicht notwendigerweise symmetrisch sein muss. Außerdem muss man einen zusätzlichen Momentenspannungstensor einführen, der die Wechselwirkung der rotierenden Partikel untereinander und mit der Flüssigkeit beschreibt.

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es einen umfassenden Einblick in die mathematische Theorie der mikropolaren Flüssigkeiten zu geben. Insbesondere untersuchen wir die konstitutiven Beziehungen dieser Fluide, ihre Eigenschaften und ihre Wechselwirkung zwischen der eigentlichen Bewegung des Fluids und der Partikelbewegung. Wir werden die Differentialgleichungen, die die Bewegung der Flüssigkeit und der Mikropartikel in der Flüssigkeit bestimmen, ableiten und analysieren. Dabei werden wir ausgehend von der Theorie stokescher Flüssigkeiten die Materialgesetze diskutieren, die die Natur, also die Eigenschaften mikropolarer Fluide beschreiben und daraus fundamentale Erkenntnisse über die Struktur der Spannungstensoren gewinnen. Anschließend werden wir die nötigen mathematischen Werkzeuge bereitstellen um abschließend ein mathematisch einfaches, aber daher leider nicht sehr realistisches, Randwertproblem zu untersuchen. Wir werden Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen dieses Problems ableiten.

1.1 Notation

In dieser Arbeit verwenden wir stets die Einsteinsche Summenkonvention, d. h. über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Produktes wird summiert. So lautet zum Beispiel das Matrixprodukt zweier $n \times n$ -Matrizen $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ in Komponenten

$$(A \cdot B)_{ij} = a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Wir definieren das *Kronecker-Symbol* δ_{ij} und das *Levi-Civita-Symbol* ϵ_{ijk} durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (1.1)$$

und

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (ijk) \text{ eine gerade Permutation von } (123) \text{ ist.} \\ -1, & \text{falls } (ijk) \text{ eine ungerade Permutation von } (123) \text{ ist.} \\ 0, & \text{falls mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Vektoren werden wir mit Kleinbuchstaben, Tensoren zweiter Stufe mit Großbuchstaben bezeichnen. Sind u und w Elemente eines euklidischen oder unitären Vektorraums, so bezeichnet $\langle u, w \rangle$ stets das Skalarprodukt der beiden Vektoren. Mit $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ bezeichnen wir den Raum der (reellen) Tensoren zweiter Stufe und schreiben A^T bzw. A^{-1} für den transponierten bzw. inversen Tensor zu $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Die Gruppe der regulären (d. h. invertierbaren)

Tensoren zweiter Stufe bezeichnen wir mit $GL(3)$ und definieren die Gruppe der *speziellen orthogonalen* Tensoren zweiter Stufe durch

$$SO(3) := \{A \in GL(3) | A^T A = \mathbb{1} \text{ und } \det A = 1\} \quad (\mathbb{1} : \text{Einheitstensor}).$$

Die Lie-Algebra zur Gruppe $SO(3)$ enthält genau die schiefsymmetrischen Tensoren zweiter Stufe und wird im Folgenden mit $\mathfrak{so}(3) := \{W \in SO(3) : W + W^T = 0\}$ bezeichnet. Für einen beliebigen Tensor $W \in \mathbb{M}^{3 \times 3}$ definieren wir den *axialen Vektor* $\text{axl } W$ durch

$$\text{axl } W \times \eta = W\eta \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^3. \quad (1.3)$$

Da der axiale Vektor eines symmetrischen Tensors verschwindet ermöglicht die Abbildung axl die kanonische Identifikation des $\mathfrak{so}(3)$ mit dem \mathbb{R}^3 .

\mathfrak{D} stehe grundsätzlich für einen Differentialoperator, für dessen Anwendung auf ein Element v des betreffenden Raumes wir $\mathfrak{D}v$ schreiben. Hängt v von mehreren Variablen x, y, \dots ab und bezieht sich der Differentialoperator \mathfrak{D} lediglich auf die Variable x , so bezeichnen wir ihn mit \mathfrak{D}_x und schreiben entsprechend $\mathfrak{D}_x v$. Die dadurch festgelegten linearen Abbildungen $\mathfrak{D}v$ bzw. $\mathfrak{D}_x v$ angewendet auf ein weiteres Element u schreiben wir als $\mathfrak{D}v(u)$ bzw. $\mathfrak{D}_x v(u)$. Für die Ableitung von v nach der Zeit t verwenden wir die Abkürzung

$$\dot{v} := \frac{dv}{dt} = \mathfrak{D}_t v$$

und werden für die Bezeichnung partieller Ableitungen auch die Schreibweise

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_j^n := \underbrace{\partial_j \dots \partial_j}_n$$

benutzen. Ferner übernehmen wir aus der Vektoranalysis die Bezeichnungen

$$\text{div } F(x) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x)$$

bzw.

$$\text{curl } F(x) := \begin{pmatrix} \partial_2 F_3(x) - \partial_3 F_2(x) \\ \partial_3 F_1(x) - \partial_1 F_3(x) \\ \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x) \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k(x)$$

für die Divergenz bzw. die Rotation des Vektorfeldes $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

1.2 Symbolverzeichnis

δ_{ij} Kronecker-Symbol

ϵ_{ijk} Levi-Civita-Symbol

\vec{n} äußere Einheitsnormale

$GL(3)$	Gruppe der regulären (d. h. invertierbaren) Tensoren zweiter Stufe
$SO(3)$	Gruppe der speziellen orthogonalen Tensoren zweiter Stufe
$\mathfrak{so}(3)$	Gruppe der schiefsymmetrischen Tensoren zweiter Stufe
$\text{axl } W$	die kanonische Identifikation des $\mathfrak{so}(3)$ mit dem \mathbb{R}^3
$L = \mathfrak{D}_x v$	Geschwindigkeitsgradient
$D = \frac{1}{2}(L + L^T)$	rate of deformation tensor, symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten
$W = \frac{1}{2}(L - L^T)$	vorticity tensor, schiefsymmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten
T	Cauchy-Spannungstensor
M	Momentenspannungstensor
$B = L^T + \mathcal{W}$	rate of microdeformation tensor
$\mathbf{1}$	Einheitstensor
$F = \mathfrak{D}_X x$	Deformationsgradient
\bar{R}	Mikrorotationstensor
\mathcal{W}	microgyration tensor
ω	microgyration vector
Q	orthogonale Transformation
$\partial\Omega$	Rand der Menge Ω
$\text{dist}(x, y)$	Abstand von x zu y

Kapitel 2

Die Dynamik mikropolarer Flüssigkeiten

Der erste Schritt zur mathematischen Analyse und Untersuchung natürlicher bzw. naturwissenschaftlicher Phänomene besteht in der Modellierung dieser Phänomene. Dabei versuchen wir, basierend auf den bekannten Naturgesetzen, die wesentlichen Parameter eines Phänomens zu erfassen und sie in Relation zueinander zu setzen. Die so entstehenden Zusammenhänge ermöglichen uns dann Prognosen für die zukünftige Entwicklung des Phänomens zu erstellen. Im folgenden Kapitel werden wir daher, in Anlehnung an [Luk99] und unter Berücksichtigung fundamentaler physikalischer Gesetzmäßigkeiten wie der Massen- und Impulserhaltung, ein Modell in Form von Differentialgleichungen herleiten, das die Bewegung von (*mikropolaren*) *Flüssigkeiten* charakterisiert. Wir setzen dabei grundsätzlich voraus, dass alle auftretenden Funktionen und Gebiete hinreichend glatt sind.

2.1 Euler- und Lagrange Bild

Bezeichnet $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$ das von der Flüssigkeit zur Zeit t eingenommene Gebiet, so heißt $\Omega := \Omega(0)$ *Referenz-* oder *Ausgangskonfiguration*. Jede Größe, die den Zustand der Flüssigkeit beschreibt, wie bspw. Temperatur, Dichte oder Geschwindigkeit, kann entweder in

- (1) *materiellen Koordinaten (Lagrange-Bild)*:

Hierbei verfolgen wir die Bewegung eines Massenpunktes \mathcal{P} , der zur Zeit $t = 0$ am Ort X in \mathcal{G} war. Größen, die sich auf diesen Massenpunkt beziehen, werden bei einer Deformation von ihm mitgenommen, so dass z. B.

$$V(X, t) \quad \text{bzw.} \quad \Theta(X, t)$$

die Geschwindigkeit bzw. die Temperatur des Massenpunktes sind, der sich zur Zeit $t = 0$ am Ort X befand.

oder in

- (2) *räumlichen Koordinaten (Euler-Bild)*:

Hier betrachten wir einen festen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ im Raum, an dem sich zu verschiedenen Zeiten t , verschiedene Massenpunkte befinden können. Die in diesem Punkt

gemessenen Größen, wie die Geschwindigkeit $v(x, t)$ oder die Temperatur $\theta(x, t)$ hatten also nicht mehr einem bestimmten Massenpunkt an, sondern beziehen sich auf eben den Massenpunkt, der sich zur Zeit t gerade an dieser Stelle im Raum befindet.

dargestellt werden. Bei den Bezeichnungen werden wir im Folgenden Funktionen in *materiellen Koordinaten* mit Großbuchstaben und Funktionen in *räumlichen Koordinaten* mit Kleinbuchstaben bezeichnen. Beide Darstellungen sind äquivalent zueinander: Beschreibt

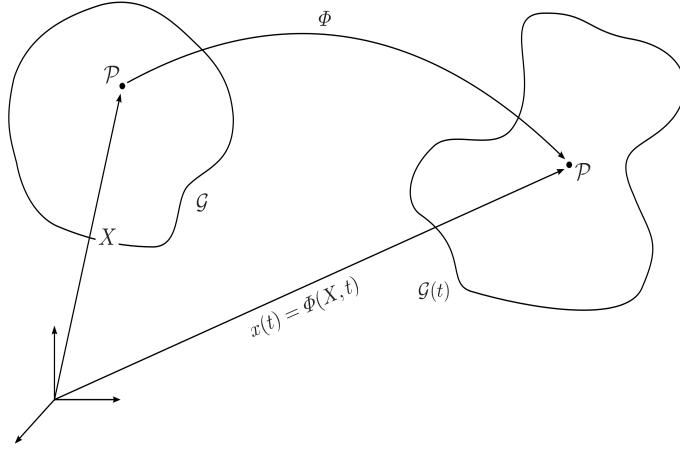


Abbildung 2.1: $\Omega(t)$ - Referenzkonfiguration

nämlich Φ die Transformation von Ω zu $\Omega(t)$, so ist

$$x = x(t) = \Phi(X, t). \quad (2.1)$$

Natürlich sollte diese Transformation stetig invertierbar sein, so dass

$$X = \Phi^{-1}(x) \quad (2.2)$$

existiert. Aus dieser Forderung können wir sofort ableiten, dass

$$0 < \det \mathfrak{D}_X \Phi(X, t) = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right)_{ij} < \infty \quad \forall t \geq 0$$

gelten muss. Neben der mathematischen Notwendigkeit lassen sich diese Forderungen auch physikalisch motivieren:

- (1) Φ sollte bijektiv sein, denn zwei unterschiedliche Massenpunkte können sich nicht gleichzeitig an ein und demselben Ort im Raum befinden und natürlich war ein Massenpunkt, der sich zur Zeit t in $\Omega(t)$ befindet auch schon in Ω vorhanden.
- (2) Die Jacobi - Determinante $\det \nabla_X \Phi(X, t)$ sollte überall positiv sein, denn wegen

$$\text{vol}(\Omega(t)(t)) = \int_{\Omega(t)} 1 \, dx = \int_{\Omega} |\det \nabla_X \Phi(X, t)| \, dX$$

ist $\det \nabla_X \Phi(X, t)$ ein Maß für das Volumen von $\Omega(t)$. Da sich das Volumen aus physikalischer Sicht nicht auf einen einzigen Punkt zusammenziehen kann, muss demnach

$\det \nabla_X \Phi(X, t) \neq 0$ (aus mathematischer Sicht zumindest fast überall) sein.¹ Ferner kann demnach $\det \nabla_X \Phi(X, t) < 0$ ausgehend von einer Referenzkonfiguration mit $\det \nabla_X \Phi(X, t) > 0$ nicht durch einen stetigen Prozess erreicht werden, so dass wir zu allen Zeiten $\det \nabla_X \Phi(X, t) > 0$ fordern.

Im Folgenden werden wir uns, solange nicht ausdrücklich anders erwähnt, der Eulerschen Darstellung anschließen und einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ im Raum betrachten. Für die Geschwindigkeit v des Teilchens, dass sich zur Zeit t im Punkt x befindet, gilt, wie aus der Newton'schen Mechanik bekannt

$$V(X, t) = v(x, t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(X, t). \quad (2.3)$$

Die Trajektorien des Geschwindigkeitsfeldes $v(x, t)$ heißen *Stromlinien* und sind für festes $t = t_0$ die Integralkurven der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}(s) = v(x(s), t_0).$$

Für eine *stationäre Strömung*, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial t}v = 0 \quad (2.4)$$

fallen offensichtlich die *Bahn* eines Teilchens und die entsprechende *Stromlinie* zusammen. Ist das Geschwindigkeitsfeld $v(x, t)$ bekannt, so lässt sich die Transformation $\Phi : \Omega \longrightarrow$

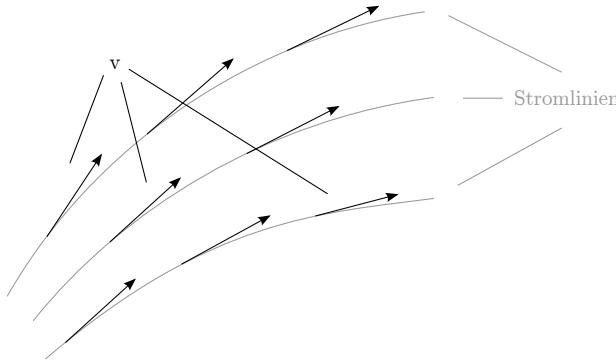


Abbildung 2.2: Stromlinien - Trajektorien des Geschwindigkeitsfeldes

$\Omega(t)$ der Referenz- in die aktuelle Konfiguration prinzipiell durch Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\Phi(X, t) = V(X, t), \quad \Phi(X, 0) = X$$

berechnen. Es reicht daher also die Geschwindigkeit sfunktion $v(x, t)$ zu berechnen um die Bahnkurve der Flüssigkeitsteilchen ermitteln zu können.

Wie bereits erwähnt können wir jede Größe f , die die Bewegung der Flüssigkeit in der Eulerschen Darstellung beschreibt, mit der Abbildung Φ auch in die Lagrange'sche Darstellung überführen:

$$f(x, t) = f(x(X, t), t) = F(X, t),$$

¹Das Integral existiert im Sinne eines Lebesgue-Integrals. Daher könnte $\det \nabla_X \Phi(X, t)$ auf einer Nullmenge durchaus den Wert Null annehmen. Da wir die Beziehungen hier aber nur motivieren wollen, vernachlässigen wir diesen Umstand.

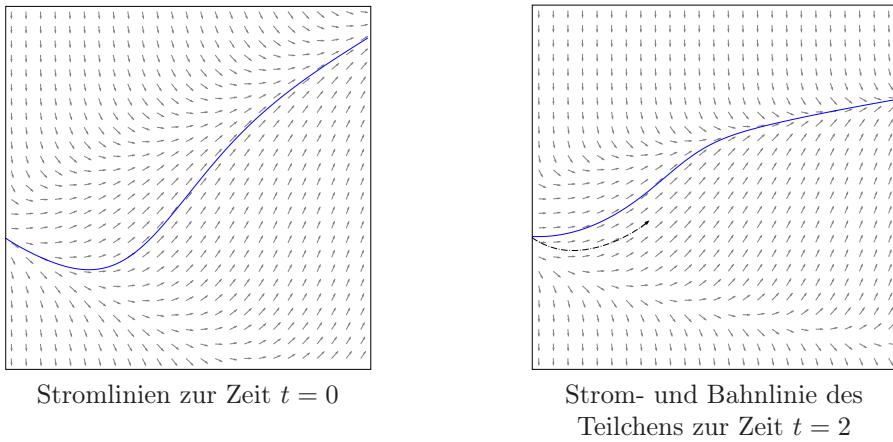


Abbildung 2.3: Unterschied Stromlinie - Bahnlinie

so dass

$$\frac{d}{dt}F(X, t) = \frac{d}{dt}f(x(X, t), t) \quad (2.5)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(X, t), t) \frac{dx_i}{dt}(X, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x(X, t), t) \quad (2.6)$$

$$= \nabla_x f(x, t) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \quad (2.7)$$

$$= (v(x, t) \cdot \nabla_x) f(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \quad (2.8)$$

ist. Den Differentialoperator

$$\frac{D}{Dt}f(x,t) := \frac{\partial}{\partial t}f(x,t) + (v(x,t) \cdot \nabla_x)f(x,t) \quad (2.9)$$

werden wir im Folgenden als *substantielle Ableitung* oder *materielle Ableitung* bezeichnen. Er setzt sich offensichtlich aus einer *lokalen zeitlichen Änderung* der Größe f an einem festen Ort x und einem *konvektiven Anteil* zusammen, der aus der Bewegung der Flüssigkeit resultiert. Ein hierauf aufbauendes, wichtiges Werkzeug im Rahmen der Herleitung der Erhaltungssätze mikropolarer Flüssigkeiten ist das *Reynoldsche Transporttheorem*, dass wir in Kapitel 2.4 einführen werden. Dieses gibt an, wie materielle Ableitungen von Integralen über zeitabhängige Gebiete zu berechnen sind. Im Einklang mit obiger Definition ist nun zum Beispiel:

$$V(X, t) = \frac{d}{dt} X(x, t) = \frac{D}{Dt} x(t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(X, t) = v(x, t). \quad (2.10)$$

2.2 Deformationsgradient und Deformationsrate

Betrachten wir einen Massenpunkt der sich in der Referenzkonfiguration Ω am Ort X befindet. Schalten wir nun die Zeit t hinzu und unterwerfen die Flüssigkeit einer Deformation Φ , so wird im Allgemeinen auch der Massenpunkt seine Position verändern. Betrachten wir nun eine Umgebung $U(X)$ von X , so gilt für alle X' in der Umgebung:

$$x(X', t) - x(X, t) = (\Phi(X', t) - \Phi(X, t)) = \nabla_X \Phi(X, t)(X' - X) + O(X' - X).$$

Die Deformation eines Linienelementes $dX = X' - X$ wird also lokal durch den sogenannten *Deformationsgradienten*

$$F(X, t) := \nabla_X \Phi(X, t) = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}(X, t) \right)_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}(X, t) \right)_{ij} \quad (2.11)$$

beschrieben. Für die *Deformationsrate* \dot{F} erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{F}(X, t) &= \frac{d}{dt} F(X, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}(X, t) \right)_{ij} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}(X, t) \right)_{ij} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial X_j} \left[\frac{dx_i}{dt}(X, t) \right] \right)_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial X_j} V_i(X, t) \right)_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial X_j} v_i(\Phi(X, t), t) \right)_{ij} \\ &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\Phi(X, t), t) \frac{\partial x_k}{\partial X_j}(X, t) \right)_{ij} = L(X, t) F(X, t) \end{aligned}$$

mit dem *räumlichen Geschwindigkeitsgradienten*

$$L = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)_{ik}. \quad (2.12)$$

Nach unseren bisherigen Überlegungen ist $J = \det F > 0$ und daher F invertierbar. Somit wird aus (2.12)

$$L = \dot{F} F^{-1}. \quad (2.13)$$

Ferner können wir L orthogonal zerlegen in

$$L = \frac{1}{2} (L + L^T) + \frac{1}{2} (L - L^T) = \text{sym } L + \text{skew } L. \quad (2.14)$$

Den symmetrischen Anteil $\text{sym } L$ werden wir im Folgenden den *rate of deformation Tensor* D und den antisymmetrischen Anteil $\text{skew } L$ *vorticity Tensor* W nennen,

$$D := \text{sym } L = \frac{1}{2} (L + L^T), \quad W := \text{skew } L = \frac{1}{2} (L - L^T). \quad (2.15)$$

2.3 Intrinsische Deformationen der Partikel

Die von der Flüssigkeit mitgeführten Partikel werden durch die Bewegung der Flüssigkeit ebenfalls ihre Position und Orientierung, gegebenenfalls sogar ihre Form verändern. Um diese *intrinsische* Deformation zu untersuchen beschreiben wir ein Partikel in der Referenzkonfiguration (in Analogie zu den Gitterstrukturen in Festkörpern) durch seinen zentralen geometrischen Punkt \mathcal{P} , an den wir Vektoren P anheften, die die Orientierung und Form der materiellen Punkte in \mathcal{P} kennzeichnen. Dieses Partikel können wir dann durch seinen Ortsvektor X in der Referenzkonfiguration und eine Menge von Vektoren

$$P_\alpha, \alpha = 1, \dots, N,$$

die seine innere Struktur charakterisieren, identifizieren. Zur Vereinfachung werden wir uns auf den Fall $N = 1$ mit $P_1 = P$ beschränken. Sowohl X , als auch P haben ihre eigenen

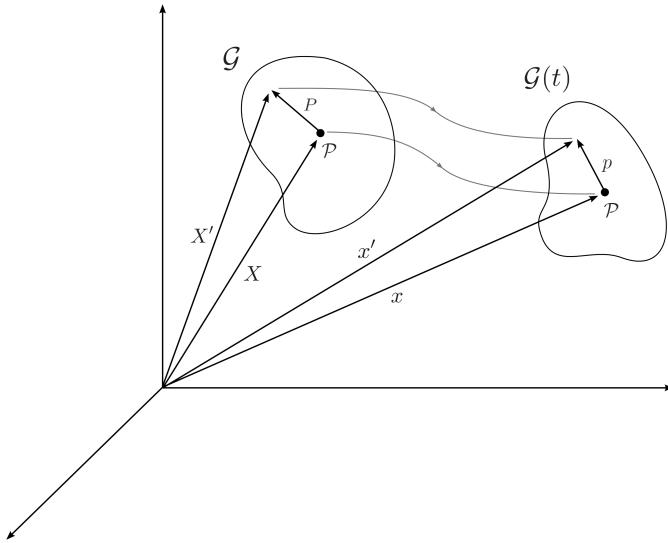


Abbildung 2.4: Die intrinsische Deformation

Bewegungen

$$X \longrightarrow x = \Phi(X, t) \quad (2.16)$$

$$P \longrightarrow p = \varphi(X, P, t). \quad (2.17)$$

Die Abbildung (2.16) wird die (*Makro-*)Bewegung, Abbildung (2.17) die *Mikrobewegung* genannt. Da im Allgemeinen die von der Flüssigkeit mitbewegten Partikel sehr klein im Vergleich zur Ausdehnung des Flüssigkeitsvolumen sind, ist es sicherlich sinnvoll, wenn wir im Folgenden von einer in P affin linearen Approximation der Funktion $\varphi(X, P, t)$ ausgehen, d. h.

$$p = \varphi(X, P, t) = \chi(X, t)P \quad (2.18)$$

setzen. In der Theorie der mikropolaren Flüssigkeiten beschränken wir uns außerdem auf starre Partikel deren Deformation ausschließlich einer Rotation des Partikels entspricht, so dass

$$p = \varphi(X, P, t) = \bar{R}(X, t)P, \quad \bar{R} \in O(3) \quad (2.19)$$

ist. \bar{R} wird der *Mikrorotationstensor* genannt und analog zum Geschwindigkeitsgradienten können wir für die *Mikrodeformationsrate* $\dot{\bar{R}}$ ableiten, dass

$$\begin{aligned} \dot{\bar{R}}(X, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j}(X, P, t) \right)_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial P_j} \left[\frac{\partial p_i}{\partial t}(X, P, t) \right] \right)_{ij} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial P_j} \dot{\varphi}_i(X, \varphi(X, P, t), t) \right)_{ij} = \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial p_k}(X, \varphi(X, P, t), t) \frac{\partial p_k}{\partial P_j}(X, P, t) \right)_{ij} \\ &= \mathcal{W}(X, P, t) \bar{R}(X, t) \end{aligned}$$

Der sogenannte *räumliche microgyration tensor*

$$\mathcal{W} = \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial p_k} \right)_{ik}. \quad (2.20)$$

erfüllt also

$$\dot{p} = \mathcal{W}p$$

und beschreibt somit die Rotationsgeschwindigkeit der Partikel in der Flüssigkeit. Nach unseren globalen Voraussetzungen ist \bar{R} invertierbar und somit \mathcal{W} durch

$$\mathcal{W} = \dot{\bar{R}}\bar{R}^{-1} = \dot{\bar{R}}\bar{R}^T \quad (2.21)$$

darstellbar. Bedenkt man, dass der Mikrorotationstensor \bar{R} orthogonal ist, so ist

$$\bar{R} \cdot \bar{R}^T = I \iff \dot{\bar{R}} \cdot \bar{R}^T + \bar{R} \cdot \dot{\bar{R}}^T = 0 \iff \mathcal{W} = -\mathcal{W}^T,$$

und somit \mathcal{W} schiefsymmetrisch. Insbesondere ist es möglich den microgyration tensor mit (1.3) und (A.6) durch das sogenannte Mikrorotationsfeld ω auszudrücken:

$$\omega = \text{axl } \mathcal{W} = \frac{1}{2}\epsilon_{kji}\mathcal{W}_{ij} \iff \mathcal{W}_{ij} = \epsilon_{mji}\omega_m. \quad (2.22)$$

2.4 Das Reynoldssche Transporttheorem

Wir betrachten nun die Bewegung eines beliebigen Teilvolumens \mathcal{G} der Referenzkonfiguration Ω der Flüssigkeit. Sei $\mathcal{G}(t)$ das von \mathcal{G} zur Zeit $t > 0$ eingenommene Volumen.

Lemma 2.4.1 (Eulersche Entwicklungsformel (vgl. [Bur10])): *Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$; $(X, t) \mapsto \Phi(X, t)$ bijektiv und $\varphi_i \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}), i = 1, \dots, n$, dann gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \det F(X, t) = \text{div } v(\Phi(X, t), t) \det F(X, t) \quad (2.23)$$

Beweis. Mit dem Levi-Civita-Symbol ist

$$\det F(X, t) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_j} \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_k}$$

und man folgert

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\det F(X, t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\epsilon_{ijk} \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_j} \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_k} \right) \\ &= \epsilon_{ijk} \left(\left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_i} \right] \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_j} \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_k} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_i} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_j} \right] \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_k} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_j} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_k} \right] \right). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_j}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\det F(X, t) \right) \\ &= \epsilon_{ijk} \left(\left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_i} \right] \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_j} \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_k} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_i} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_j} \right] \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_k} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_j} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_k} \right] \right) \\ &= \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial v_2}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial v_3}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_k} \right). \quad (2.24) \end{aligned}$$

Nach Definition des Levi-Civita-Symbols ist

$$\epsilon_{ijk} = 0 \text{ wenn mindestens zwei Indizes gleich sind,}$$

wodurch sich obige Summe deutlich vereinfacht. Betrachten wir zum Beispiel den ersten Term, so gilt:

$$\begin{aligned} & \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \\ &= \epsilon_{1jk} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \epsilon_{2jk} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \epsilon_{3jk} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_3} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \\ &= \epsilon_{123} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \frac{\partial x_3}{\partial X_3} + \epsilon_{132} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_2} + \epsilon_{213} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \\ &\quad + \epsilon_{231} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_1} + \epsilon_{312} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_3} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \frac{\partial x_3}{\partial X_2} + \epsilon_{321} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_3} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \frac{\partial x_3}{\partial X_1}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} \quad \forall i, j, k$$

heben sich für $l = 2$ nun gerade der erste und dritte, der zweite und fünfte und der vierte und sechste Term in dieser Summe gegeneinander auf. Analog sieht man, dass für $l = 3$ der Ausdruck ebenfalls verschwindet. Für den ersten Term in (2.24) bleibt also nur ein Beitrag für $l = 1$ bestehen:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k}.$$

Genauso sieht man, dass im zweiten und dritten Term von (2.24) nur Beiträge für $l = 2$ bzw. $l = 3$ erhalten bleiben, so dass

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\det F(X, t) \right) \\ &= \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \right) \\ &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \right) \\ &= \operatorname{div} v(x(X, t), t) \det F(X, t). \end{aligned}$$

■

Das auf den englischen Physiker Osborne Reynolds zurückgehende Transporttheorem beschreibt die zeitliche Veränderung des Integralwertes einer physikalischen Größe bezogen auf das sich mit der Strömung bewegende Volumen $\mathcal{G}(t)$.

Satz 2.4.1 (Reynolds' Transporttheorem (vgl. [Bur10])): *Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$; $(X, t) \mapsto \Phi(X, t)$ bijektiv und $\varphi_i \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0})$, $i = 1, \dots, n$. Ferner sei*

$$(x, t) \mapsto h(x, t)$$

eine skalare oder vektorwertige stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} h(x, t) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla_x) h(x, t) + h(x, t) \operatorname{div} v(x, t) \right\} dx$$

und insbesondere für skalarwertiges h

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} h(x, t) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(h(x, t)v(x, t)) \right\} dx.$$

Beweis. Erinnern wir uns an die Transformation

$$\Phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}(t), \quad x = \Phi(X, t),$$

aus (2.1) und gehen davon aus dass sie hinreichend glatt und invertierbar ist, so folgt mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}(t)} h(x, t) dx &= \int_{\mathcal{G}(0)} \operatorname{sgn}(\det F(X, t)) h(\Phi(X, t), t) \det F(X, t) dX \\ &= \int_{\mathcal{G}(0)} \operatorname{sgn}(\det F(X, t)) H(X, t) \det F(X, t) dX, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} h(x, t) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}} \operatorname{sgn}(\det F(X, t)) H(X, t) \det F(X, t) dX \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{G}} \operatorname{sgn}(\det F(X, t)) \frac{d}{dt} H(X, t) \det F(X, t) dX}_{:=I_1} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathcal{G}} \operatorname{sgn}(\det F(X, t)) H(X, t) \frac{d}{dt} \det F(X, t) dX}_{:=I_2}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{d}{dt} H(X, t) = \frac{D}{Dt} h(x, t)$$

ist dann

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathcal{G}} \operatorname{sgn}(\det F(X, t)) \left[\frac{d}{dt} H(X, t) \right] \det F(X, t) dX \\ &= \int_{\mathcal{G}} \operatorname{sgn}(\det F(X, t)) \left[\frac{D}{Dt} h(x, t) \right] \det F(X, t) dX \\ &= \int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla) h(x, t) \right\} dx. \end{aligned}$$

Für I_2 folgt mit (2.23)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathcal{G}} \operatorname{sgn}(\det F(X, t)) H(X, t) \left[\frac{d}{dt} \det F(X, t) \right] dX \\ &= \int_{\mathcal{G}} \operatorname{sgn}(\det F(X, t)) H(X, t) \operatorname{div} v(\Phi(X, t), t) \det F(X, t) dX \\ &= \int_{\mathcal{G}(t)} h(x, t) \operatorname{div} v(x, t) dx \end{aligned}$$

und daraus

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} h(x, t) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla) h(x, t) + h(x, t) \operatorname{div} v(x, t) \right\} dx.$$

Aus Gleichung (A.1) folgt dann die Behauptung für skalarwertiges h . ■

Der durch die Vertauschung der Zeitableitung mit dem Integral entstehende Zusatzterm $\operatorname{div}(h(x, t)v(x, t))$ lässt sich auch physikalisch interpretieren. Betrachten wir dazu ein stationäres Strömungsfeld, d. h. $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = 0$. Dann ist mit dem Gauß'schen Integralsatz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} h(x, t) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \operatorname{div}(h(x, t)v(x, t)) dx = \int_{\partial\mathcal{G}(t)} h(x, t)(v(x, t) \cdot \vec{n}) dS,$$

wobei $\partial\mathcal{G}(t)$ den Rand des Volumens $\mathcal{G}(t)$ und \vec{n} die nach außen gerichtete Einheitsnormale an $\partial\mathcal{G}(t)$ ist. Stellen wir uns \mathcal{G} nun als einen forminvarianten Quader vor, der von der Flüssigkeit mitbewegt wird und durch den wir zu jederzeit das Volumen $\mathcal{G}(t)$ beobachten. Dann bestätigt diese Gleichung unsere natürliche Intuition, dass die Änderung des Integralwertes dadurch bestimmt ist, wieviel während der Bewegung des Quaders durch die Ränder hinein- respektive herausfließt. Offensichtlich hängt die Änderungsrate dabei einerseits von der Geschwindigkeit v mit der der Quader bewegt wird, andererseits von der räumlichen Variation der Größe h über den Rand des Quaders $\mathcal{G}(t)$ ab.

2.5 Die Erhaltungssätze der Hydrodynamik

Basierend auf unseren bisherigen Erkenntnissen wollen wir in diesem Kapitel nun die Differentialgleichungen ableiten, die die dynamische Entwicklung einer mikropolaren Flüssigkeit beschreiben. Dabei gehen wir von vier physikalisch begründete Annahmen über das Verhalten von Flüssigkeiten aus:

- die *Massenerhaltung*: „Die Masse einer sich bewegenden Flüssigkeit bleibt zu allen Zeiten konstant. Es wird keine Masse erzeugt oder vernichtet.“
- die *Impulserhaltung*: „In einem abgeschlossenen System, d. h. in einem System das keine Wechselwirkung mit seiner Umgebung aufweist, bleibt der Gesamtimpuls erhalten.“
- die *Drehimpulserhaltung*: „Der Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems bleibt unverändert, egal welche Kräfte und Wechselwirkungen zwischen den Bestandteilen des Systems wirken.“

- die *Energieerhaltung*: „In einem abgeschlossenen System ist es weder möglich Energie zu erzeugen noch zu vernichten. Sie kann lediglich in verschiedene Formen umgewandelt werden.“

2.5.1 Die Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung)

Sei $\rho = \rho(x, t)$ die Dichte der Flüssigkeit am Ort x zur Zeit t . Dann ist die Masse in jedem endlichen Raumvolumen \mathcal{G} gegeben durch

$$\int_{\mathcal{G}} \rho(x, t) dx.$$

Die Massenerhaltung besagt nun gerade, dass sich die Masse der Flüssigkeit im Volumen Ω nicht ändert, wenn sich das Volumen mit der Flüssigkeit weiterbewegt, d. h.

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho(x, t) dx = 0.$$

Mit dem Transporttheorem Satz 2.4.1 erhalten wir daraus

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho(x, t) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} [\rho(x, t)v(x, t)] \right\} dx$$

und da $\mathcal{G}(t)$ beliebig wählbar ist folgt daraus die *Kontinuitätsgleichung*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} [\rho(x, t)v(x, t)] = 0.$$

Wegen (2.9) kann man diese mit (A.1) auch so formulieren

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt}(x, t) + \rho(x, t) \operatorname{div} v(x, t) = 0.} \quad (2.25)$$

Bleibt in einer Flüssigkeit die Dichte $\rho(x, t)$ entlang jeder Trajektorie konstant, d. h.

$$\frac{D}{Dt}\rho(x, t) = 0,$$

so spricht man von *inkompressiblen* Flüssigkeiten. Die Kontinuitätsgleichung liefert dann

$$\operatorname{div} v(x, t) = 0. \quad (2.26)$$

Dagegen bedeutet $\operatorname{div} v = 0$ nicht automatisch, dass die Flüssigkeit inkompressibel sein muss. Aus dem Reynold'schen Transporttheorem (2.4.1) lässt sich mit der Kontinuitätsgleichung außerdem die nützliche Formel

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho h dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \frac{D}{Dt} h dx. \quad (2.27)$$

ableiten. Dies sieht man mit (A.1) direkt aus (2.25):

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho(x, t) h(x, t) dx \\
 &= \int_{\mathcal{G}(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(x, t) h(x, t)] + (v(x, t) \cdot \nabla_x) [\rho(x, t) h(x, t)] + \rho(x, t) h(x, t) \operatorname{div} v(x, t) dx \\
 &= \int_{\mathcal{G}(t)} \rho(x, t) \frac{D}{Dt} h(x, t) + h(x, t) \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \operatorname{div} [\rho(x, t) v(x, t)]}_{=0} \right\} dx \\
 &= \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \frac{D}{Dt} h dx.
 \end{aligned}$$

2.5.2 Impulserhaltung

Aus der Kontinuumsmechanik weiß man, dass die Kräfte die auf ein kontinuierliches Medium wirken, sich prinzipiell in zwei Klassen einteilen lassen, die *externen* Kräfte und die *internen* Kräfte. Externe (oder Volumen-) Kräfte sind in der Natur beobachtete Kräfte, die eine große Reichweite haben, auf alle materiellen Teilchen im Kontinuum wirken und ihre Ursache meist in Kraftfeldern wie der Gravitation haben. Ist K eine solche Kraft und k die zugehörige Kraftdichte, so ist für ein Teilvolumen \mathcal{G} der Flüssigkeit

$$K = \int_{\mathcal{G}} \rho k dx.$$

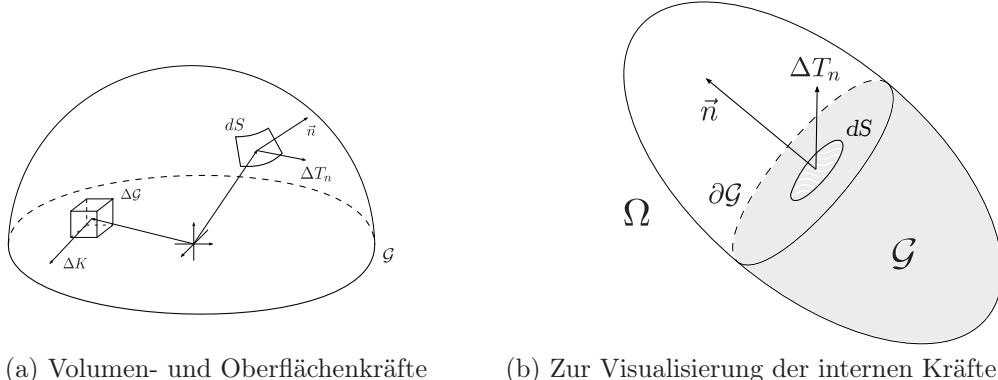


Abbildung 2.5: Der Normalenvektor von $\partial\mathcal{G}$ wird mit \vec{n} bezeichnet und hat im Allgemeinen eine von T_n abweichende Richtung. Zu (a): Die Externen Kräfte K haben eine große Reichweite, während die internen Kräfte T_n unmittelbar von dem \mathcal{G} umgebenden Kontinuum Ω hervorgerufen werden. Zu (b): Wird ein Kontinuum Ω im Gleichgewicht aufgeschnitten, so erfährt die Schnittfläche $\partial\mathcal{G}$ eine interne Kraft T_n , die vorher durch den nun abgeschnittenen Teil kompensiert wurde.

Interne (oder Kontakt-) Kräfte müssen dagegen erst durch gedachte Schnitte durch den Körper sichtbar gemacht werden. Es sind dann die in den Schnittflächen einzutragenden Kräfte. Sei also n die nach außen gerichtete Flächeneinheitsnormale an einem Punkt der

Oberfläche $\partial\mathcal{G}$, T_n die von der umgebenden Flüssigkeit auf $\partial\mathcal{G}$ ausgeübte Kraft und t_n die zugehörige Kraftdichte, so gilt für die auf \mathcal{G} ausgeübte innere Kraft

$$T_n = \int_{\partial\mathcal{G}} t_n \, dS.$$

Wird nun ein Kontinuum wie unsere Flüssigkeit durch externe Kräfte belastet, etwa durch ein Gravitationsfeld oder durch elektrische Felder, werden diese Kräfte auf jedes einzelne Teilchen des Kontinuums wirken, so dass sich diese in Bewegung setzen und damit das Kontinuum deformieren. Dabei ändern sich die Teilchenabstände und damit in Abhängigkeit der Materialeigenschaften die Stärke der Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Teilchen, d. h. letztlich die inneren Kräfte. Sind die äußeren Kräfte zeitunabhängig, so wird sich in der Regel ein neuer Gleichgewichtszustand einstellen, in dem die durch die Deformation hervorgerufenen inneren Kräfte die äußeren gerade ausgleichen.

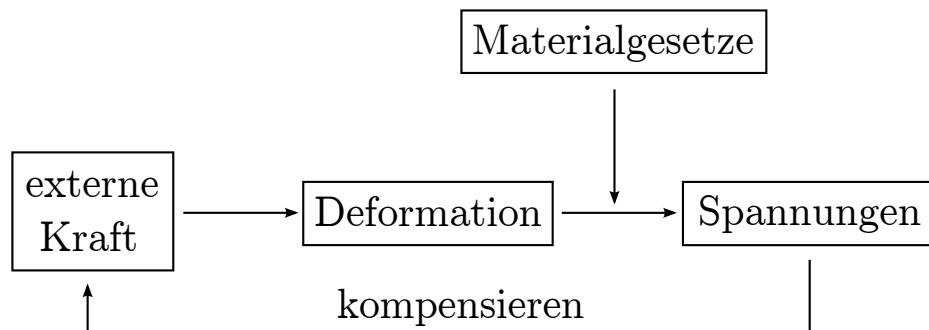


Abbildung 2.6: Im Allgemeinen verformt sich das Kontinuum durch externe Kräfte. Dadurch ändern sich, abhängig von den Materialeigenschaften, die Teilchenabstände und es entstehen Spannungen (interne Kräfte). Sobald diese die äußeren Kräfte kompensieren, ist ein neuer Gleichgewichtszustand erreicht.

Wir schließen uns bei der weiteren Analyse dem *Cauchy Prinzip* der Kontinuumsmechanik an, dass besagt, dass t_n zu jeder Zeit nur von der Position und der Orientierung des Oberflächenelementes dS abhängt, d. h.

$$t_n = t_n(x, t, n).$$

Das zweite Newton'sche Axiom fordert nun, dass die Änderung des Gesamtimpulses in Ω von den auf Ω wirkenden Kräften verursacht wird, also

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho v \, dx}_{\text{„Änderung des Gesamtimpulses“}} = \underbrace{\int_{\mathcal{G}(t)} \rho k \, dx + \int_{\partial\mathcal{G}(t)} t_n \, dS}_{\text{„Auf das Volumen wirkende Kräfte“}} . \quad (2.28)$$

Mit (2.27) ist dann

$$\int_{\mathcal{G}(t)} \rho \frac{Dv}{Dt} \, dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \rho k \, dx + \int_{\partial\mathcal{G}(t)} t_n \, dS. \quad (2.29)$$

Diese Gleichung induziert nun das folgende Theorem über die Gestalt des Spannungsvektors t_n .

Satz 2.5.1 (Cauchy-Theorem): Für festes $t \in \mathbb{R}$ sei $t_n(x, t, \vec{n})$ stetig in x . Dann hängt $t_n(x, t, \vec{n})$ linear von \vec{n} ab, d. h. es existiert ein von \vec{n} unabhängiger Tensor T 2-ter Stufe, so dass

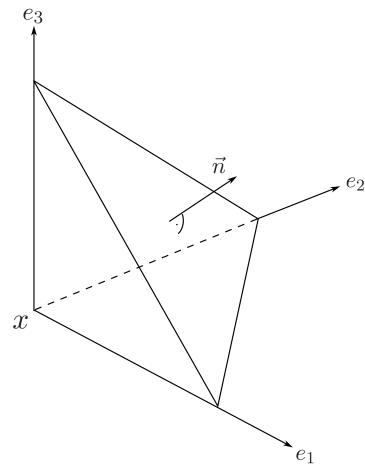
$$t_n(x, t, \vec{n}) = T(x, t) \cdot \vec{n} \quad (2.30)$$

für alle $x \in \mathcal{G}(t)$ und beliebige Einheitsvektoren \vec{n} . Der Tensor $T(x)$ wird der Cauchy-Spannungstensor genannt.

Beweis. Für festes $t \in \mathbb{R}$ setzen wir $t(x, \vec{n}) := t(x, t, \vec{n})$ und betrachten einen Tetraeder \mathcal{T} wie

in der Abbildung vollständig in $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}(t)$ enthalten ist und mit einer Ecke an einem beliebigen Punkt $x \in \partial\mathcal{G}_t$ liegt. Ferner sei \vec{n} die äußere Einheitsnormale der geneigten Fläche und A der Flächeninhalt dieser Fläche. Die anderen Flächen haben dann den Flächeninhalt An_i für $n_i = \vec{n} \cdot e_i$ ($i = 1, 2, 3$). Für den zur geneigten Fläche gehörenden Spannungsvektor schreiben wir $t(x, \vec{n})$, für die anderen entsprechend $t(x, -e_1)$, $t(x, -e_2)$ und $t(x, -e_3)$. Ist nun h die Entfernung der geneigten Fläche vom Punkt x , so hat der Tetraeder das Volumen

$$V = \frac{1}{3}Ah.$$



Wir setzen o.B.d.A. voraus, dass $\frac{D}{Dt}v$ und k auf dem Tetraeder beschränkt sind, sodass für kleine h

$$\int_{\mathcal{T}} \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - k \right) dx \cong \frac{1}{3} \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - k \right) Ah$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{A} \int_{\mathcal{T}} \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - k \right) dx \right\} = 0.$$

Wegen

$$\int_{\partial\mathcal{T}} t_n dS = \int_{\mathcal{A}} (t(x, \vec{n}) + t(x, -e_i)n_i) dS$$

können wir damit aus der Impulserhaltung (2.28) ableiten, dass der Tetraeder sich nicht verformt, also im Gleichgewicht ist, falls sich die Kräfte, die an seinen vier Seitenflächen angreifen, aufheben:

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{A} \int_{\mathcal{T}} \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - k \right) dx \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{\mathcal{A}} (t(x, \vec{n}) + t(x, -e_i)n_i) dS.$$

Dabei haben wir die Integration über $\partial\mathcal{T}$ in die Integration über die vier Oberflächen des Tetraeders zerlegt. Das \mathcal{A} im obigen Integral entspricht also der geneigten Ebene des

Tetraeders. Nach Voraussetzung ist $t(x, \vec{n})$ in x für beliebige \vec{n} stetig, so dass aus obiger Gleichung beim Grenzübergang $A \rightarrow 0$ folgt, dass

$$t(x, \vec{n}) = -t(x, -e_i)n_i. \quad (2.31)$$

Setzen wir in (2.31) statt $\vec{n}, -\vec{n}$ ein so folgt

$$t(x, e_i) = -t(x, -e_i)$$

und somit

$$t(x, \vec{n}) = t(x, e_i)n_i. \quad (2.32)$$

Da die Basis $\{e_i\}$ zwar fest, aber vollkommen beliebig und unabhängig von \vec{n} gewählt wurde, zeigt (2.32) das $t(x, \vec{n})$ linear von den Komponenten n_i des Einheitsnormalenvektors \vec{n} abhängt. Insbesondere definieren wir für festes t :

$$T(x, t) = (T_{ij})_{ij} \quad \text{durch} \quad T_{ij} = t_i(x, e_j).$$

■

Setzen wir voraus, dass T mindestens einmal stetig differenzierbar ist, folgt aus (2.29) mit diesem Prinzip und dem Gauß'schen Satz

$$\int_{\mathcal{G}(t)} \rho \frac{Dv}{Dt} dx = \int_{\mathcal{G}(t)} (\rho k + \operatorname{Div} T) dS$$

wobei

$$\operatorname{Div} T = \operatorname{Div} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{div}(T_{11}, T_{12}, T_{13}) \\ \operatorname{div}(T_{21}, T_{22}, T_{23}) \\ \operatorname{div}(T_{31}, T_{32}, T_{33}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und da das Integrationsgebiet beliebig wählbar ist

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho k + \operatorname{Div} T. \quad (2.33)$$

2.5.3 Drehimpulserhaltung

In der klassischen Newton'schen Mechanik für Punktmassen ist die Drehimpulserhaltung ein direktes Korollar der Impulserhaltung. In der Kontinuumsmechanik dagegen stellt sie eine von der Impulserhaltung vollkommen unabhängige Hypothese dar, die durch die Annahme impliziert wird, dass zumindest für Punktmassen die Änderung des Drehimpulses dem wirkenden Drehmoment entspricht. Wenn wir uns dieser Hypothese anschließen, dann können wir postulieren:

Axiom 1 (Drehimpulserhaltung):

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho(x \times v) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \rho(x \times k) dx + \int_{\partial\mathcal{G}(t)} (x \times t_n) dS \quad (2.34)$$

Diese Vermutung trifft zu solange man davon ausgeht, dass alle Drehmomente aus makroskopischen Kräften resultieren. Für polare Flüssigkeiten allerdings ist dem nicht so, denn diese sind dazu fähig, innere Spannungsdrehmomente zu übertragen. Bevor wir näher auf dieses Problem eingehen, zeigen wir allerdings noch, dass unter der konstitutiven Voraussetzung (2.34) gilt, der Cauchy Spannungstensor symmetrisch ist.

Satz 2.5.2: Für ein kontinuierliches Medium, dass die Kontinuitätsgleichung (2.25) und die Impulserhaltung (2.33) erfüllt, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Der Cauchy-Spannungstensor $T(x, t)$ ist symmetrisch.
- (b) Gleichung (2.34) ist erfüllt.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass (b) gilt und zeigen (a). Aus (2.34) folgt mit (2.27)

$$\int_{\mathcal{G}(t)} \rho(x \times k) dx + \int_{\partial\mathcal{G}(t)} (x \times t_n) dS = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho(x \times v) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \frac{D}{Dt} (x \times v) dx.$$

Nun gilt (vgl. (A.2) im Anhang)

$$\frac{D}{Dt} (x \times v) = x \times \left(\frac{Dv}{Dt} \right),$$

sodass

$$\int_{\mathcal{G}(t)} \rho(x \times k) dx + \int_{\partial\mathcal{G}(t)} (x \times t_n) dS = \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \left(x \times \frac{D}{Dt} v \right) dx.$$

Wegen

$$t_n = T \cdot \vec{n} = (T_{ij} n_j)_i$$

und

$$(x \times t_n)_j = \epsilon_{jlk} x_l (T_{kj} n_j)_k = (\epsilon_{jlk} x_l T_{ki})_i n_i = (x \times T)_{ji} n_i$$

folgt mit dem Satz von Gauß

$$\int_{\partial\mathcal{G}(t)} (x \times t_n) dS = \int_{\mathcal{G}(t)} \operatorname{Div} (x \times T) dx.$$

Auch gilt nach Definition der Divergenz eines Tensors:

$$\begin{aligned} [\operatorname{Div} (x \times T)]_k &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon_{kli} x_l T_{ij}) \\ &= \epsilon_{kli} \delta_{lj} T_{ij} + \epsilon_{kli} x_l \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \\ &= 2 \left[\operatorname{axl} (\operatorname{skew} T) \right]_k + (x \times \operatorname{Div} T)_k \end{aligned}$$

und daher

$$\int_{\partial\mathcal{G}(t)} (x \times t_n) dS = \int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ 2 \operatorname{axl} (\operatorname{skew} T) + x \times \operatorname{Div} T \right\} dx.$$

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so ist

$$\int_{\mathcal{G}(t)} x \times \left(\rho \frac{Dv}{Dt} - \rho k - \operatorname{Div} T \right) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} 2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T) dx.$$

Nach (2.33) ist die linke Seite null und somit verschwindet auch die rechte Seite für jedes beliebige Volumen $\mathcal{G}(t)$, so dass

$$\operatorname{axl}(\operatorname{skew} T) = 0.$$

Die Komponenten von $2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T)$ sind $T_{23} - T_{32}$, $T_{31} - T_{13}$, $T_{12} - T_{21}$ und somit impliziert die vorherige Überlegung, dass

$$T_{ij} = T_{ji},$$

T somit also symmetrisch ist. Der Beweis, dass (a), (b) impliziert folgt nun direkt, in dem man den obigen Beweis von hinten nach vorne durchgeht. ■

Für polare Flüssigkeiten müssen wir die in der Flüssigkeit mitbewegten Teilchen berücksichtigen, so dass wir zusätzlich zur externen Kraftdichte k eine auf die Teilchen wirkende externe Kraftdichte g und zur Normalspannung t_n eine zusätzliche, die *Drehmomentdichte* der Teilchen symbolisierende, Spannung m_n einführen. Ferner müssen wir aufgrund der Rotation der Teilchen in der Flüssigkeit einen inneren Drehimpuls ρl einführen, so dass die Drehimpulserhaltung für polare Flüssigkeiten die Form

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho(l + x \times v) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \rho(g + x \times k) dx + \int_{\partial\mathcal{G}(t)} (m_n + x \times t_n) dS \quad (2.35)$$

annimmt und nach Satz 2.5.2 der Cauchy-Spannungstensor T somit nicht notwendigerweise symmetrisch ist. Das Cauchy Prinzip (2.5.1) lässt sich auch auf die Spannung m_n übertragen (vgl. z. B. [Nos04]), sodass wir auch m_n in der Form

$$m_n = M \cdot \vec{n} \quad (2.36)$$

schreiben können. Dabei ist M ebenfalls ein Tensor 2-ter Stufe, der sogenannte *Momentenspannungstensor*. Die Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes führt dann zu

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho(l + x \times v) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \{\rho g + \rho x \times k + \operatorname{Div} M + x \times \operatorname{Div} T + 2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T)\} dx$$

und wir erhalten mit (2.27)

$$\rho \frac{D}{Dt}(l + x \times v) = \rho g + \rho x \times k + \operatorname{Div} M + x \times \operatorname{Div} T + 2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T). \quad (2.37)$$

Bilden wir das Vektorprodukt der Cauchy Gleichung (2.33) mit x folgt aus (A.2)

$$\rho \frac{D}{Dt}(x \times v) = x \times \left(\rho \frac{Dv}{Dt} \right) = x \times (\rho k + \operatorname{Div} T) = \rho x \times k + x \times \operatorname{Div} T. \quad (2.38)$$

und subtrahieren diese von obiger Gleichung erhalten wir

$$\rho \frac{Dl}{Dt} = \rho g + \operatorname{Div} M + 2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T). \quad (2.39)$$

Bemerkung 1: Wegen

$$\operatorname{Div}(x \times T) = x \times \operatorname{Div} T + 2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T)$$

folgt aus (2.38) für den äußeren Drehimpuls

$$\rho \frac{D}{Dt}(x \times v) = \rho x \times k + \operatorname{Div}(x \times T) - 2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T)$$

und für den Gesamt-Drehimpulserhaltung (2.37):

$$\rho \frac{D}{Dt}(l + x \times v) = \rho x \times k + \rho g + \operatorname{Div}(x \times T + M). \quad (2.40)$$

Anschaulich besagen die Gleichungen nichts anderes als dass weder der innere noch der äußere Drehimpuls erhalten bleibt, sondern nur der Gesamt-Drehimpuls. Tatsächlich wird der Verlust des äußeren Drehimpulses in (2.38) in einen Beitrag zum inneren Drehimpuls (2.39) umgewandelt.

Wir gehen im Weiteren von der Annahme aus, dass wir die innere Drehimpulsdichte l , die von den in der Flüssigkeit mitbewegten Teilchen erzeugt wird, als Vektor mit Komponenten

$$l_i \ (i = 1, 2, 3) \text{ mit } l_i = I_{ik}\omega_k = I\delta_{ik}\omega_k^2$$

auffassen können, wobei I ein Skalar, der sogenannte *Mikro-Trägheits-Koeffizient* ist und ω das *Microrotations-Feld* aus (2.22) ist. Somit reduziert sich Gleichung (2.39) zu

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \rho g + \operatorname{Div} M + 2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T). \quad (2.41)$$

2.5.4 Energieerhaltung

In der klassischen Hydrodynamik besagt der erste Hauptsatz der Thermodynamik, dass die Zunahme der Gesamtenergie (d.h. kinetischer und innerer Energie) eines Körpers die Summe der am Körper verrichteten Arbeit und der übertragenen Wärme ist. Nennen wir die *Wärmestromdichte* q und die innere Energiedichte E , so ist

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \underbrace{\frac{1}{2} \rho v^2}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{\rho E}_{\text{innere Energie}} dx \\ &= \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \langle k, v \rangle dx + \int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle t_n, v \rangle dS - \int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle q, \vec{n} \rangle dS. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Das erste und zweite Integral auf der rechten Seite entsprechen der Änderung der am Körper von den externen Kräften bzw. der Spannungen verrichteten Arbeit, während das

²Die Eigenschaft $I_{ik} = I\delta_{ik}$ wird manchmal als Isotropie bezeichnet, hat aber mit der Isotropie des Festkörpers nichts zu tun.

dritte Integral den Wärmestrom in den Körper representiert. Mit dem Integralsatz von Gauß und (2.33) gilt nun:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + E \right) dx \\
&= \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \langle k, v \rangle dx + \int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle v, T \cdot \vec{n} \rangle dS - \int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle q, \vec{n} \rangle dS \\
&= \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \langle k, v \rangle dx + \int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle T^T \cdot v, \vec{n} \rangle dS - \int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle q, \vec{n} \rangle dS \\
&= \int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ \rho \langle k, v \rangle + \operatorname{div} (T^T \cdot v) - \operatorname{div} q \right\} dx. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Aus (2.27) folgt mit der Impulserhaltung (2.33)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + E \right) dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \left(v \frac{Dv}{Dt} + \frac{DE}{Dt} \right) dx \\
&= \int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ \langle v, (\rho k + \operatorname{Div} T) \rangle + \rho \frac{DE}{Dt} \right\} dx,
\end{aligned}$$

so dass man durch Einsetzen in (2.43) und Umstellen

$$\int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ \langle v, (\operatorname{Div} T) \rangle + \rho \frac{DE}{Dt} - \operatorname{div} (T^T \cdot v) + \operatorname{div} q \right\} dx = 0 \tag{2.44}$$

erhält. Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle v, \operatorname{Div} T \rangle - \operatorname{div} (T^T \cdot v) &= v_i \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji} v_i) \\
&= v_i \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} - \left(\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) v_i - T_{ji} \frac{v_i}{x_j} \\
&= -\langle T, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \tag{2.45}
\end{aligned}$$

wobei

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \longrightarrow \mathbb{R}; (A, B) \longmapsto \operatorname{tr}(A \cdot B^T) = A_{ij} B_{ij},$$

das Tensorskalarprodukt ist. Insgesamt ist also

$$\int_{\mathcal{G}(t)} \left(\rho \frac{DE}{Dt} + \operatorname{div} q - \langle T, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \right) dx = 0$$

und daher

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\operatorname{div} q + \langle T, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}.$$

Gehen wir für die Wärmeleitung der Einfachheit halber von Fourier's Gesetz aus

$$q = -c \nabla \theta, \quad (c \geq 0, \theta : \text{Temperatur}) \tag{2.46}$$

nimmt die Energieerhaltung die Form

$$\rho \frac{DE}{Dt} = c \operatorname{div} (\nabla \theta) + \langle T, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \quad (2.47)$$

an. Für *polare* Flüssigkeiten müssen wir wegen der Rotation der Teilchen in der Flüssigkeit weitere Terme berücksichtigen, so dass der erste Hauptsatz der Thermodynamik nun die Form

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \underbrace{\rho \frac{v^2}{2}}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{\rho I \frac{\omega^2}{2}}_{\text{Rotationsenergie}} + \underbrace{\rho E}_{\text{innere Energie}} dx \\ &= \int_{\mathcal{G}(t)} \rho (\langle k, v \rangle + \langle \omega, v \rangle) dx + \int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle t_n, v \rangle dS \\ & \quad + \int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle m_n, \omega \rangle dS - \int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle q, n \rangle dS. \end{aligned} \quad (2.48)$$

annimmt. Es treten zusätzliche Beiträge, verursacht durch das äußere Drehmoment und den Momentenspannungstensor auf, wobei wir voraussetzen, das beide ausschließlich auf das Mikrorotationsfeld ω wirken. Mit dem Integralsatz von Gauß erhalten wir

$$\int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle m_n, \omega \rangle dx = \int_{\partial \mathcal{G}(t)} \langle M^T \cdot \omega, \vec{n} \rangle dS = \int_{\mathcal{G}(t)} \operatorname{div} (M^T \cdot \omega) dx$$

und mit (2.27) bzw. (2.34) folgt aus (2.48):

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho I \frac{\omega^2}{2} dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \rho I \omega \frac{D\omega}{Dt} dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ \langle \omega, \rho g + \operatorname{Div} M + 2 \operatorname{axl} (\operatorname{skew} T) \rangle \right\} dx.$$

Analog zu (2.43) und (2.45) erhält man daraus:

$$\int_{\mathcal{G}(t)} \left\{ \rho \frac{DE}{Dt} + \operatorname{div} q - \langle T, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} - \langle M, \mathfrak{D}\omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + 2 \langle \omega, \operatorname{axl} (\operatorname{skew} T) \rangle \right\} dx = 0$$

und somit

$$\rho \frac{DE}{Dt} = - \operatorname{div} q + \langle T, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + \langle M, D\omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} - 2 \langle \omega, \operatorname{axl} (\operatorname{skew} T) \rangle.$$

Auch der Cauchy-Spannungstensor lässt sich in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil zerlegen und nach (A.7) verschwindet das Skalarprodukt eines schiefsymmetrischen Tensors mit einem symmetrischen Tensor, sodass

$$\begin{aligned} \rho \frac{DE}{Dt} &= - \operatorname{div} q + \langle \operatorname{sym} T, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + \langle \operatorname{skew} T, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \\ & \quad + \langle M, \mathfrak{D}\omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} - 2 \langle \omega, \operatorname{axl} (\operatorname{skew} T) \rangle. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Kapitel 3

Die Charakteristik von Materialien - konstitutive Materialgesetze

Im letzten Kapitel haben wir für polare Flüssigkeiten das folgende System von Erhaltungsgleichungen abgeleitet:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \operatorname{div} v \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho k + \operatorname{Div} T \\ \rho I \frac{D\omega}{Dt} &= \rho g + \operatorname{Div} M + 2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T) \\ \rho \frac{DE}{Dt} &= -\operatorname{div} q + \langle \operatorname{sym} T, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + \langle \operatorname{skew} T, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \\ &\quad + \langle M, \mathfrak{D}\omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} - 2 \langle \omega, \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T) \rangle \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dieses Gleichungssystem enthält insgesamt 28 unbekannte Größen (die Energie, die drei Komponenten der Geschwindigkeit v , drei Komponenten der Wärmestromdichte q , drei aus dem Mikrorotationsfeld ω , 9 Komponenten des Spannungstensors T und 9 Komponenten der Kopplungsspannung M). Es umfasst aber nur acht Gleichungen, so dass weitere Bedingungen nötig sind, um die Bewegungsgleichungen eindeutig lösen zu können. Diese Bedingungen resultieren aus den sogenannten Materialgesetzen, die die (makroskopische) Natur, also die Eigenschaften der Flüssigkeit genauer beschreiben. Für eine physikalisch sinnvolle Formulierung dieser Gesetze müssen folgende grundlegende Forderungen erfüllt sein:

1. Prinzip des Determinismus:

Der momentane Spannungszustand $T(x, t)$ in einem von der Flüssigkeit eingenommenen Punkt x ist durch die vergangene Bewegungsgeschichte der Flüssigkeit eindeutig bestimmt.

2. Prinzip der lokalen Wirkung:

Dieses Prinzip besagt, dass z.B. die Spannung an einem herausgegriffenen materiellen Teilchen X nur von der Bewegung aller in direkter Nachbarschaft befindlichen Teilchen abhängt. Ein Material, welches diesem Prinzip genügt, heißt *einfaches Material*.

3. Prinzip der materiellen Objektivität:

Dieses Prinzip fordert, daß die in einer Materialgleichung formulierten Eigenschaften eines Materials unabhängig vom gewählten Bezugssystem sind. Folglich müssen sie für einen ruhenden Beobachter und einen sich gegenüber diesem bewegenden Beobachter für ein und denselben Prozeß die gleiche Gestalt haben. Eine *objektive* Größe muss sich also beim Wechsel des Bezugssystems so transformieren, dass sich die durch die Größe beschriebene Eigenschaft des Körpers nicht ändert.

3.1 Zustandsgleichungen für Stokessche Flüssigkeiten

Bei der Untersuchung klassischer Stokesscher Flüssigkeiten gehen wir von der Annahme aus, dass die Spannung in Flüssigkeiten nicht von der Verformung der Volumenelemente, sondern von ihrer Geschwindigkeit, genauer gesagt ihrer Geschwindigkeitsdifferenz abhängt. Die Unterschiede im Geschwindigkeitsfeld verursachen einen Impulsaustausch in der Flüssigkeit, der so gerichtet ist, dass er den Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes zu verringern versucht. Nach dem Prinzip der lokalen Wirkung wird der Spannungszustand der Flüssigkeit am Ort x nur von dem Geschwindigkeitsfeld v in einer Umgebung $\mathcal{U}(x)$ von x abhängen. Da wir von einem hinreichend glatten Geschwindigkeitsfeld v ausgehen, ist

$$\begin{aligned} v(x', t) - v(x, t) &= \mathfrak{D}_x v(x, t)(x' - x) + \mathcal{O}([x' - x]^2) \\ &= L(x' - x) + \mathcal{O}([x' - x]^2), \quad \forall x' \in \mathcal{U}(x). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun am Ort $x(X, t)$ zu einem festen Zeitpunkt t das materielle Linienelement

$$\psi(t) = x'(X', t) - x(X, t),$$

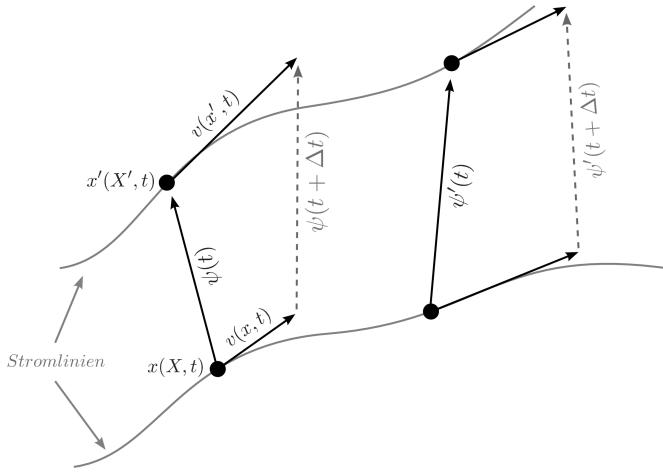


Abbildung 3.1: Deformation der Linienelemente $\psi(t)$

so werden die Geschwindigkeiten

$$v(x, t) \quad \text{bzw.} \quad v(x', t)$$

im Allgemeinen zu einer Dehnung dieses Liníenelementes führen, genauer:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \|\psi(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} \|x'(X', t) - x(X, t)\|^2 \\ &= \langle x'(t) - x(t), \dot{x}'(t) - \dot{x}(t) \rangle + \langle \dot{x}'(t) - \dot{x}(t), x'(t) - x(t) \rangle \\ &= \langle \psi(t), L\psi(t) + \mathcal{O}(\psi(t)^2) \rangle + \langle L\psi(t) + \mathcal{O}(\psi(t)^2), \psi(t) \rangle \\ &= \langle L^T\psi(t), \psi(t) \rangle + \langle L\psi(t), \psi(t) \rangle + \dots \\ &= 2 \langle (\text{sym } L) \psi(t), \psi(t) \rangle + \dots\end{aligned}$$

Die Verzerrung der Liníenelemente in der Flüssigkeit wird also im wesentlichen durch den Geschwindigkeitsgradienten L bestimmt.¹ Wir gehen daher im Folgenden davon aus, dass für den Cauchy Spannungstensor (cauchy stress tensor) T gilt:

$$T(x, t) = G(\mathfrak{D}_x v(x, t); x, t) = G(L; x, t) = G(L). \quad (3.2)$$

Wir werden im Folgenden den Begriff der *isotropen Tensorfunktion* einführen und zeigen, dass der Cauchy-Spannungstensor eine vom *rate of deformation Tensor* D abhängige, isotrope Tensorfunktion sein muss. Basierend auf dieser Erkenntnis werden wir anschließend den Satz von Rivlin-Erickson beweisen, der uns eine spezielle Darstellung des Spannungstensors ermöglicht und uns der Lösung von (3.1) für Stokessche Flüssigkeiten erheblich näher bringen wird.

3.1.1 Invarianz unter Galilei-Transformationen

Das Galileische Relativitätsprinzip besagt:

„In jedem Koordinatensystem, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig, gleichförmig bewegen, haben die Naturgesetze (Bewegungsgleichungen) dieselbe Form, d. h. sie sind **forminvariant**. Solche Koordinatensysteme heißen Inertialsysteme.“

Zur Illustration dieser Aussage gehen wir von einer beliebigen Bewegungsgleichung

$$K = m\ddot{x}$$

im Inertialsystem \mathcal{I} aus. Hierbei ist m die Masse eines Körpers, der durch äußere Kräfte K mit \ddot{x} beschleunigt wird. Nun fordert das Relativitätsprinzip, dass in jedem anderen Inertialsystem \mathcal{I}^* die Bewegungsgleichung dieselbe Form in den transformierten Größen

$$K^* = m\ddot{x}^*$$

hat. Welche Transformationen sind nun erlaubt, um von einem Inertialsystem in ein anderes zu gelangen? Dazu betrachten wir ein Koordinatensystem \mathcal{K}^* , dessen Ursprung bei $o(t) = o_i e_i$ in \mathcal{I} liegt und dessen Koordinatenachsen mit denen von \mathcal{I} übereinstimmen. Ein Ortsvektor x^* in \mathcal{K} ist dann (bzgl. \mathcal{I}) gegeben durch

$$x^*(t) = x(t) + o(t).$$

¹Genauer gesagt können wir hier sogar die Vermutung aufstellen, dass sie vorrangig durch seinen symmetrischen Anteil, den rate of deformation tensor $D = \text{sym } L$ bestimmt wird. Im Abschnitt 3.1.2 werden wir dieses Resultat basierend auf anderen Annahmen über die Beschaffenheit des Spannungstensors bekräftigen.

Gehen wir von der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = 0$$

aus, so gilt

$$0 = m\ddot{x}^* = m(\ddot{x} + \ddot{o}(t)) = m\ddot{o}(t).$$

Damit \mathcal{K} ein weiteres Inertialsystem ist, muss somit $\ddot{o}(t) = 0$ und daher

$$o(t) = v \cdot t + c, \text{ für } v, c \in \mathbb{R}^3 \quad (3.3)$$

sein. Demnach darf sich \mathcal{K} gegenüber \mathcal{I} mit der Geschwindigkeit v bewegen und um einen konstanten Vektor c verschoben sein. Neben der Änderung des Ursprungs können wir auch die Koordinatenachsen von \mathcal{K} gegenüber denen von \mathcal{I} verdrehen. Ein Ortsvektor $x(t)$ in \mathcal{K} ist dann (bzgl. \mathcal{I}) gegeben durch

$$x^*(t) = Q(t)x(t) + o(t), \text{ für } Q(t) \in SO(3).$$

Für diese Transformation gilt dann

$$\begin{aligned} 0 = m\ddot{x}^*(t) &= m \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{Q}(t)x(t) + Q(t)\dot{x}(t) + \ddot{o}(t) \right) \\ &= m \cdot \left(\ddot{Q}(t)x(t) + 2\dot{Q}\dot{x}(t) + \ddot{o}(t) \right). \end{aligned}$$

Da dies für jedes $Q \in SO(3)$ gilt und die Bewegungsgleichung in beiden Inertialsystemen gleich sein soll, muss

$$\ddot{Q}(t) = \dot{Q}(t) = \ddot{o}(t) = 0$$

sein und somit $Q(t) = Q$, $Q \in SO(3)$ sowie $o(t) = v \cdot t + c$, $v, c \in \mathbb{R}^3$ sein. Zusammengekommen haben wir damit gezeigt, dass die Transformationen von einem Inertialsystem in ein anderes von der Form

$$x^*(t) = Qx(t) + vt + c$$

für konstantes $Q \in SO(3)$ sein müssen.

Satz 3.1.1: Die (speziellen) Galileitransformationen

$$x^*(t) = Q \cdot x(t) + vt + c, \text{ für } SQ \in O(3), v, c \in \mathbb{R}^3$$

lassen die Newton'schen Bewegungsgleichungen invariant und überführen somit Inertialsysteme in Inertialsysteme.

Wir wollen nun unter Anwendung des Galileischen Relativitätsprinzip die Beziehung zwischen den kinematischen Variablen (insbesondere der Spannung und damit der wirkenden Kräfte), die von einem Beobachter O und einem, durch eine überlagerte Galileitransformation gegenüber O verschobenen, Beobachter O^* registriert werden, untersuchen. Ausgehend von

$$x^* = \Phi^*(X, t) = Q\Phi(X, t) + c(t), \text{ mit } c(t) = v \cdot t + c, \quad (3.4)$$

für $Q \in SO(3)$, transformieren sich der Deformationsgradient F und der räumliche Geschwindigkeitsgradient L gemäß

$$F^* = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial X_j} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right)_{ij} = Q \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \right)_{ij} = QF \quad (3.5)$$

bzw.

$$L^* = \dot{F}^* F^{*-1} = (\dot{Q}F)(QF)^{-1} = Q \dot{F} F^{-1} Q^T = Q L Q^T. \quad (3.6)$$

Ferner folgt aus (3.4) für die Dichte ρ und die Oberflächennormale n

$$\rho^* = \rho \quad (3.7)$$

$$n^* = Qn. \quad (3.8)$$

Der nächste Schritt ist nun die Bestimmung des Transformationsverhaltens des Spannungstensors. Dabei gehen wir von der Annahme aus, dass der Betrag des Spannungsvektors t durch eine Galileitransformation unverändert bleibt und dass t^* bzgl. n^* dieselbe Orientierung wie t bzgl. n hat. Basierend auf diesen Erwartungen, können wir ableiten, dass

$$t^* = Qt. \quad (3.9)$$

ist, denn in diesem Fall ist

$$\|t^*\|^2 = \langle t^*, t^* \rangle = \langle Qt, Qt \rangle = \langle t, Q^T Qt \rangle = \langle t, t \rangle = \|t\|^2 \implies \|t^*\| = \|t\|$$

und

$$\langle t^*, n^* \rangle = \langle Qt, Qn \rangle = \langle t, Q^T Qn \rangle = \langle t, n \rangle.$$

Nach (2.30), ist

$$t = t(x, t; n) = T(x, t) \cdot n$$

und damit auch

$$t^* = t^*(x^*, t; n^*) = T^*(x^*, t) \cdot n^*.$$

Erinnern wir uns an die Transformationseigenschaften der äußeren Einheitsnormalen n (3.8) folgt daraus

$$t^* = T^*(x^*, t) \cdot Qn$$

und wegen (3.9)

$$QT(x, t) \cdot n = T^*(x^*, t) \cdot Qn \iff (QT - T^*Q) \cdot n = 0.$$

Da diese Gleichung für beliebiges n gilt, und der Ausdruck in der Klammer von n unabhängig ist, können wir folgern, dass

$$0 = T^*Q - QT = T^*QQ^T - QTQ^T = T^* - QTQ^T$$

ist und somit

$$G^*(L^*) = T^* = QTQ^T = QG(L)Q^T \quad (3.10)$$

für jedes L^* und konstante $Q \in SO(3)$ gilt. Mit Berücksichtigung von (3.6), erwarten wir somit, dass der Spannungstensor

$$G^*(QLQ^T) = G^*(L^*) = QG(L)Q^T \quad (3.11)$$

erfüllen muß. Nach Satz 3.1.1 müssen Bewegungsgleichungen unter Galileitransformationen forminvariant und daher die beiden Funktionen G und G^* dieselben sein, so dass wir

$$G(QLQ^T) = QG(L)Q^T, \quad (3.12)$$

folgern können.

Definition 3.1.1: Eine Tensorfunktion $G : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ heißt isotrop, falls sie die Gleichung

$$G(QXQ^T) = QG(X)Q^T \quad \forall Q \in SO(3)$$

erfüllt.

Das Galileische Relativitätsprinzip alleine fordert also schon, dass der Cauchy-Spannungstensor der Flüssigkeit eine isotrope Tensorfunktion von L sein muss. Wir werden später sehen, was das für die Funktion G und damit den Spannungstensor T bedeutet.

3.1.2 Prinzip der materiellen Objektivität

Die Forderung nach materieller Objektivität erweitert nun das Galilei'sche Relativitätsprinzip und postuliert, dass eine Materialgleichung invariant gegenüber einem beliebigen Wechsel des Bezugssystems, also des Beobachters, ist und dass sie keinerlei Informationen über die Bewegung dieses Bezugssystems relativ zu einem zugrundeliegenden Inertialsystem enthält. Die zulässigen Transformationen zwischen den Bezugssystemen zweier verschiedener Beobachter O und O^* sind dann von der Form

$$x^* = \Phi^*(X, t) = Q(t)\Phi(X, t) + c(t) = Q(t)x + c(t), \quad Q \in SO(3), \quad (3.13)$$

d. h. statt $Q = const.$ ist jetzt $Q = Q(t)$ erlaubt. Unter diesen Umständen transformieren sich der Deformationsgradient F und der räumliche Geschwindigkeitsgradient L gemäß

$$F^* = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial X_j} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right)_{ij} = Q \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \right)_{ij} = QF \quad (3.14)$$

bzw.

$$L^* = \dot{F}^* F^{*-1} = (\dot{Q}F)(QF)^{-1} = \dot{Q}Q^T + Q\dot{F}F^{-1}Q^T = \dot{Q}Q^T + QLQ^T. \quad (3.15)$$

Ferner folgt aus (3.13) für die Dichte ρ und die Oberflächennormale \vec{n}

$$\rho^* = \rho \quad (3.16)$$

$$\vec{n}^* = Q\vec{n}. \quad (3.17)$$

Ein Skalar, Vektor oder Tensor 2-ter Stufe, der sich unter einem Beobachterwechsel gemäß (3.14), (3.16) bzw. (3.17) transformiert, wird *objektiv* genannt. Wie im vorherigen Abschnitt gehen wir auch hier davon aus, dass der Spannungstensor

$$t^* = Qt$$

erfüllt und können ableiten, dass

$$G^*(L^*) = T^* = QTQ^T = QG(L)Q^T \quad (3.18)$$

für jedes L^* und $Q \in SO(3)$ gilt. Wählen wir nun $Q(t) = I$ so muss

$$G^*(L) = G^*(L^*) = G(L)$$

und der Spannungstensor somit *forminvariant* (d. h. es gilt $G = G^*$) gegebenüber einem Wechsel des Bezugssystems sein. Dann folgt aus (3.18) mit (3.15)

$$QG(L)Q^T = QTQ^T = T^* = G(L^*) = G(\dot{Q}Q^T + QLQ^T). \quad (3.19)$$

Daraus können wir das folgende Lemma über die Gestalt des Spannungstensors ableiten.

Lemma 3.1.1: *Unter der Voraussetzung, dass sich die Flüssigkeit objektiv verhält und der Spannungsvektor t die Transformationseigenschaft*

$$t^* = Qt$$

erfüllt, hängt der Spannungstensor $T(x, t) = G(L)$ nur vom symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten, dem rate of Deformation Tensor D ab, d. h.

$$G(L) = G(D) = G\left(\frac{1}{2}(L + L^T)\right). \quad (3.20)$$

Beweis. Wir wählen eine *schiefsymmetrische* Abbildung $A \in \mathfrak{so}(3)$ (d. h. $A + A^T = 0$) und setzen

$$Q(t) = \exp(-tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n A^n \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$AA^T = -A^T A^T = -A^T(-A) = A^T A$$

kommutieren A und A^T und aus den Potenzgesetzen für die Tensorexponentialfunktion folgt damit:

$$Q(t)Q(t)^T = \exp(-tA) \exp(-tA^T) = \exp(-t(A + A^T)) = \exp(0) = I.$$

Ferner folgt aus

$$\det(Q(t))^2 = \exp(-t \operatorname{tr}(0)) = \exp(0) = 1 \quad \text{und} \quad \det(Q(0)) = \det(I) = 1,$$

dass

$$\det(Q(t)) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ist und somit $Q(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Drehung darstellt. Insbesondere sind die Koeffizienten in $Q(t)$ für $A^n = (a_{ij}^{(n)}(t))$ Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_{ij}^{(n)}(t) t^n,$$

die wegen

$$|t^n a_{ij}^{(n)}| \leq \|t^n A^n\| \leq \|tA\|^n$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \|tA\|^n = e^{\|tA\|}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert. Nach dem Satz über die Differenzierbarkeit von Potenzreihen sind diese gliedweise differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n a_{ij}^{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \left(t^{n-1} a_{ij}^{(n)}(t) + t^n \sum_{k=0}^{n-1} a_{ij}^{(k)}(t) \dot{a}_{ij}(t) a_{ij}^{n-k-1}(t) \right).$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \left(t^{n-1} A^n + t^n \sum_{k=0}^{n-1} A^k \dot{A} A^{n-k-1} \right) \\ &= \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} A^{n-1} \right) A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} t^n \sum_{k=0}^{n-1} A^k \dot{A} A^{n-k-1} \\ &= \exp(-tA) A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} t^n \sum_{k=0}^{n-1} A^k \dot{A} A^{n-k-1} \end{aligned}$$

und daher

$$\dot{Q}(0) = \frac{d}{dt} Q(t) \Big|_{t=0} = -A,$$

woraus mit (3.19) für $t = 0$

$$G(L) = Q(0)G(L)Q^T(0) = G(\dot{Q}(0)Q^T(0) + Q(0)LQ^T(0)) = G(-A + L) \quad \forall A \in \mathfrak{so}(3)$$

folgt. Wir können nun jederzeit $A = W = \text{skew } L$ wählen, so dass

$$G(L) = G(-W + L) = G(D) = G(\text{sym } L)$$

ist. Daraus folgt die Behauptung. ■

Nun ist $Q = Q(t)$ ein orthogonaler Tensor, d. h. es gilt

$$QQ^T = 1 \iff \dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T = 0 \iff \dot{Q}Q^T = -Q\dot{Q}^T \quad (3.21)$$

und nach Definition des „rate of Deformation tensors“ bzw. des „vorticity tensors“ (3.31) folgt daraus mit (3.15)

$$D^* = \frac{1}{2} (L^* + L^{*T}) = \frac{1}{2} (\dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T) + Q \frac{1}{2} (L + L^T) Q^T = Q D Q^T, \quad (3.22)$$

sowie

$$W^* = \frac{1}{2} (L^* - L^{*T}) = \frac{1}{2} (\dot{Q}Q^T - Q\dot{Q}^T) - Q\frac{1}{2}(L - L^T)Q^T = QWQ^T + \dot{Q}Q^T. \quad (3.23)$$

Dann folgt aus dem Lemma und (3.19), dass

$$QG(D)Q^T = QG(L)Q^T = QTQ^T = T^* = G(L^*) = G(D^*) = G(QDQ^T),$$

d. h. der Spannungstensor T nach Definition 3.1.1 eine isotrope Tensorfunktion ist.

3.1.3 Die Forderung nach Isotropie

Die Abhängigkeit des Spannungstensors vom symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten D lässt sich ebenso aus der Tatsache ableiten, dass viele Flüssigkeiten als isotrop beschrieben werden können. Umgangssprachlich formuliert bedeutet das, dass sie sich in jeder Richtung gleich verhalten; drehen wir die Referenzkonfiguration Ω und überführen sie so in die Referenzkonfiguration Ω' , so sollten die Materialgrößen davon unberührt bleiben, d. h. die Reaktion der Flüssigkeit sollte invariant unter Drehungen sein. Diese Überlegung impliziert die folgende Definition

Definition 3.1.2: Ein Teilchen verhält sich isotrop bzgl. der Referenzkonfiguration \mathcal{G} , wenn seine resultierenden Materialgrößen bei Auferlegung derselben beliebigen Deformationen Φ nicht davon abhängen, ob die Bewegung von \mathcal{G} oder einer gedrehten Referenzkonfiguration \mathcal{G}' ausging, d. h. falls für mindestens eine Referenzkonfiguration und jedes $Q = Q(t) \in O(3)$

$$G'(F) := G(FQ) = G(F) \quad \text{für jede Deformation } F \quad (3.24)$$

gilt.

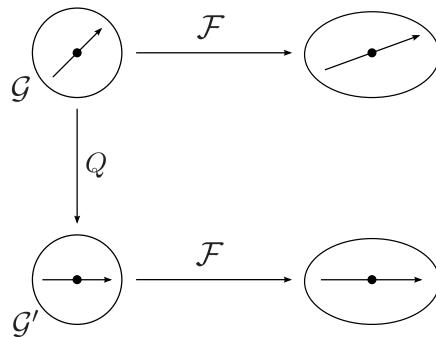


Abbildung 3.2: Isotropie

Wegen (3.21) ist (bei „Vorschaltung“ einer Drehung Q)

$$L' = (\dot{F}Q)(FQ)^{-1} = \dot{F}QQ^TF^{-1} + F\dot{Q}Q^{-1}F^{-1} = L + F\dot{Q}Q^{-1}F^{-1}, \quad (3.25)$$

so dass die Forderung nach Isotropie der Flüssigkeit wegen (3.24) zu

$$T(x, t) = G'(L') = G'(\dot{F}F^{-1}) = G'(F) = G(FQ) = G(L + F\dot{Q}Q^TF^{-1})$$

für alle $Q \in So(3)$ und alle Deformationen F führt. Setzen wir mit (3.21) $V := \dot{Q}Q^T \in \mathfrak{so}(3)$ und wählen als spezielle Deformation $F = \nabla v = \tilde{Q} \in O(3)$ (vgl. Neff/Münch: Dann ist $F = \nabla v$ eine konstante, globale Rotation.), so muss der Spannungstensor T die Gleichung

$$G(L) = G(L + \tilde{Q}V\tilde{Q}^T) \quad (3.26)$$

für alle $V \in \mathfrak{so}(3)$ erfüllen. Setzen wir nun

$$V := \tilde{Q}^T \frac{1}{2} (L^T - L) \tilde{Q} = -\tilde{Q}^T W \tilde{Q} \in \mathfrak{so}(3)$$

folgt wie schon vorher

$$T(x, t) = G(L) = G\left(L - \tilde{Q}\tilde{Q}^T W \tilde{Q}\tilde{Q}^T\right) = G(L - W) = G(D).$$

Ferner wollen wir festhalten, dass nach Definition des *rate of deformation tensors* $D = D(F)$ bzw. des *vorticity tensors* $W = W(F)$ (vgl. (2.14)) und Gleichung (3.21) sowie (3.25)

$$\begin{aligned} D' &= \frac{1}{2} (L' + L'^T) \\ &= \frac{1}{2} F (\dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T) F^{-1} + \frac{1}{2} (L + L^T) \\ &= D, \end{aligned} \quad (3.27)$$

sowie

$$W' = \frac{1}{2} (L' - L'^T) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} F (\dot{Q}Q^T - Q\dot{Q}^T) F^{-1} + \frac{1}{2} (L' - L'^T) \\ &= W + \dot{Q}Q^T. \end{aligned} \quad (3.29)$$

ist. Die folgende Übersicht zeigt schematisch die bisher von uns gewonnenen Erkenntnisse:

- | | |
|--|---|
| (1) Deformation der
Linienelemente | $\implies T = G(L) = G(\nabla v).$ |
| (2) Galilei's Relativitätsprinzip | $\implies T$ ist forminvariant.
$\implies T$ ist eine isotrope Tensorfunktion. |
| (3) Materielle Objektivität | $\implies T = G(D) = G(\text{sym } L)$ forminvariant.
$\implies T$ ist eine isotrope Tensorfunktion
in $D = \text{sym } L = \frac{1}{2}(L + L^T)$. |
| (4) Isotropie | $\implies T = G(D) = G(\text{sym } L).$ |
| (5) Galilei's Relativitätsprinzip
& Isotropie | $\implies T$ ist eine forminvariante, isotrope
Tensorfunktion in $D = \text{sym } L$. |

3.1.4 Darstellung isotroper Tensorfunktionen

Im Wesentlichen haben wir uns im letzten Abschnitt bemüht, detailliertere Informationen über die Form und Struktur des Spannungstensors abzuleiten. Dabei sind wir ausgehend von drei verschiedenen Gesichtspunkten zu der Erkenntnis gelangt, dass der Spannungstensor $T = G(L)$ eine isotrope, forminvariante und (sofern wir uns der Hypothese der Dreihimpulserhaltung anschließen) nach Satz 2.5.2 symmetrische Tensorfunktion G abhängig vom symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten D sein sollte und somit

$$T^* = G(D^*) = G(QDQ^T) = QG(D)Q^T = QTQ^T \quad \forall Q \in SO(3)$$

erfüllt. Basierend auf diesen Eigenschaften ermöglicht uns der folgende Satz nun eine konkrete Darstellung des Spannungstensors.

Satz 3.1.2 (Darstellungssatz von Rivlin-Erickson): *Für eine tensorwertige Funktion*

$$G : \{ \text{ist symmetrisch} \} \longrightarrow \{ B \text{ ist symmetrisch} \}$$

sind äquivalent:

(a) G besitzt die Eigenschaft

$$G(QSQ^T) = QG(S)Q^T \quad \forall Q \in SO(3). \quad (3.30)$$

(b) G besitzt die Darstellung

$$G(S) = \phi_0(I_S)I + \phi_1(I_S)S + \phi_2(I_S)S^2, \quad (3.31)$$

wobei ϕ_0 , ϕ_1 und ϕ_2 Funktionen der skalaren Grundinvarianten I_S von S sind.

Die skalaren Grundinvarianten $I_S = (I_1(S), I_2(S), I_3(S))$ eines Tensors 2-ter Stufe sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\chi_S = \det(S - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1(S)\lambda^2 - I_2(S)\lambda + I_3(S).$$

Sind λ_1 , λ_2 und λ_3 die Eigenwerte des Tensors S so gilt:

$$I_1(S) = \text{tr}(S) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (3.32)$$

$$I_2(S) = \frac{1}{2} ((\text{tr}(S))^2 - \text{tr}(S^2)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \quad (3.33)$$

$$I_3(S) = \det(S) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (3.34)$$

Beweis.

(b) \implies (a): Nehmen wir zunächst an, dass $G(S)$ die Darstellung (3.31) für skalare Invariante ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_2 hat, so ist

$$\begin{aligned} QG(S)Q^T &= \phi_0 QIQ^T + \phi_1 QSQ^T + \phi_2 QS^2Q^T \\ &= \phi_0 I + \phi_1 QSQ^T + \phi_2 QSQ^T QSQ^T \\ &= \phi_0 I + \phi_1 QSQ^T + \phi_2 (QSQ^T)^2 = G(QSQ^T) \end{aligned}$$

und daher gilt (3.30).

(a) \implies (b): Diesen Beweis führen wir in drei Schritten.

Schritt 1: Zunächst zeigen wir, dass vorausgesetzt (3.30) gilt, die Eigenwerte von $G(S)$ skalare Invarianten von S sind.

Seien dazu $g(S)$ ein Eigenwert von $G(S)$ und $g(QSQ^T)$ der entsprechende Eigenwert von $G(QSQ^T)$. Dann lauten die zugehörigen Eigenwertprobleme

$$\det(G(S) - g(S)I) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \det(G(QSQ^T) - g(QSQ^T)I) = 0.$$

Da $G(S)$ eine isotrope Tensorfunktion ist können wir dies mit (3.30) umschreiben zu

$$\begin{aligned} 0 &= \det(QG(S)Q^T - g(QSQ^T)I) = \det(QG(S)Q^T - g(QSQ^T)QIQ^T) \\ &= \det Q \cdot \det(G(S) - g(QSQ^T)I) \cdot \det Q^T \\ &= \det(G(S) - g(QSQ^T)I). \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jedes $Q \in O(3)$ gilt und sowohl $g(S)$ als auch $g(QSQ^T)$ dieselbe Gleichung lösen, muss

$$g(QSQ^T) = g(S)$$

gelten. Die Eigenwerte von $G(S)$ sind also skalare Invarianten von S .

Schritt 2: Nun zeigen wir, dass $G(S)$ und S koaxial sind, also dieselben Eigenvektoren haben.

Dazu betrachten wir einen Eigenvektor v von S zum Eigenwert λ , d. h.

$$Sv = \lambda v.$$

Ferner sei Q ein orthogonaler Tensor der Form

$$Q = 2(v \otimes v) - I.$$

für einen Vektor v mit $\|v\| = 1$ (Q beschreibt eine Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ um v). Diese Darstellung ist erlaubt, da

$$\begin{aligned} QQ^T &= (2(v \otimes v) - I)(2(v \otimes v)^T - I^T) \\ &= (2(v \otimes v) - I)(2(v \otimes v) - I) \\ &= 4(v \otimes v) - 2(v \otimes v) - 2(v \otimes v) + I = I. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$Q = Q^T \quad \text{und} \quad Qv = 2v - v = v.$$

Dann gilt

$$Sv = SQ^TQv = \lambda Q^TQv \implies SQ^Tv = \lambda Q^TQQ^Tv = \lambda Q^Tv = \lambda Qv = \lambda v$$

und daher

$$QSQ^Tv = Q\lambda v = \lambda Qv = \lambda v = Sv \implies QSQ^T = S.$$

Mit der Isotropieeigenschaft (3.30) erhalten wir daraus

$$QG(S)Q^T = G(QSQ^T) = G(S).$$

Betrachten wir nun

$$G(V)v = QG(S)Q^Tv = QG(S)Q^TQv = QG(S)v$$

erkennen wir, dass $G(S)v$ ein Eigenvektor von Q zum Eigenwert 1 ist. Da ein orthogonaler Tensor nur einen reellen Eigenwert und damit nur einen reellen Eigenvektor haben kann, muss eine Zahl α existieren, so dass

$$G(S)v = \alpha v$$

ist. Somit ist gezeigt, dass die Eigenvektoren von $G(S)$ und S dieselben Eigenvektoren haben, also koaxial sind.

Schritt 3: Zuletzt zeigen wir mit den Ergebnissen aus Schritt 1 und Schritt 2 das $G(S)$ die geforderte Darstellung haben muss.

Sei also S ein symmetrischer Tensor. Dann besitzt der zugrunde liegende Vektorraum eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren bzgl. derer S orthogonal diagonalisierbar ist. Sei

$$S = QSQ^T$$

die entsprechende Transformation auf Diagonalform mit Diagonaltensor \mathcal{S} und orthogonalem Tensor Q . Unter der Annahme, dass (3.30) für Diagonaltensoren gilt, folgt

$$\begin{aligned} G(S) &= G(QSQ^T) = QG(\mathcal{S})Q^T \\ &= Q(\phi_0 I + \phi_1 \mathcal{S} + \phi_2 \mathcal{S}^2)Q^T \\ &= \phi_0 I + \phi_1 S + \phi_2 S^2, \end{aligned}$$

da ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 skalare Invarianten sind. Es genügt also die Behauptung für Diagonaltensoren zu zeigen. Da G isotrop ist, folgt nach Schritt 2, dass G und S dieselben Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 haben. Seien nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und g_1, g_2, g_3 die Eigenwerte von S bzw. $G(S)$, dann lassen sich S und $G(S)$ auf die sogenannte *Spektraldarstellung*

$$S = \lambda_1 v_1 \otimes v_1 + \lambda_2 v_2 \otimes v_2 + \lambda_3 v_3 \otimes v_3 \quad (3.35)$$

$$G(S) = g_1 v_1 \otimes v_1 + g_2 v_2 \otimes v_2 + g_3 v_3 \otimes v_3 \quad (3.36)$$

transformieren. Nach Schritt 1 sind die Eigenwerte g_i von G skalare Invariante von S . Daraus können wir ableiten, dass $G(S)$ gemäß (3.31) darstellbar ist, falls das Gleichungssystem

$$\phi_0 + \phi_1 \lambda_i + \phi_2 \lambda_i^2 = g_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

lösbar ist. Sind die λ_i untereinander verschieden, so ist dies der Fall und ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 sind als Funktionen der λ_i und g_i darstellbar und somit skalare Invarianten. Sei nun $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Dann betrachten wir zwei orthonormale Eigenvektoren v_1 und v_2 von S zum Eigenwert λ , d. h.

$$Sv_1 = \lambda v_1 \quad \text{bzw.} \quad Sv_2 = \lambda v_2.$$

Die Vektoren v_1 und v_2 sind aber auch Eigenvektoren von $G(V)$ zu den Eigenwerten g_1 und g_2 , so dass

$$G(S)v_1 = g_1 v_1 \quad \text{bzw.} \quad G(S)v_2 = g_2 v_2$$

gilt. Mit v_1 und v_2 ist auch jeder Vektor der in der von v_1 und v_2 aufgespannten Ebene Eigenvektor von S und daher auch von $G(S)$. Insbesondere ist somit $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor von $G(S)$, d. h. es gibt einen Eigenwert μ , so dass

$$G(S)(v_1 + v_2) = \mu(v_1 + v_2)$$

ist. Andererseits gilt

$$G(S)(v_1 + v_2) = g_1 v_1 + g_2 v_2$$

und somit

$$(\mu - g_1)v_1 + (\mu - g_2)v_2 = 0.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von v_1 und v_2 folgt daraus

$$g_1 = g_2 = \mu.$$

Wir können dann (3.31) erfüllen indem wir $\phi_2(I_S) = 0$ wählen. Dann ist

$$G(V) = \phi_0 I + \phi_1 S,$$

wobei ϕ_0 und ϕ_1 gemäß obigem Gleichungssystem eindeutig bestimmt und als Funktionen der λ_i und g_i darstellbar sind. Im Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ folgt wie oben, dass

$$g_1 = g_2 = g_3$$

ist. Wählen wir $\phi_1 = \phi_2 = 0$, so ist das obige Gleichungssystem wieder lösbar und man kann (3.31) mit

$$G(S) = \phi_0 I$$

erfüllen.

■

Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass für Stokessche Flüssigkeiten der Cauchy-Spannungstensor die Gestalt

$$T(x, t) = G(D; x, t) = \phi_0(I_D)I + \phi_1(I_D)D + \phi_2(I_D)D^2 \quad (3.37)$$

hat. Gehen wir insbesondere von einem linearen Zusammenhang aus, so ist

$$T(x, t) = \phi_0(I_D)I + \phi_1(I_D)D. \quad (3.38)$$

3.2 Verallgemeinerung auf mikropolare Flüssigkeiten

Anders als bei klassischen Stokesschen Flüssigkeiten konstituieren wir, dass die Spannung in mikropolaren Flüssigkeiten nicht nur vom Geschwindigkeitsgradienten L , sondern auch von der Rotationsgeschwindigkeit ω der Flüssigkeitsteilchen, genauer dem *microgyration tensor* abhängt

$$T(x, t) = G(L, \mathcal{W}; x, t) = G(L, \mathcal{W}) \quad \text{bzw.} \quad M(x, t) = H(L, \mathcal{W}; x, t) = H(L, \mathcal{W}).$$

Unter dieser Voraussetzung werden wir nun die Prinzipien und Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts auf mikropolare Flüssigkeiten übertragen und feststellen, dass die Spannungstensoren auch für mikropolare Flüssigkeiten isotrope Tensorfunktionen sind und sich ebenfalls in Polynome entwickeln lassen.

3.2.1 Mikropolare Flüssigkeiten unter Galilei-Transformationen

Das Galilei'sche Relativitätsprinzip fordert die Invarianz der Bewegungsgleichungen unter Galileitransformationen, d. h. sind O und O^* zwei gegeneinander durch eine Transformation der Form

$$\Phi^*(X, t) = Q\Phi(X, t) + c(t) \quad (\text{Makrobewegung}) \quad (3.39)$$

$$\varphi^*(X, P, t) = Q\varphi(X, P, t) + c(t) \quad (\text{Mikrobewegung}). \quad (3.40)$$

verschobene Beobachter, so müssen in beiden Bezugssystemen die Bewegungsgleichungen dieselbe Form haben. Analog zum klassischen Fall führt diese Forderung zu unterschiedlichen Beziehungen zwischen den kinematischen Variablen der mikropolaren Flüssigkeit, die wir im Folgenden genauer analysieren werden. Der Mikrorotationstensor \bar{R} transformiert sich unter (3.40) gemäß

$$\bar{R}^* = \left(\frac{\partial p_i^*}{\partial P_j} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial p_i^*}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial P_j} \right)_{ij} = Q\bar{R},$$

so dass für die Transformation des mycroglyration tensors nach (2.21)

$$\mathcal{W}^* = \frac{d}{dt}(Q\bar{R})(Q\bar{R})^T = Q\dot{\bar{R}}\bar{R}^TQ^T = Q\mathcal{W}Q^T \quad (3.41)$$

gelten muss. Sicherlich ist es auch für mikropolare Flüssigkeiten sinnvoll davon auszugehen, dass sowohl der Betrag des Spannungsvektors t als auch des Momentenspannungstensors m durch eine Galileitransformation unverändert und ihre Orientierungen bezgl. der Normalen von der Transformation unberührt bleiben sollten. Dann folgt mit (3.9), Satz 3.1.1 und analog zur Herleitung von (3.11), dass

$$\begin{aligned} T^* &= G^*(L^*, \mathcal{W}^*) = QG(L, \mathcal{W})Q^T \\ M^* &= H^*(L^*, \mathcal{W}^*) = QH(L, \mathcal{W})Q^T \end{aligned}$$

und mit (3.15) sowie (3.41), dass

$$\begin{aligned} G^*(QLQ^T, Q\mathcal{W}Q^T) &= QG(L, \mathcal{W})Q^T \\ H^*(QLQ^T, Q\mathcal{W}Q^T) &= QH(L, \mathcal{W})Q^T \end{aligned}$$

ist, also T und M isotrope Tensorfunktionen in L und \mathcal{W} sind. Für $Q = I$ erhalten wir ferner auch die Forminviananz der beiden Tensoren.

3.2.2 Isotropieeigenschaften mikropolärer Flüssigkeiten

Genauso wie klassische Flüssigkeiten sollten sich auch mikropolare Flüssigkeiten isotrop verhalten, d. h. dass ihre Materialgrößen unabhängig davon sein sollen, ob die Bewegung der Flüssigkeit von einer Referenzkonfiguration \mathcal{G} oder einer gegenüber dieser gedrehten Referenzkonfiguration \mathcal{G}' ausging. Für die Spannungstensoren $T = \tilde{G}(F, \bar{R})$ und $M = \tilde{H}(F, \bar{R})$ bedeutet diese Forderung, dass für jedes $Q = Q(t) \in SO(3)$

$$G'(F, \bar{R}) := G(FQ, \bar{R}Q) = G(F, \bar{R}) \quad \text{bzw.} \quad H'(F, \bar{R}) := H(FQ, \bar{R}Q) = H(F, \bar{R})$$

gelten muss. Wegen (3.25) und

$$\mathcal{W}' = \frac{d}{dt}(\bar{R}Q)(RQ)^{-1} = \dot{\bar{R}}QQ^T\bar{R}^T + \bar{R}\dot{Q}Q^T\bar{R}^T = \mathcal{W} + \bar{R}\dot{Q}Q^T\bar{R}^T$$

führt die Forderung nach Isotropie zu

$$\begin{aligned} T(x, t) &= G(L, \mathcal{W}) = G(F, \bar{R}) = G(FQ, \bar{R}Q) = G(L + F\dot{Q}Q^TF^{-1}, \mathcal{W} + \bar{R}\dot{Q}Q^T\bar{R}^T) \\ M(x, t) &= H(L, \mathcal{W}) = H(F, \bar{R}) = H(FQ, \bar{R}Q) = H(L + F\dot{Q}Q^TF^{-1}, \mathcal{W} + \bar{R}\dot{Q}Q^T\bar{R}^T). \end{aligned}$$

Diese Beziehung muss für beliebige Deformationen F , Rotationen R und Transformationen Q erfüllt sein, also insbesondere auch für die spezielle Deformation bzw. Rotation $F = R = \tilde{Q} \in SO(3)$, d. h. die Spannungstensoren erfüllen für $V := \dot{Q}Q^T \in \mathfrak{so}(3)$

$$\begin{aligned} T(x, t) &= G(L + \tilde{Q}V\tilde{Q}^T, \mathcal{W} + \tilde{Q}V\tilde{Q}^T) \\ M(x, t) &= H(L + \tilde{Q}V\tilde{Q}^T, \mathcal{W} + \tilde{Q}V\tilde{Q}^T). \end{aligned}$$

Setzen wir

$$V = \tilde{Q}^{-1} \frac{1}{2} (L^T - L) \tilde{Q} = -\tilde{Q}^{-1}W\tilde{Q},$$

muss daher

$$\boxed{T(x, t) = G(D, \mathcal{W} - W) \quad \text{bzw.} \quad M(x, t) = H(D, \mathcal{W} - W)} \quad (3.42)$$

gelten.

3.2.3 Materielle Objektivität mikropolarer Flüssigkeiten

Für beliebige Wechsel des Bezugssystems sind die Transformationen der Makro- und Mikrobewegung analog zu (3.13) gegeben durch

$$\Phi^*(X, t) = Q(t)\Phi(X, t) + c(t) \quad (\text{Makrobewegung}) \quad (3.43)$$

$$\varphi^*(X, P, t) = Q(t)\varphi(X, P, t) + c(t) \quad (\text{Mikrobewegung}), \quad (3.44)$$

für $Q(t) \in SO(3)$ beliebig. Dann folgt aus (2.21) für die Transformation des microgyration tensors

$$\mathcal{W}^* = \frac{d}{dt}(Q\bar{R})(Q\bar{R})^T = Q\mathcal{W}Q^T + \dot{Q}Q^T. \quad (3.45)$$

Nehmen wir die Transformationseigenschaft (3.15) des Geschwindigkeitsgradienten hinzu, so muss für die Spannungstensoren nach dem Prinzip der materiellen Objektivität

$$\begin{aligned} T^*(x^*, t) &= G^*(QLQ^T + \dot{Q}Q^T, Q\mathcal{W}Q^T + \dot{Q}Q^T) = QG(L, \mathcal{W})Q^T \\ M^*(x^*, t) &= H^*(QLQ^T + \dot{Q}Q^T, Q\mathcal{W}Q^T + \dot{Q}Q^T) = QH(L, \mathcal{W})Q^T. \end{aligned}$$

gelten. Diese Beziehungen müssen für beliebige $Q \in SO(3)$ erfüllt sein, und daher insbesondere auch für $Q = I$, so dass

$$G^*(x, t) = G^*(x^*, t) = G(x, t) \quad \text{bzw.} \quad H^*(x, t) = H^*(x^*, t) = H(x, t),$$

für beliebige x und t gelten muss, d. h. die Spannungstensoren T und M *forminvariant* sind. Setzen wir ferner $Q(t) = \exp(-tW)$ für $W = \text{skew } L$, so ist (vgl. Beweis zu Lemma 3.1.1) $\dot{Q}(0) = -W$ und es folgt

$$\begin{aligned} G(L, \mathcal{W}) &= Q(0)G(L, \mathcal{W})Q(0)^T = G(L - W, \mathcal{W} - W) = G(D, \mathcal{W} - W) \\ H(L, \mathcal{W}) &= Q(0)H(L, \mathcal{W})Q(0)^T = G(L - W, \mathcal{W} - W) = G(D, \mathcal{W} - W). \end{aligned}$$

Nach (3.23) und (3.22) sind

$$\begin{aligned} QG(D, \mathcal{W} - W)Q^T &= G(QDQ^T, Q(\mathcal{W} - W)Q^T) \\ QH(D, \mathcal{W} - W)Q^T &= H(QDQ^T, Q(\mathcal{W} - W)Q^T), \end{aligned}$$

d. h. die Argumente der Spannungsfunktionen sind objektive Tensoren. Der Cauchy-Spannungstensor T und der Momentenspannungstensor M müssen für mikropolare Flüssigkeiten also die Beziehungen

$$\boxed{T(x, t) = G(D, B - D) \quad \text{bzw.} \quad M(x, t) = H(D, B - D)} \quad (3.46)$$

erfüllen, wobei

$$B = L^T + \mathcal{W} \quad (3.47)$$

der sogenannte *rate of microdeformation tensor* ist. Die folgende Übersicht zeigt schematisch die bisher gewonnenen Erkenntnisse:

- | | |
|--|--|
| (1) Deformation der
Linienelemente | $\implies T = G(L) = G(\nabla v).$ |
| (2) Galilei's Relativitätsprinzip | $\implies T \text{ und } M \text{ sind forminvariant.}$
$\implies T \text{ und } M \text{ sind isotrope Tensorfunktionen.}$ |
| (3) Materielle Objektivität | $\implies T = G(D, B - D) \text{ und}$
$\implies M = H(D, B - D) \text{ sind forminvariante und isotrope Tensorfunktionen in } D = \frac{1}{2}(L + L^T) \text{ und } B = L^T + \mathcal{W}$ |
| (4) Isotropie | $\implies T = G(D, B - D) \text{ und}$
$M = H(D, B - D).$ |
| (5) Galilei's Relativitätsprinzip
& Isotropie | $\implies T \text{ und } M \text{ sind forminvariante,}$
$\text{isotrope Tensorfunktionen in } D \text{ und } B = L^T + \mathcal{W}$ |

Gehen wir von der Annahme aus, dass die Spannungstensoren analog zum klassischen Fall Polynome in $B - D$ und D sind, lassen sich die Funktionen G und H (vgl. [Eri64], [Riv60]) in eine endliche Anzahl von Termen entwickeln. Beschränken wir uns ferner auf die linearen Terme, so sind die Spannungstensoren von der Form (vgl. [Eri64])

$$T(x, t) = G(D, B - D) = \left[-p + \lambda_\nu \operatorname{tr}(D) \right] \mathbb{1} + 2\mu D - 2\mu_c^v (B - D) \quad (3.48)$$

$$M(x, t) = H(D, B - D) = c_0 \cdot \operatorname{tr}(\mathfrak{D}\omega) \cdot \mathbb{1} + 2c_d \operatorname{sym} \mathfrak{D}\omega + 2c_a \operatorname{skew} \mathfrak{D}\omega. \quad (3.49)$$

Der symmetrische Anteil des Spannungstensors T aus (3.48)

$$\operatorname{sym} T = \left[-p + \lambda_\nu \operatorname{tr} D \right] \mathbb{1} + 2\mu D$$

entspricht gerade dem Spannungstensor in der klassischen Hydrodynamik, mit den üblichen Viskositäten λ und μ . Die Konstante μ_c^v in (3.48) repräsentiert die *dynamische Mikro-rotationsviskosität*, während c_0, c_a, c_d in (3.49) *coefficients of angular viscosities* genannt werden. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass diese Konstanten nicht beliebig, sondern thermodynamischen Restriktionen unterworfen sind. Zunächst untersuchen wir aber, wie sich die Ergebnisse für die Spannungstensoren T und M auf die Bewegungsgleichungen (3.1) auswirken. Unter Beachtung der Einstein'schen Summationskonvention berechnen wir dafür

(a) die Divergenz des Cauchy - Spannungstensors

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} T &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left[-p + \lambda \operatorname{tr} D \right] \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} - 2\mu_c^v (B - D)_{ij} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left[-p + \lambda \operatorname{tr}(D) \right] \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \mu_c^v \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + 2\epsilon_{kij}\omega_k \right) \right) \\ &= \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} v \right] + \mu \left(\Delta v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{tr}(D) \right) + \mu_c^v \left(\Delta v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{tr}(D) + 2\epsilon_{ijk} \frac{\omega_k}{\partial x_j} \right) \\ &= \left[-\nabla p + \lambda \nabla \operatorname{tr}(D) \right] + \mu (\Delta v + \nabla \operatorname{tr}(D)) + \mu_c^v (\Delta v - \nabla \operatorname{tr}(D) + 2 \operatorname{curl} \omega) \\ &= -\nabla p + (\lambda + \mu - \mu_c^v) \nabla \operatorname{tr}(D) + (\mu + \mu_c^v) \Delta v + 2\mu_c^v \operatorname{curl} \omega. \end{aligned}$$

(b) und die Divergenz des Momentenspannungstensors

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} M &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_0 \cdot \operatorname{tr}(D\omega) \cdot \delta_{ij} + 2c_d (\operatorname{sym} \mathfrak{D}\omega)_{ij} + 2c_a (\operatorname{skew} \mathfrak{D}\omega)_{ij} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_0 \cdot \operatorname{tr}(\mathfrak{D}\omega) \cdot \delta_{ij} + c_d \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) + c_a \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) \right) \\ &= c_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{tr}(D\omega) \cdot \delta_{ij} + c_d \left(\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) + c_a \left(\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= c_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{tr}(D\omega) + c_d \left(\Delta \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{tr}(D\omega) \right) + c_a \left(\Delta \omega_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{tr}(D\omega) \right) \\ &= (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{tr}(D\omega) + (c_d + c_a) \Delta \omega. \end{aligned}$$

Neben diesen beiden treten in den Bewegungsgleichungen ebenfalls die Terme

$$\text{axl}(\text{skew } T), \langle M, \nabla \omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}, \langle \text{sym } T, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \text{ und } \langle \text{skew } T, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}$$

auf, für die wir hier einfach nur das Ergebnis angeben und die Berechnung in den Anhang A.1.4 stellen. Es gilt:

- $\langle M, \mathfrak{D}\omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} = c_0 \text{tr}(\mathfrak{D}\omega)^2 + (c_d + c_a) \langle \mathfrak{D}\omega, \mathfrak{D}\omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}$
 $+ (c_d - c_a) \langle \mathfrak{D}\omega, \mathfrak{D}\omega^T \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}$
- $\langle \text{sym } T, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + \langle \text{skew } T, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}$
 $= -p \text{tr}(D) + \lambda \text{tr}(D)^2 + 2\mu \langle D, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + \mu_c^v \langle \text{curl } v, \text{curl } v \rangle - 2\mu_c^v \langle \text{curl } v, \omega \rangle$
- $\text{axl}(\text{skew } T) = 2\mu_c^v \left(\omega - \frac{1}{2} \text{curl } v \right) = -2\mu_c^v \text{axl}(B - D).$

Zusammengenommen lassen sich nun die Bewegungsgleichungen (3.1) konkretisieren:

Die Bewegungsgleichungen mikropolarer Flüssigkeiten

Massenerhaltung :

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{tr}(D) \quad (3.50)$$

Impulserhaltung :

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho k + \operatorname{Div} T \\ &= \rho k - \nabla p + (\lambda + \mu - \mu_c^v) \nabla \operatorname{tr}(D) + (\mu + \mu_c^v) \Delta v - 2\mu_c^v \operatorname{curl} \omega \end{aligned} \quad (3.51)$$

Drehimpulserhaltung :

$$\rho I \frac{D\omega}{Dt} = \rho g + \operatorname{Div} M + 2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T) \quad (3.52)$$

$$= \rho g + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{tr}(D\omega) + (c_d + c_a) \Delta \omega + 2\mu_c^v (\operatorname{curl} v - 2w) \quad (3.53)$$

Energieerhaltung :

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -p \operatorname{tr}(D) + \rho \Gamma - \operatorname{div} q \quad (3.54)$$

mit

$$\begin{aligned} \rho \Gamma &= \lambda \operatorname{tr}(D)^2 + c_0 \operatorname{tr}(\mathfrak{D}\omega)^2 + 2\mu \langle D, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + \mu_c^v (2\omega - \operatorname{curl} v)^2 \\ &\quad + (c_d + c_a) \langle \mathfrak{D}\omega, \mathfrak{D}\omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + (c_d - c_a) \langle \mathfrak{D}\omega, \mathfrak{D}\omega^T \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \end{aligned} \quad (3.55)$$

3.2.4 Thermodynamische Restriktionen für die Viskositätskonstanten

Aus thermodynamischer Sicht können wir eine homogene Flüssigkeit durch eine Reihe expliziter Beziehungen zwischen einigen wenigen „Zustandsgrößen“ beschreiben. Die wichtigsten Zustandsgrößen sind dabei die Entropie S , die Volumendichte $V = 1/\rho$, die innere Energie E , der Druck p und die absolute Temperatur θ . Die Entropie beschreibt dabei die Zahl der möglichen Mikrozustände eines Systems, die zu dem beobachteten Makrozustand führen und ist letztlich ein Maß für die Unordnung im System. Ausgehend von der Gibbs Beziehung

$$E = E(S, V) \quad (3.56)$$

sind Druck und Temperatur definiert durch:

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} \quad \text{bzw.} \quad \theta = \frac{\partial E}{\partial S}.$$

Gehen wir im folgenden davon aus, dass $V = V(t)$ und $S = S(T)$ differenzierbare Funktionen in der Zeit und $p, \theta > 0$ sind, ist die Ableitung von (3.56) nach t durch

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial E}{\partial S} \frac{DS}{Dt} + \frac{\partial E}{\partial V} \frac{DV}{Dt} = \theta \frac{DS}{Dt} - p \frac{DV}{Dt} = \theta \frac{DS}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Umgestellt gilt also für die lokale Änderung der Entropie S :

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{1}{\theta} \frac{DE}{Dt} - \frac{p}{\theta \rho^2} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (3.57)$$

Gehen wir für die Wärmeleitung wie in Abschnitt 2.5.4 von Fourier's Gesetz (2.46) aus, folgt mit (3.54)

$$\rho \frac{DE}{Dt} = c \operatorname{div} \nabla \theta - p \operatorname{tr}(D) + \rho \Gamma.$$

Die innere Energie eines Volumenelementes $\mathcal{G}(t)$ in einer Flüssigkeit nimmt also in dem Maße zu, in dem Wärme hinein- oder herausströmt, die Flüssigkeit komprimiert oder die Viskosität vergrößert wird. Die Kontinuitätsgleichung (3.50) liefert ferner

$$\operatorname{tr}(D) = \operatorname{div} v = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt},$$

so dass wir eingesetzt in (3.57)

$$\rho \frac{DS}{Dt} = \frac{\rho}{\theta} \frac{DE}{Dt} - \frac{p}{\theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \frac{c}{\theta} \operatorname{div} \nabla \theta + \frac{1}{\theta} \rho \Gamma$$

ableiten können. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kann die Entropie eines abgeschlossenen Systems nie abnehmen, so dass also stets

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho S \, dx = \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \frac{DS}{Dt} \, dx \geq 0 \quad (3.58)$$

gelten muss. Nach dem Satz von Gauß muss demnach

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}(t)} \rho \frac{DS}{Dt} dx &= \int_{\mathcal{G}(t)} \frac{c}{\theta} \operatorname{div} \nabla \theta + \frac{1}{\theta} \rho \Gamma dx \\ &= \int_{\mathcal{G}(t)} \operatorname{div} \left(\frac{c}{\theta} \nabla \theta \right) + \frac{c}{\theta^2} (\nabla \theta)^2 + \frac{1}{\theta} \rho \Gamma dx \\ &= \int_{\partial \mathcal{G}(t)} -\frac{1}{\theta} \langle q, n \rangle dS + \int_{\mathcal{G}(t)} \frac{c}{\theta^2} (\nabla \theta)^2 + \frac{1}{\theta} \rho \Gamma dx \end{aligned}$$

und daher nach (3.55) lokal

$$\begin{aligned} 0 \leq c \operatorname{div} \nabla \theta + \rho \Gamma &= c \operatorname{div} \nabla \theta + \lambda (\operatorname{tr}(D))^2 + c_0 \operatorname{tr}(\mathfrak{D}\omega)^2 + 2\mu \langle D, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \\ &\quad + 4\mu_c^v (2\omega - \operatorname{curl} v)^2 + (c_d + c_a) \langle \mathfrak{D}\omega, \mathfrak{D}\omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \\ &\quad + (c_d - c_a) \langle \mathfrak{D}\omega, \mathfrak{D}\omega^T \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \end{aligned} \quad (3.59)$$

gelten. Da D , q , $2\omega - \operatorname{curl} v$ und $\nabla \omega$ unabhängig voneinander variieren können, kann diese Ungleichung für beliebige Bewegungen der Flüssigkeit nur erfüllt werden, wenn

- (1) $\frac{c}{\theta^2} (\nabla \theta)^2 \geq 0$
- (2) $\lambda (\operatorname{tr}(D))^2 + 2\mu \langle D, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \geq 0$
- (3) $c_0 \operatorname{tr}(\mathfrak{D}\omega)^2 + (c_d + c_a) \langle \mathfrak{D}\omega, \mathfrak{D}\omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + (c_d - c_a) \langle \mathfrak{D}\omega, \mathfrak{D}\omega^T \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \geq 0$
- (4) $\mu_c^v (2\omega - \operatorname{curl} v)^2 \geq 0$

gilt. Offensichtlich implizieren die erste und dritte Ungleichung, dass

$$c \geq 0, \quad \text{bzw.} \quad \mu_c^v \geq 0$$

erfüllt sein müssen. Die Bedingungen an die übrigen Koeffizienten erhalten wir, indem wir sie als quadratische Formen in einem neun dimensionalen Raum auffassen, die dann die Bedingungen

$$a_{ij} \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad b_{ij} \psi_i \psi_j \geq 0 \quad (3.60)$$

erfüllen müssen. Dabei sind

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \xi_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad \xi_3 = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, & \psi_1 &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, \quad \psi_2 = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, \quad \psi_3 = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}, \\ \xi_4 &= \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \quad \xi_5 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \quad \xi_6 = \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, & \psi_4 &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \quad \psi_5 = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \quad \psi_6 = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}, \\ \xi_7 &= \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \quad \xi_8 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, \quad \xi_9 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, & \psi_7 &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}, \quad \psi_8 = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \quad \psi_9 = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = a_{33} = \lambda + 2\mu, \\ a_{12} &= a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = \lambda, \\ a_{44} &= a_{55} = a_{66} = a_{77} = a_{88} = a_{99} = \mu, \\ a_{57} &= a_{75} = a_{68} = a_{86} = a_{94} = a_{49} = \mu, \\ a_{ij} &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{22} = b_{33} = c_0 + 2c_d, \\ b_{12} &= b_{21} = b_{13} = b_{31} = b_{23} = b_{32} = c_0, \\ b_{44} &= b_{55} = b_{66} = b_{77} = b_{88} = b_{99} = c_d + c_a, \\ b_{45} &= b_{54} = b_{67} = b_{76} = b_{89} = b_{98} = c_d - c_a, \\ b_{ij} &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Dann sind

$$s_1 = 2\mu \text{ und } s_2 = 3\lambda + 2\mu$$

die Eigenwerte von $A = (a_{ij})$ bzw.

$$t_1 = 2c_d, \quad t_2 = 2c_a \text{ und } t_3 = 3c_0 + 2c_d$$

die Eigenwerte von $B = (b_{ij})$. Die Forderungen (3.60) sind nun genau dann erfüllt wenn die Eigenwerte nichtnegativ sind, so dass wir zusammengefasst den folgenden Satz bewiesen haben.

Satz 3.2.1: *Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik ist für beliebige Bewegungen mikropolarer Flüssigkeiten genau dann erfüllt, wenn*

$$\begin{aligned} 3\lambda + 2\mu &\geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \mu_c^v \geq 0, \\ 3c_0 + 2c_d &\geq 0, \quad c_d \geq 0, \quad c_a \geq 0, \quad c \geq 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

gilt.

Im klassischen Fall Stokesscher Flüssigkeiten reduzieren sich die obigen Bedingungen auf

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad c \geq 0.$$

Kapitel 4

Mathematische Diskussion

Der folgende Abschnitt soll eine einheitliche Basis schaffen, um die Diskussion der Bewegungsgleichungen mikropolarer Flüssigkeiten mit (Funktional-) analytischen Methoden zu ermöglichen. Das für die Behandlung partieller Differentialgleichungen enorm wichtige Lemma von Lax - Milgram ebenso wie der Fixpunktsatz von Schauder und der Begriff der schwachen Ableitung werden vorgestellt und die Theorie der Sobolevfunktionen umrissen. Insbesondere die Poincare - Ungleichung und die Einbettungssätze in Abschnitt (4.1.4) werden bei der Untersuchung des Differentialgleichungssystems von Seite 46 eine tragende Rolle spielen.

4.1 Grundlagen der Funktionalanalysis

Wir führen zunächst einige wesentliche Definitionen und Sätze der Funktionalanalysis ein, die wir bei unseren Untersuchungen im nächsten Kapitel benötigen werden. Dabei werden wir uns im Wesentlichen auf das Lemma von Peter D. Lax und Arthur N. Milgram stützen, dessen Beweis der zentrale Punkt dieses Abschnitts ist.

Seien X und Y normierte \mathbb{R} -Vektorräume. Eine Abbildung $T : X \rightarrow Y$ heißt (*linearer*) *Operator*, wenn $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ für alle $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Wir nennen einen linearen Operator

- (a) beschränkt, wenn er beschränkte Mengen in beschränkte Mengen überführt und
- (b) kompakt, falls er beschränkte Mengen in relativkompakte Mengen überführt.

Dabei heißt $A \subset X$ relativkompakt, wenn der Abschluß $\text{clos}(A)$ in X kompakt ist.

Bemerkung 2: Man kann zeigen, dass ein Operator $T \in L(X, Y)$ genau dann kompakt ist, wenn für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X , die Bildfolge $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y eine konvergente Teilfolge besitzt (vgl. z. B. [Alt06]).

Satz 4.1.1: Seien X, Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

- (a) T ist beschränkt

(b) Es gibt eine Zahl $c > 0$ mit

$$\|T(x)\|_y \leq c \|x\|_X \quad \forall x \in X \quad (4.1)$$

(c) T ist gleichmäßig stetig auf X .

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Für $x = 0$ folgt die Behauptung direkt aus der Linearität des Operators T . Für $x \in X \setminus \{0\}$ ist nun

$$\frac{1}{\|x\|_X} \cdot x \in B_1(0).$$

Nach Voraussetzung überführt T auch die Einheitskugel $B_1(0) := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ in eine beschränkte Menge, sodass also für alle $x \in B_1(0)$:

$$\|Tx\|_Y \leq C,$$

für eine Konstante $C > 0$. Daher gilt

$$\left\| T \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_Y \leq C \iff \|Tx\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X. \quad \forall x \in X \setminus \{0\}$$

(b) \Rightarrow (c): Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Aus (b) und der Linearität der Abbildung T folgt dann für alle $x, y \in X$ mit $\|x - y\| \leq \delta := \frac{\varepsilon}{C}$:

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq C \|x - y\| \leq \varepsilon.$$

(c) \Rightarrow (a): Da T linear und gleichmäßig stetig also insbesondere in 0 stetig ist, existiert zu $1 =: \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$\|Tx\| \leq \varepsilon = 1 \quad \forall \|x\| < \delta.$$

Sei $M \subset X$ beschränkt. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass $\|x\| < C \quad \forall x \in M$ und somit insbesondere $\|\frac{\delta}{C}x\| \leq \delta$. Dann gilt aber für alle $x \in M$:

$$\left\| T \frac{\delta}{C} x \right\| \leq 1 \iff \|Tx\| \leq \frac{C}{\delta},$$

also ist $T(M)$ beschränkt. ■

Definition 4.1.1: Sei $T \in L(X, Y)$. Die kleinste Zahl $c > 0$ für die

$$\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

heißt Norm von T und wird mit $\|T\|$ bezeichnet.

Man kann leicht zeigen, dass

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y \quad \forall x \in X.$$

Die Menge aller linearen beschränkten (und damit stetigen) Operatoren bezeichnen wir mit $L(X, Y)$. Statt $L(X, X)$ schreiben wir auch $L(X)$ und statt $L(X, \mathbb{K})$ schreiben wir X' . Der Raum X' heißt der zu X *duale Raum* und seine Elemente nennen wir *lineare beschränkte Funktionale* auf X . Einen normierten Raum X in dem jede Cauchyfolge bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik konvergiert, bezeichnen wir als *Banachraum* und wir nennen ihn *separabel*, falls er eine *abzählbar dichte* Teilmenge $A \subset X$ enthält. Dabei heißt $A \subset X$ *dicht*, falls $\text{clos } A = X$.

Definition 4.1.2: Sei X ein normierter Raum, X' der Dualraum und $X'' := (X')'$ der Bidualraum. X heißt *reflexiv*, falls die Abbildung

$$J^1 : X \longrightarrow X''; \quad x \longmapsto J(x) = J_x \text{ mit } J_x(T) = T(x) \text{ für jedes } T \in X'$$

surjektiv ist.

Definition 4.1.3: Seien X und Y Banachräume.

(1) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ konvergiert schwach gegen $x \in X$ (dafür schreiben wir $x_n \rightharpoonup x$ für $n \rightarrow \infty$), falls für jedes lineare beschränkte Funktional $T \in X'$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T(x_k) = T(x).$$

(2) Eine Menge $Y \subset X$ heißt *schwach folgenkompakt*, falls jede Folge in Y eine schwach konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert wieder in Y liegt.

(3) Ein Operator $K : X \longrightarrow Y$ heißt *vollstetig*, falls für jede schwach konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ die Bildfolge $(K(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ normkonvergent ist.

Satz 4.1.2: Seien X, Y Banachräume. Dann ist jeder kompakte Operator $T \in L(X, Y)$ vollstetig. Ist X zudem reflexiv, so gilt die Äquivalenz.

Beweis. Sei zunächst $T \in L(X, Y)$ ein kompakter Operator und $x_n \rightharpoonup x$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt für alle $T \in X'$ und $k \rightarrow \infty$

$$\|Tx\| \leftarrow \|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\|$$

und daher

$$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Wählen wir nun T mit $\|T\| = 1$ und $\|Tx\| = \|x\|$ (möglich nach dem Satz von Hahn-Banach vgl. [Alt06]) folgt, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{\pi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ und ein $y \in Y$, so dass $Tx_{\pi(n)} \rightharpoonup y$ für $n \rightarrow \infty$. Aber aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt bereits $Tx_n \rightharpoonup Tx$ und da die starke die schwache Konvergenz impliziert, ergibt sich aus der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes (vgl. [Wer07]) $y = Tx$, d. h. Tx ist ein Häufungspunkt von $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir zeigen nun, dass dieser der einzige Häufungspunkt der Folge und damit der Grenzwert der Folge ist. Sei dazu $z \in Y$ ein weiterer

¹Die Abbildung J wird auch *kanonische Einbettung* von X in den Bidualraum X'' genannt.

Häufungspunkt der Folge $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann existiert eine Teilfolge $(Tx_{\mu(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen z konvergiert und daher ist $(x_{\mu(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent gegen x . Wiederum folgt aus der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes:

$$z = Tx.$$

Sei nun X reflexiv und $T : X \rightarrow Y$ vollstetig. Dann ist T insbesondere linear. Ist nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X , besitzt sie aufgrund der Reflexivität von X eine schwach konvergente Teilfolge (vgl. [Wer07]) $(x_{\pi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{\pi(n)} \rightharpoonup x \in X$ für $n \rightarrow \infty$. Da T vollstetig ist erhalten wir

$$Tx_{\pi(n)} \rightarrow Tx$$

für $n \rightarrow \infty$. Nach Bemerkung 2 ist T somit kompakt. \blacksquare

Satz 4.1.3: *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist jede abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(x)} \subset X$ schwach folgenkompakt.*

Beweis. Einen Beweis dazu findet man zum Beispiel in [Alt06]. \blacksquare

4.1.1 Das Lemma von Lax-Milgram

Das Lemma von Lax-Milgram ist einer der zentralen Sätze, mit deren Hilfe die Existenz und Eindeutigkeit (schwacher) Lösungen von Randwertproblemen für lineare elliptische partielle Differentialgleichungen gezeigt werden kann. Wir werden hier eine, speziell für unsere Zwecke geeignete, Form dieses Satzes für separable Hilberträume formulieren. Es sei aber darauf hingewiesen, dass sowohl das Lemma von Lax-Milgram, als auch der Riesz'sche Darstellungssatz als einfaches Korollar dieses Satzes, für allgemeine Hilberträume gelten (vgl. Anhang Kapitel A.2).

Sei H ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Wir nennen H einen (reellen) *Hilbertraum*, falls in ihm jede Cauchyfolge bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm konvergiert. Hilberträume sind reflexiv und wegen ihrem hohen Grad an mathematischer Struktur essentiell in der Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen.

Satz 4.1.4 (Das Lemma von Lax-Milgram für separable Hilberträume): *Sei H ein separabler Hilbertraum und $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform, d.h. $\exists \beta, \alpha > 0$ so dass*

$$|B(u, v)| \leq \beta \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{und} \quad B(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u, v \in H. \quad (4.2)$$

Dann existiert für jedes stetige lineare Funktional $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ ein eindeutiges $u \in H$ mit

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H. \quad (4.3)$$

Beweis. Wir benutzen für den Beweis die sogenannte *Galerkin-Methode*. Im Zuge dessen zeigen wir zunächst für $n \in \mathbb{N}$ die Existenz von Elementen $u_n \in H_n$, die

$$B(u_n, v) = L(v) \quad \forall v \in H_n \quad (4.4)$$

erfüllen und gehen anschließend zum Grenzwert $n \rightarrow \infty$ über. Dabei sind die H_n endlich-dimensionale Unterräume von H mit $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ eine dichte Teilmenge von H . Seien w_1, w_2, w_3, \dots eine Basis von H und setze $H_n = \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Nach Definition ist dann $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$ und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

dicht in H .

(1) (Existenz der $u_n \in H_n$:) Sei

$$u_n = \sum_{i=1}^n \xi_i w_i \in H_n,$$

dann ist (4.4) äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n \xi_i B(w_i, w_k) = L(w_k) \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

Dieses System hat genau dann für jede rechte Seite eine eindeutige Lösung $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, wenn die Matrix $A = (B(w_i, w_k))_{1 \leq i, k \leq n}$ invertierbar ist, also genau dann, wenn $\ker(A) = \{0\}$ ist. Um dies zu zeigen multiplizieren wir die k -te Gleichung des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^n \xi_i B(w_i, w_k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

mit ξ_k und addieren die Gleichungen. Dann erhalten wir

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{i=1}^n \xi_i B(w_i, w_k) = B \left(\sum_{k=1}^n \xi_k w_k, \sum_{i=1}^n \xi_i w_i \right) = B(u_n, u_n) = 0 \quad (4.7)$$

und wegen der Koerzivität der Bilinearform B folgt daraus $u_n = 0$. Ferner sind die Vektoren w_1, w_2, \dots, w_n nach Definition linear unabhängig, sodass wir aus (4.7)

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$$

ableiten können. Also hat das Gleichungssystem (4.6) nur die eindeutige Lösung $\xi = (0, \dots, 0)$ und folglich existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Approximation $u_n \in H_n$.

(2) (Konvergenz der Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:) Mit Schritt 1 und (4.2) ist

$$\alpha \|u_n\|^2 \leq B(u_n, u_n) = L(u_n) \leq \|L\| \cdot \|u_n\|$$

und daher

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 4.1.3 existiert daher eine Teilfolge $(u_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein Element $u \in H$, sodass

$$u_\mu \rightharpoonup u.$$

Für $\mu \geq j$ ist

$$B(u_\mu, v) = L(v) \quad \forall v \in H_j \subset H_\mu,$$

und daher

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} B(u_\mu, v) = B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Da $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ eine dichte Teilmenge von H ist, folgt aus der Stetigkeit der Bilinearform B und des linearen Funktionals L , dass (4.3) für jedes $v \in H$ erfüllt ist.

- (3) (Eindeutigkeit von u): Sei $u' \in H$ ein weiteres Element mit

$$B(u', v) = L(v) \quad \forall v \in H.$$

Dann folgt aus der Bilinearität von B :

$$0 = L(v) - L(v) = B(u, v) - B(u', v) = B(u - u', v) \quad \forall v \in H$$

und aus (4.2) speziell für $v = u - u' \in H$:

$$0 = B(u - u', u - u') \geq \alpha \|u - u'\|^2 \iff u = u'.$$

■

Satz 4.1.5 (Cauchy-Schwarz Ungleichung): *Sei H ein (reeller) Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Dann gilt:*

$$\langle x, y \rangle_H^2 \leq \langle x, x \rangle_H \langle y, y \rangle_H \quad \forall x, y \in H. \quad (4.8)$$

Beweis. Für alle $x, y \in H$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle_H = \langle x, x \rangle_H - 2\alpha \langle x, y \rangle_H + \alpha^2 \langle y, y \rangle_H. \quad (4.9)$$

Ist $\langle x, x \rangle_H = \langle y, y \rangle_H = 0$, setzen wir $\alpha := \langle x, y \rangle_H$ und erhalten

$$0 \leq -2\langle x, y \rangle_H \iff \langle x, y \rangle_H \leq 0.$$

Sei nun o. E. $\langle y, y \rangle_H \neq 0$. Dann setzen wir

$$\alpha = \frac{\langle x, y \rangle_H}{\langle y, y \rangle_H}$$

in (4.9) und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x \rangle_H - 2 \frac{\langle x, y \rangle_H^2}{\langle x, x \rangle_H} + \frac{\langle x, y \rangle_H^2}{\langle y, y \rangle_H} \\ &= \langle x, x \rangle_H - \frac{\langle x, y \rangle_H^2}{\langle x, x \rangle_H} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung $\langle x, y \rangle_H^2 \leq \langle x, x \rangle_H \langle y, y \rangle_H$.

■

Satz 4.1.6 (Riesz-Fréchet für separable Hilberträume): *Sei H ein separabler Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ und Norm $\|\cdot\|_H$. Ist ferner $L \in H'$ ein lineares stetiges Funktional auf H , dann gibt es ein $u \in H$, so dass*

$$\langle u, v \rangle_H = L(v) \quad \forall v \in H \quad (4.10)$$

und $\|u\|_H = \|L\|$.

Beweis. Die Existenz eines $u \in H$ für das (4.10) gilt, folgt direkt aus dem Lemma von Lax-Milgram für $B(u, v) = \langle u, v \rangle_H$. Ferner ist nach (4.8) für dieses u

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} |\langle u, v \rangle_H| \leq \sup_{\|v\|=1} \|u\| \|v\| = \|u\|$$

und somit speziell für $v = u \in H$

$$\|u\|^2 = |L(u)| \leq \|L\| \|u\| \leq \|u\|^2,$$

also $\|L\| = \|u\|$. ■

4.1.2 Fixpunktsätze

Bei der Untersuchung partieller Differentialgleichungen sind Fixpunktsätze ein unverzichtbares Hilfsmittel. Beginnen werden wir mit dem besonders starken Banach'schen Fixpunktsatz, der einen *eindeutigen* Fixpunkt garantiert. In den meisten Fällen werden wir uns aber auf die Sätze von Juliusz P. Schauder und Jean Leray zurückziehen, die unter weniger starken Voraussetzungen, zumindest noch die Existenz eines Fixpunktes garantieren.

Satz 4.1.7 (Banach'scher Fixpunktsatz): *Sei X ein Banachraum und $T : X \rightarrow X$ eine Kontraktion, d. h. es gibt ein $q \in [0, 1)$ mit*

$$\|Tu - Tv\|_X \leq \alpha \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (4.11)$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element $u_0 \in X$, sodass $Tu_0 = u_0$.

Beweis.

1. (Existenz:) Sei u ein beliebiger Punkt in X und definiere die Folge $(u_n)_{\mathbb{N}}$ rekursiv durch $u_1 = u$, $u_n = Tu_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung folgt dann mit (4.11) für $i \in \mathbb{N}$

$$\|u_{i+1} - u_i\| = \|Tu_i - Tu_{i-1}\| \leq q \|u_i - u_{i-1}\|$$

und induktiv

$$\|u_i - u_{i-1}\| \leq q^{i-2} \|u_2 - u_1\|.$$

Daher gilt für $k \geq n$

$$\begin{aligned}\|u_k - u_n\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^k u_i - u_{i-1} \right\| \\ &\leq \sum_{i=n+1}^k \|u_i - u_{i-1}\| \\ &\leq \|u_2 - u_1\| \sum_{i=n+1}^k q^{i-2} \\ &\leq \frac{q^{n-1}}{1-q} \|u_2 - u_1\| \rightarrow 0, \text{ für } n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

d. h. $(u_n)_{\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, die nach Voraussetzung in X konvergiert. Auch ist T stetig, sodass für $u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n = Tu,$$

d. h. u ein Fixpunkt ist.

2. (Eindeutigkeit:) Sei $v \in X$ ein weiterer Fixpunkt mit $Tv = v$. Dann ist wegen (4.11)

$$\|u - v\| = \|Tu - Tv\| \leq q \|u - v\|$$

und daher wegen $q < 1$:

$$\|u - v\| = 0 \iff u = v.$$

■

Satz 4.1.8 (Brouwer): *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex und kompakt. Ist $T : K \rightarrow K$ ein stetiger Operator, dann gibt es mindestens ein $u \in K$ mit $Tu = u$.*

Beweis. siehe [Wer07].

■

Satz 4.1.9 (Schauder): *Sei X ein Banachraum und $\emptyset \neq K \subset X$ abgeschlossen, beschränkt und konvex. Sei ferner T ein auf K definierter, stetiger und kompakter Operator mit*

$$T(K) \subset K.$$

Dann gibt es mindestens ein $u \in K$ mit $Tu = u$.

Beweis. Aufgrund der vorausgesetzten Kompaktheit des Operators T ist der Abschluss der Menge $T(K)$ kompakt, d. h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren $x_1, x_2, \dots, x_{r(n)}$ in $T(K)$, sodass

$$T(K) \subset \bigcup_{i=1}^{r(n)} B_i \quad \text{mit} \quad B_i = B_{\frac{1}{n}}(x_i).$$

Wähle nun n so groß, dass mindestens zwei verschiedene Kugeln zur Überdeckung von K notwendig sind und definiere $K_n := \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_{r(n)}\}$ als die konvexe Hülle der Kugelmittelpunkte $\{x_1, \dots, x_{r(n)}\}$, d. h. die Menge aller Linearkombinationen $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \dots + \lambda_{r(n)} x_{r(n)}$ mit

$$\sum_{i=1}^{r(n)} \lambda_i = 1 \text{ und } \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, r(n).$$

Dann sind die Mengen $K_n \subset K$ nach Definition nichtleer, endlichdimensional und konvex. Ferner sind sie als endliche Mengen in linearen normierten Räumen abgeschlossen und wegen

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{r(n)} \lambda_i x_i \right\| \leq \max_{1 \leq i \leq r(n)} \|x_i\| < \infty \quad \forall x \in K_n$$

auch beschränkt.

Betrachte nun die Funktion $F_n : K \rightarrow K_n$:

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{r(n)} \text{dist}(x, K \setminus B_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{r(n)} \text{dist}(x, K \setminus B_i)}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist F_n wohldefiniert, da jedes $x \in K$ in mindestens einer Kugel $B_{\frac{1}{n}}(x_i)$ liegt und nach Definition für hinreichend großes n nicht in allen B_i liegt. Ferner ist $F_n(x)$ für $x \in K$ eine Linearkombination der Elemente $x_1, x_2, \dots, x_{r(n)}$ und somit $F_n(K) \subset K_n$. Auch ist F_n als Komposition der stetigen Funktionen $\text{dist}(\cdot, B_i)$ selbst stetig und da für $x \in K$ entweder $x \in B_i$ oder $\text{dist}(x, K \setminus B_i) = 0$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \|F_n(x) - x\| &\leq \frac{\sum_{i=1}^{r(n)} \text{dist}(x, K \setminus B_i) \|x_i - x\|}{\sum_{i=1}^{r(n)} \text{dist}(x, K \setminus B_i)} \\ &\leq \frac{\sum_{\{i|x \in B_i\}} \text{dist}(x, K \setminus B_i) \|x_i - x\|}{\sum_{\{i|x \in B_i\}} \text{dist}(x, K \setminus B_i)} < \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Definiere nun die Operatoren

$$T_n : K_n \rightarrow K_n; \quad x \mapsto (F_n \circ T)x.$$

Offensichtlich ist T_n eine stetige Selbstabbildung einer konvexen, endlichdimensionalen, beschränkten und abgeschlossenen Menge, die homöomorph zum \mathbb{R}^n ist und erfüllt damit die Voraussetzungen des Brouwer'schen Fixpunktsatzes. Daher gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{x}_n \in K_n$ mit $T_n \tilde{x}_n = \tilde{x}_n$. Da T kompakt, F_n stetig und K_n abgeschlossen ist, hat die Folge

$(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_n$ eine konvergente Teilfolge $(\tilde{x}_{\pi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\tilde{x} \in K_n$. Wir zeigen nun, dass \tilde{x} ein Fixpunkt von T ist. Mit (4.12) erhalten wir

$$\|\tilde{x}_{\pi(n)} - T\tilde{x}_{\pi(n)}\| = \|T_n\tilde{x}_{\pi(n)} - T\tilde{x}_{\pi(n)}\| = \|F_n(T\tilde{x}_{\pi(n)}) - T\tilde{x}_{\pi(n)}\| < \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

für $n \rightarrow \infty$ und aus der Stetigkeit von T folgt

$$T\tilde{x}_{\pi(n)} \rightarrow T\tilde{x}, \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

■

Satz 4.1.10 (Leray-Schauder): *Seien X ein Banachraum und $T : X \rightarrow X$ kompakt. Ferner gebe es ein $r > 0$, so dass für alle $x \in X$ und $\sigma \in (0, 1)$, die $x = \sigma Tx$ erfüllen, gilt: $\|x\|_X \leq r$. Dann hat T einen Fixpunkt.*

Beweis. Setze $B := \overline{B_{2r}(0)}$ und definiere die Abbildung S durch

$$Sx = \begin{cases} Tx, & \text{für } \|Tx\|_X \leq 2r \\ 2r \cdot \frac{Tx}{\|Tx\|_X}, & \text{für } \|Tx\|_X \geq 2r \end{cases}.$$

Dann ist S eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Kugel B in sich. Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in B . Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat eine Teilfolge $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ mit $\|Tx_l\|_X \leq 2r$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Dann hat $(Sx_l)_{l \in \mathbb{N}}$ und damit auch $(Sx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Definition von S eine konvergente Teilfolge, da T kompakt ist.
2. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat eine Teilfolge $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ mit $\|Tx_l\|_X > 2r$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Dann ist $Sx_l = (A \circ T)x_l$, wobei A die auf $X \setminus \{0\}$ stetige Abbildung

$$A : X \setminus \{0\} \rightarrow X; x \mapsto 2r \frac{x}{\|x\|_X}$$

ist. T ist kompakt, daher hat $(Tx_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge und wegen der Stetigkeit von A damit auch $(Sx_l)_{l \in \mathbb{N}} = ((A \circ T)x_l)_{l \in \mathbb{N}}$.

In beiden Fällen hat $(Sx_l)_{l \in \mathbb{N}}$ also eine konvergente Teilfolge und somit ist S eine kompakte, stetige Selbstabbildung der konvexen abgeschlossenen und beschränkten Menge $B \subset X$. Nach dem Schauder'schen Fixpunktsatz 4.1.9 hat S daher einen Fixpunkt \tilde{x} . Angenommen, es wäre $\|T\tilde{x}\| > 2r$, dann wäre auch

$$\tilde{x} = S\tilde{x} = 2r \frac{T\tilde{x}}{\|T\tilde{x}\|_X} = \sigma Tx \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{2r}{\|T\tilde{x}\|_X} \in (0, 1)$$

und daher nach Voraussetzung

$$\|T\tilde{x}\|_X = \|\tilde{x}\|_X \leq r$$

im Widerspruch zur Annahme. Also ist

$$\|T\tilde{x}\|_X \leq 2r$$

und daher $\tilde{x} = S\tilde{x} = T\tilde{x}$, d. h. \tilde{x} ist ein Fixpunkt von T . ■

4.1.3 Sobolevräume und Distributionen

In vielen Bereichen der Analysis, insbesondere bei der Untersuchung partieller Differentialgleichungen, gelangt man in Situationen, in denen man Funktionen differenzieren möchte, die im klassischen Sinne nicht differenzierbar sind. Ein erster Schritt auf dem Weg zur Lösung dieses Problems gelang Sergei L. Sobolev durch Einführung der sogenannten Sobolevräume und dem Begriff der „schwachen Ableitung“. Motiviert durch die Untersuchung hyperbolischer Differentialgleichungen erweiterte er diese Idee zu einer rigorosen Lösung des Problems durch Übergang von den „gewöhnlichen differenzierbaren Funktionen“ zu einer größeren Klasse von Objekten, den sogenannten Distributionen oder verallgemeinerten Funktionen. Die Kernidee dabei besteht darin, Funktionen nicht mehr als punktweise definierte Objekte, sondern ihre „Wirkung“ auf andere, gutartige Funktionen, sogenannte Testfunktionen zu betrachten. Laurent Schwartz griff diese Idee auf und entwickelte die Theorie der Distributionen maßgeblich weiter und stellte damit Sobolev's Kalkül der verallgemeinerten Funktionen auf solide Basis.

Der folgende Abschnitt gibt nur einen kurzen Einblick in diese umfassende Theorie und wird die nötigen Begriffe und Sätze zur Verfügung stellen um die Bewegungsgleichungen mikropolarer Flüssigkeiten effektiv untersuchen zu können. Beginnen werden wir mit den Lebesgue-integrierbaren Funktionen und uns Schritt für Schritt zur Definition der Sobolevfunktionen und Distributionen vorarbeiten. Sofern nichts anderes behauptet wird ist Ω im Folgenden eine nichtleere, offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $n \in \mathbb{N}$.

Definition 4.1.4 (Lebesgue Räume): *Für $1 \leq p < \infty$ bezeichnen wir mit $L^p(\Omega)$ den linearen Raum der Äquivalenzklassen Lebesgue-messbarer Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, für die $|f|^p$ auf Ω Lebesgue-integrierbar ist. Dabei sind zwei Funktionen zueinander äquivalent, wenn sie fast überall im Sinne des Lebesgue-Maßes gleich sind. Das Funktional*

$$f \mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist eine Norm auf $L^p(\Omega)$.

Die Elemente in $L^p(\Omega)$ werden wir (wie üblich, aber nicht korrekt) weiterhin als Funktionen bezeichnen.

Lemma 4.1.1 (Höldersche Ungleichung): *Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$. Dann ist $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ und*

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (4.13)$$

Beweis. Der Beweis fußt auf der Young'schen Ungleichung. Siehe [Eva02]. ■

Korollar 4.1.2 (Minkowski-Ungleichung): *Für $1 \leq p \leq \infty$ und $f, g \in L^p(\Omega)$ ist auch $f + g \in L^p(\Omega)$ und*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \quad (4.14)$$

Beweis. Im Wesentlichen benutzt man die Hölderungleichung um die Funktion $|f + g|^{p-1}|f + g|$ geschickt abzuschätzen. Siehe [Eva02]. \blacksquare

Korollar 4.1.3 (Verallgemeinerte Höldersche Ungleichung): *Seien $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$ mit $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{r}$ und $u_j \in L^{p_j}(\Omega)$ für $j = 1, \dots, m$. Dann ist*

$$u = \prod_{j=1}^m u_j \in L^r(\Omega)$$

und es gilt:

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{j=1}^m \|u_j\|_{L^{p_j}(\Omega)}. \quad (4.15)$$

Beweis. Die Aussage folgt aus der Hölderschen Ungleichung durch Induktion über m . Siehe zum Beispiel [Ada03]. \blacksquare

Für $j = 1, 2$ mit $p_1 = p_2 = 2$ erhält man als Spezialfall der Hölder'schen Ungleichung die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Satz 4.1.11 (Der Satz von Riesz-Fischer): *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$, d. h.*

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Dann gibt es ein $f \in L^p(\Omega)$ und eine Teilfolge $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|f_l - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

und $f_l(x) \rightarrow f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$. Dann gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $n_i \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|f_k - f_m\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{-i} \quad \forall k, m \geq n_i. \quad (4.16)$$

Die daraus entstehende Teilfolge $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir im Folgenden wieder mit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und setzen

$$g_k := \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n|.$$

Wir zeigen nun, dass die Folge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ für fast alle $x \in \Omega$ punktweise konvergiert. Für diejenigen x , für die $(g_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, ist dann $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} und besitzt daher einen Grenzwert $f(x)$. Wir zeigen dann, dass die so definierte Funktion

$f \in L^p(\Omega)$ ist und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch in der Norm $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ gegen f konvergiert. Nach dem Lemma von Fatou, der Minkowski-Ungleichung (4.14) und (4.16) ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k^p(x) dx &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k^p(x) dx \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\leq \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \|f_{n+1} - f_n\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right)^p = 1 < \infty, \end{aligned}$$

d. h. $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k^p = \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k^p$ existiert für fast alle $x \in \Omega$. Dann ist

$$|f_k(x) - f_m(x)| \leq \sum_{n=m}^k |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = |g_k(x) - g_m(x)| \rightarrow 0 \text{ für } k, m \rightarrow \infty$$

und daher $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für fast alle $x \in \Omega$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} . Da \mathbb{R} vollständig ist, existiert somit für fast alle $x \in \Omega$ die punktweise Grenzfunktion

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Wenden wir das Lemma von Fatou erneut an, folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x) - f_m(x)|^p dx &= \int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_k(x) - f_m(x)|^p dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k(x) - f_m(x)|^p dx \\ &= \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k(x) - f_m(x)\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \\ &\leq \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{k-1} \|f_{n+1}(x) - f_n(x)\|_{L^p(\Omega)} \right)^p = \left(\sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} \right)^p < \infty. \end{aligned}$$

Also ist $f - f_m \in L^p(\Omega)$ und damit nach der Minkowski-Ungleichung (4.14) auch $f \in L^p(\Omega)$. Insbesondere folgt aus dieser Abschätzung

$$\|f - f_m\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x) - f_m(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty,$$

also $f_m \rightarrow f$ in $L^p(\Omega)$. ■

Da

$$\|u_n - u\| \leq \|u_n - u_{n_i}\| + \|u_{n_i} - u\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

konvergiert jede Cauchyfolge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die eine gegen u konvergente Teilfolge $(u_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ hat, selbst gegen denselben Grenzwert. Daher ist $L^p(\Omega)$ nach obigem Satz ein Banachraum und wie man leicht nachrechnet für $p = 2$ insbesondere ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

Definition 4.1.5: Mit $L^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir den linearen Raum der Äquivalenzklassen Lebesgue-messbarer Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ für die

$$\text{ess sup}\{|f(x)| : x \in \Omega\} \equiv \inf\{k > 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > k\}) = 0\} < \infty.$$

Definieren wir auf $L^\infty(\Omega)$ die Norm

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}\{|f(x)| : x \in \Omega\},$$

so wird $L^\infty(\Omega)$ ebenfalls zu einem Banachraum.

Eine reellwertige Funktion f auf Ω nennen wir *lokal integrierbar* auf Ω und schreiben $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$, falls f über jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ integrierbar ist. Analog definieren wir die Räume $L^p_{Loc}(\Omega)$, für $1 < p < \infty$. Unter dem Träger $\text{supp } f$ einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ versteht man den Abschluss der Menge $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$.

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sei $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ und

$$\mathfrak{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Wir nennen f k -mal stetig differenzierbar auf Ω und schreiben $f \in C^k(\Omega)$, falls die partiellen Ableitungen $\mathfrak{D}^\alpha f$ für alle $|\alpha| \leq k$ existieren und stetig sind. Insbesondere ist

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$$

und wir schreiben $C_0^\infty(\Omega)$ für die Menge aller Funktionen $f \in C^\infty$ mit $\text{supp } f \subset \Omega$. Falls Ω beschränkt ist, ist $\text{supp } f$ eine kompakte Teilmenge von Ω .

Lemma 4.1.4: $C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

Beweis. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [Ada03]. ■

Definition 4.1.6 (Hölderräume): Sei $0 < \lambda \leq 1$. Dann bezeichnen wir mit $C^{k,\lambda}(\Omega)$ den Raum aller Funktionen $u \in C^k(\Omega)$ für die folgende Norm endlich ist

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\mathfrak{D}^\alpha u| + \sum_{|\alpha|=m} \sup \left\{ \frac{|\mathfrak{D}^\alpha u(x) - \mathfrak{D}^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda} \middle| x, y \in \Omega, x \neq y \right\}.$$

Hölderräume sind bezüglich der sogenannten Höldernorm $\|\cdot\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)}$ vollständig.

Lemma 4.1.5 (Fundamentallemma der Variationsrechnung): Sei $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ und

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann ist $f = 0$ fast überall in Ω .

Beweis. Siehe [Ada03]. ■

Definition 4.1.7 (Schwache Ableitungen): Seien $f, g \in L^1_{Loc}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Wir nennen g die α -te schwache Ableitung der Funktion f auf Ω , falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f(x) \mathfrak{D}^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx$$

ist. In diesem Fall setzen wir $\mathfrak{D}^\alpha f := g$.

Definition 4.1.8 (Sobolevräume): Seien $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$. Mit $H_m^p(\Omega)$ bezeichnen wir den linearen Raum aller Funktionen $f \in L^p(\Omega)$ für die die schwache Ableitung $\mathfrak{D}^\alpha f$ bis zur Ordnung $|\alpha| \leq m$ existieren und in $L^p(\Omega)$ liegen. Das Funktional

$$f \longmapsto \|f\|_{H_m^p(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathfrak{D}^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.17)$$

ist eine Norm auf $H_m^p(\Omega)$.

Satz 4.1.12: $H_m^p(\Omega)$ ist ein Banachraum und für $1 < p < \infty$ reflexiv.

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_m^p(\Omega)$ eine Cauchyfolge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_k - f_n\|_{H_m^p(\Omega)} < \varepsilon \quad \forall k, n \geq n_0.$$

Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$ ist daher

$$\|\mathfrak{D}^\alpha f_k - \mathfrak{D}^\alpha f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_k - f_n\|_{H_m^p(\Omega)} < \varepsilon,$$

also $(\mathfrak{D}^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$. Nach Satz 4.1.11 ist $L^p(\Omega)$ vollständig und daher gibt es $f, f^\alpha \in L^p(\Omega)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathfrak{D}^\alpha f_n - f^\alpha\|_{L^p(\Omega)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Nun gilt für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f^\alpha(x) \varphi(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\mathfrak{D}^\alpha f_n)(x) \varphi(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_n(x) \mathfrak{D}^\alpha \varphi(x) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

d. h. nach Satz 4.1.5 ist f^α die α -te Ableitung von f und somit $f \in H_m^p(\Omega)$. Schließlich folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{H_m^p(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f^\alpha - f_n\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

also konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $H_m^p(\Omega)$ gegen f und somit ist $H_m^p(\Omega)$ vollständig. Für die Reflexivität siehe [Alt06]. ■

Mit Satz 4.1.3 erhalten wir daraus:

Korollar 4.1.6: Für $1 < p < \infty$ enthält jede abgeschlossene Kugel in $H_m^p(\Omega)$ eine schwach konvergente Teilfolge.

Bei der Diskussion der Bewegungsgleichungen mikropolarer Flüssigkeiten wollen wir uns in dieser Arbeit auf Dirichlet'sche Randbedingungen (d. h. $v = 0$ und $\omega = 0$ auf $\partial\Omega$) beschränken. Daher ist es zweckmäßig zur Lösung des Randwertproblems nur Funktionen zuzulassen, die am Rand von Ω verschwinden.

Definition 4.1.9: Mit $\overset{\circ}{H}_m^p(\Omega)$ bezeichnen wir den Abschluß der Menge $C_0^\infty(\Omega)$ in der $\|\cdot\|_{H_m^p(\Omega)}$ -Norm, d. h.:

$$\overset{\circ}{H}_m^p(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H_m^p(\Omega)} = \left\{ f \in H_m^p(\Omega) \mid \exists (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega) : \|\varphi_n - f\|_{H_m^p(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

Die Räume $H_m^2(\Omega)$ und $\overset{\circ}{H}_m^2(\Omega)$ ² sind Hilberträume vermöge dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{H_m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \mathfrak{D}^\alpha f(x) \cdot \mathfrak{D}^\alpha g(x) dx$$

und werden daher oft nur mit $H_m(\Omega)$ bzw. $\overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ bezeichnet. Auch kann man zeigen (vgl. [Alt06]), dass für ein beschränktes Gebiet Ω der Klasse $C^{0,1}$ (vgl. 4.1.14) gilt:

$$\overset{\circ}{H}_1(\Omega) = \{u \in H_1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (4.18)$$

Natürlich ist $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ auch reflexiv.

Definition 4.1.10: Sei $m > 0$, $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mit $H_{-m}^p(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum der linearen, stetigen Funktionale auf dem Raum $\overset{\circ}{H}_m^p(\Omega)$.

Die Räume $H_{-m}^2(\Omega)$ bezeichnet man häufig auch mit $H_{-m}(\Omega)$. Im Folgenden verallgemeinern wir die Theorie der Sobolevfunktionen und widmen uns der Distributionentheorie. Dazu führen wir zunächst im Raum $C_0^\infty(\Omega)$, dem Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, einen Konvergenzbegriff ein.

Definition 4.1.11: Eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ konvergiert gegen null, falls es eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ gibt, so dass

- (a) $\text{supp } \varphi_n \subset K$ für jedes $n \in \mathbb{N}$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}^\alpha \varphi_n = 0$ gleichmäßig für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

²In anderen Büchern findet man auch oft die Bezeichnungen $W^{m,p}(\Omega)$ bzw. $W_0^{m,p}(\Omega)$ für $H_m^p(\Omega)$ bzw. $\overset{\circ}{H}_m^p(\Omega)$.

Den Raum C_0^∞ zusammen mit dem so definierten Konvergenzbegriff nennen wir den Raum der „Testfunktionen“ und bezeichnen ihn mit \mathcal{D} .

Basierend auf dieser Definition können wir nun den klassischen Funktionsbegriff erweitern und führen den Begriff der Distribution sowie die Ableitung im Distributionensinn ein.

Definition 4.1.12 (Distributionen): Eine Funktional $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Distribution auf Ω , falls T linear, d. h.

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\otimes)$$

ist und für jede gegen null konvergente Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\otimes)$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = 0.$$

Die Menge der Distributionen auf Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Die „klassischen Funktionen“ sind in die Distributionen eingebettet, denn für jedes $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ist die Abbildung

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx$$

eine Distribution und definiert nach Lemma 4.1.5 eine lineare, injektive Abbildung

$$\Gamma : L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega); \quad f \mapsto T_f.$$

Distributionen die lokal integrierbaren Funktionen entsprechen nennt man regulär. Ein Beispiel für eine nicht reguläre Distribution ist die Dirac-Delta-Distribution (vgl. [Her07])

$$\delta(x_0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \varphi \mapsto \varphi(x_0), \quad \text{für ein } x_0 \in \Omega.$$

Definition 4.1.13 (Ableitung von Distributionen): Seien $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann ist die Abbildung $\mathfrak{D}^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathfrak{D}^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(\mathfrak{D}^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

eine Distribution. Wir nennen $\mathfrak{D}^\alpha T$ die α -te distributionelle Ableitung von T .

Beispiel 1: Für $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto |x|$ ist

$$T_f(\varphi) = \int_{-1}^1 |x| \varphi(x) \, dx.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} T_f(\varphi) &= (-1) \int_{-1}^1 |x| \frac{d}{dx} \varphi(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^0 x \varphi'(x) \, dx - \int_0^1 x \varphi(x) \, dx \\ &= - \int_{-1}^0 \varphi(x) \, dx + \int_0^1 \varphi(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \varphi(x) \, dx, \end{aligned}$$

d. h. die Signumfunktion $\operatorname{sgn}(x)$ die distributionelle Ableitung von f .

Definition 4.1.14 (Gebietsklassifizierung): Seien $0 \leq \alpha \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir sagen Ω ist von der Klasse $C^{k,\alpha}$, falls für jeden Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine Kugel $B_r(x_0)$ und eine bijektive Abbildung $\psi : B \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ existieren, sodass

- (a) $\psi(B \cup \Omega) \subset \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$
- (b) $\psi(B \cup \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}_+^n$
- (c) $\psi \in C^{k,\alpha}(B)$, $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$.

Ist der Rand von Ω glatt genug, sagen wir $\Omega \in C^{0,1}$, können wir die in 4.1.8 eingeführten Sobolevräume $H_m^p(\Omega)$ auch durch den Abschluß der Mengen $C^m(\overline{\Omega})$ in der Norm (4.17) definieren. Von diesem Standpunkt aus gesehen ist klar, dass, vorausgesetzt Ω ist glatt genug, die Menge $C^m(\overline{\Omega})$ dicht in $H_m^p(\Omega)$ liegt.

4.1.4 Einige Einbettungssätze und wichtige Abschätzungen

Eine erfolgversprechende Herangehensweise zur Lösung partieller Differentialgleichungen besteht in der Idee zunächst einen irgendwie gearteten schwachen Lösungsbegriff einzuführen (also zum Beispiel Sobolevfunktionen oder Distributionen als Lösungen zuzulassen) und dann diese „Lösungen“ in „klassische“ Funktionenräume, wie Räume stetiger Funktionen oder höherer Regularität einzubetten. Ein Schlüsselinstrument bei dieser Methode ist der Rellich’sche Auswahlsatz (vgl. [Ada03]). Dabei bezeichnen wir einen normierten Raum X als (stetig) eingebettet in einen normierten Raum Y und schreiben

$$X \hookrightarrow Y,$$

falls

- (i) X ein Unterraum von Y und
- (ii) $I : X \rightarrow Y$; $x \mapsto x$ stetig ist, d. h. es existiert eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\|Ix\|_Y \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Ist der lineare Operator I kompakt, so nennen wir X kompakt eingebettet in Y . Der Rellich’sche Auswahlsatz (vgl. [Ada03]) ermöglicht es uns nun die Sobolevräume $H_k^p(\Omega)$ unter bestimmten Voraussetzungen in Lebesgue, aber auch in stetige Funktionenräume kompakt einzubetten. Zur Motivation dieser Einbettung betrachten wir zu gegebenem f die partielle Differentialgleichung $Lu = f$ und suchen eine Lösung $u \in H_k(\Omega)$. Ein möglicher Ansatz ist sicher die Idee, die Lösung u durch

$$Lu_j = f_j \longrightarrow f \quad \text{für } (u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset H_k(\Omega) \text{ beschränkt}$$

zu approximieren. Schön wäre jetzt, wenn zumindest eine Teilfolge der Folge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in einem gewissen Sinne gegen die Lösung konvergieren würde. Genau hier setzt der Auswahlsatz an.

Satz 4.1.13: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und von der Klasse $C^{0,1}$. Dann gilt:

- (a) Ist $kp < n$ und $p^* = \frac{np}{n-kp}$, so ist $H_k^p(\Omega)$ stetig eingebettet in $L^{p^*}(\Omega)$ und kompakt eingebettet in $L^q(\Omega)$ für $q < p^*$.
- (b) Ist $0 \leq m < k - n/p < m + 1$ und $\alpha = k - m - n/p$, so ist $H_k^p(\Omega)$ stetig eingebettet in $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ und kompakt eingebettet in $C^{m,\beta}(\bar{\Omega})$ für $\beta < \alpha$.

Beweis. Siehe [Eva02]. ■

Lemma 4.1.7 (Spezialfall des Rellichen Auswahlssatzes): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist die Einbettung von $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ kompakt.

Beweis. Siehe [Mor66]. ■

Satz 4.1.14: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^n der Klasse C^m und sei u eine Funktion in $H_m^r(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $1 \leq r, q \leq \infty$. Für jedes $0 \leq j < m$ und $j/m \leq \theta \leq 1$ sei

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{m} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1 - \theta) \frac{1}{q},$$

dann gibt es eine Konstante $C = C(\Omega, r, q, m, j, \theta)$, so dass für $m - j - n/r < 0$:

$$\|\mathfrak{D}^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_m^r(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}. \quad (4.19)$$

Für $m - j - n/r \geq 0$ gilt (4.19) mit $\theta = j/m$.

Beweis. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [Maz11]. ■

Eine besonders interessante und für viele Anwendungen äußerst hilfreiche Abschätzung liefert die folgende Ungleichung.

Satz 4.1.15 (Poincare-Ungleichung): Seien Ω eine offene, beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n , $n > 0$ und $d = \text{diam}(\Omega) = \sup\{\text{dist}(x, y) : x, y \in \Omega\}$. Dann gilt für $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.20)$$

Beweis. Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Fixieren wir $i \in \{1, \dots, n\}$, so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ = \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt \\ = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt, \end{aligned}$$

wobei $x^* = \inf\{t : u(t, x_2, \dots, x_n) = 0, (t, x_2, \dots, x_n) \in \Omega\}$. Da $H_1(\Omega)$ ein (reeller) Hilbertraum ist können wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (4.8) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} u^2(x) &= u^2(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= \left| \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot 1 \, dt \right|^2 \\ &\leq \int_{x_i^*}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \right|^2 \, dt \cdot (x_i - x_i^*) \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 \, dx_i \cdot (x_i - x_i^*). \end{aligned}$$

Integration dieser Ungleichung bezüglich x_i liefert dann

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) \, dx_i &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 \, dx_i \cdot (x_i - x_i^*) \, dx_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 \, dx_i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_i - x_i^* \, dx_i \\ &\leq \frac{d^2}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 \, dx_i. \end{aligned}$$

Integration dieser Ungleichung bezüglich $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ liefert dann (4.20) für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $u \in C_0^\infty$. Nach Lemma 4.1.4 existiert nun zu jedem $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$. Gleichung (4.20) folgt nun für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ durch Übergang zum Grenzwert in

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

Insbesondere folgt aus diesem Satz:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathfrak{D}u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_1(\Omega).$$

Korollar 4.1.8: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann sind die Normen

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=1} \|\mathfrak{D}^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\|u\|_+ = \left(\sum_{|\alpha|=1} \|\mathfrak{D}^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

in $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ äquivalent.

Beweis. Die Beziehung $\|u\| \leq C_1 \cdot \|u\|$ folgt direkt aus der Definition der Normen; die Beziehung $\|u\| \leq C_2 \|u\|$ ist eine Konsequenz der Poincare Ungleichung. ■

Insbesondere können wir also $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ als den Abschluss der Menge $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm

$$\|u\|_1 = \left(\int_{\Omega} |\mathfrak{D}u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

definieren.

Lemma 4.1.9: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. Dann gilt für alle $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\mathfrak{D}u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.21)$$

Beweis. Nach Lemma 4.1.4 liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$, daher genügt es die Behauptung für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ zu beweisen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert nun:

$$\begin{aligned} u^2(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} u^2(t, x_2) dt = 2 \int_{-\infty}^{x_1} u(t, x_2) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_2) dt \\ u^2(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} u^2(x_1, t) dt = 2 \int_{-\infty}^{x_2} u(x_1, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t) dt, \end{aligned}$$

und daher

$$\max_{x_k \in \mathbb{R}} u^2(x_1, x_2) \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| u(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \right| dx_k \quad (k = 1, 2). \quad (4.22)$$

Mit (4.8) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u^4(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u^2(x) \cdot u^2(x) dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \max_{x_2 \in \mathbb{R}} u^2(x) dx_1 \int_{\mathbb{R}} \max_{x_1 \in \mathbb{R}} u^2(x) dx_2 \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} \left| u(x) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \right| dx \int_{\mathbb{R}^2} \left| u(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right| dx \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} u^2(x) dx \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \right|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für $a, b > 0$ gilt nun stets $2\sqrt{a \cdot b} \leq a + b$, sodass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u^4(x) dx &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} u^2(x) dx \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \right|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} u^2(x) dx \int_{\mathbb{R}^2} |\mathfrak{D}u(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

und mithin die Abschätzung (4.21) bewiesen ist. ■

Lemma 4.1.10: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt. Dann gilt für alle $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq \sqrt{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\mathfrak{D}u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}. \quad (4.23)$$

Beweis. Wie im vorhergehenden Lemma reicht es (4.23) für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ zu beweisen. Mit dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung folgt analog zu (4.22):

$$\max_{x_3 \in \mathbb{R}} u^2(x) \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| u(x) \frac{\partial u}{\partial x_3}(x) \right| dx_3,$$

sodass nach (4.21)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} u^4(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^4(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \right) dx_3 \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x) dx_1 dx_2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}^2(x) + \frac{\partial u}{\partial x_1}^2(x) \right) dx_1 dx_2 \right) dx_3 \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x) dx_1 dx_2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathfrak{D}u(x)|^2 dx_1 dx_2 \right) dx_3 \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} \max_{x_3 \in \mathbb{R}} u^2(x) dx_1 dx_2 \int_{\mathbb{R}^3} |\mathfrak{D}u(x)|^2 dx \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} \left| u(x) \frac{\partial u}{\partial x_3}(x) \right| dx \int_{\mathbb{R}^3} |\mathfrak{D}u(x)|^2 dx \end{aligned}$$

ist. Wenden wir nun wieder die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (4.8) an, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} u^4(x) dx &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} \left| u(x) \frac{\partial u}{\partial x_3}(x) \right| dx \int_{\mathbb{R}^3} |\mathfrak{D}u(x)|^2 dx \\ &\leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u}{\partial x_3}^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathfrak{D}u(x)|^2 dx \\ &\leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathfrak{D}u(x)|^2 dx \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

und daraus (4.23). ■

Insbesondere folgt aus (4.23) für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ der Klasse C^1 :

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_1(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}. \quad (4.24)$$

Lemma 4.1.11: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt. Dann gilt für alle $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq 48^{\frac{1}{6}} \|\mathfrak{D}u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.25)$$

Beweis. Siehe [Lad87]. ■

In den nachfolgenden Kapiteln werden wir vorwiegend einige Spezialfälle der Sätze 4.1.13 und 4.1.14 benötigen, die wir nun hier gesondert vorstellen.

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ wie in Satz 4.1.13 gilt

- (1) $H_1(\Omega)$ ist (stetig) eingebettet in $L^6(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_1(\Omega)}$$

(vgl. Lemma 4.1.11)

- (2) $H_1(\Omega)$ ist kompakt eingebettet in $L^4(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_1(\Omega)}$$

(vgl. (4.24) und (4.20))

- (3) $H_2(\Omega)$ ist (stetig) eingebettet in $C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$ und $C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$ kompakt eingebettet in $C(\overline{\Omega})$; tatsächlich gilt

$$\text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C \|u\|_{H_2(\Omega)}.$$

4.2 Mögliche Randbedingungen mikropolarer Flüssigkeiten

Die Theorie der mikropolaren Flüssigkeiten verallgemeinert die klassische Theorie der Navier-Stokes-Gleichung und versucht ein wesentlich größeres Gebiet von Phänomenen zu erklären. Aufgrund dieser Tatsache ist nicht zu erwarten, dass man ein Standardrepertoire von Rand- und Anfangsbedingungen für beliebige Situationen finden kann. Die aus mathematischer Sicht einfachste Idee, die man bei der Wahl der Randwerte untersuchen kann, ist zunächst einmal die Dirichlet'sche Randbedingung

$$v = 0 \quad \text{bzw.} \quad \omega = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Betrachten wir zum Beispiel eine Flüssigkeit die sich mit konstanter Geschwindigkeit, also stationär, durch ein Rohr bewegt, so erscheinen diese Bedingungen auf den ersten Blick durchaus sinnvoll, da die Flüssigkeitsteilchen am Rand des Rohres aufgrund der Reibung haften bleiben. Bei genauerer Untersuchung muss man sich allerdings fragen, ob die mitbewegten Partikel am Rand tatsächlich auch keine Eigenrotation aufweisen. Durchaus denkbar wäre, dass die Partikel durch den Geschwindigkeitsunterschied in der Flüssigkeit die Innenwand des Rohres „entlang rollen“. Diese Tatsache würde eher einer Randbedingung wie

$$v = 0 \quad \omega = \omega_0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

entsprechen. Analog können wir aber auch für freie Flüssigkeiten argumentieren. Auch hier wird der Geschwindigkeitsunterschied der Flüssigkeit zwischen ihrem Rand und ihrem Inneren im Allgemeinen zu einer Rotation der von der Flüssigkeit mitbewegten Partikel am Rand führen. Während also die Randbedingung an die Geschwindigkeit v physikalisch motiviert durchaus sinnvoll erscheinen, ist die Bedingung an ω_b eher undurchsichtig.

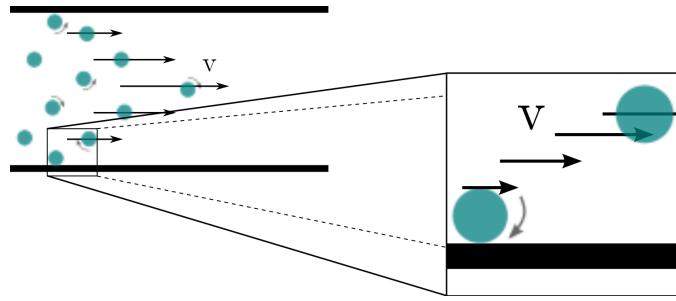


Abbildung 4.1: Rohrströmung - Die Partikel am Rand der Flüssigkeit werden durch die Reibung an der Innenwand des Rohres haften bleiben und durch den Geschwindigkeitsunterschied an ihrer Ober- und Unterseite zu rotieren beginnen.

Ein möglicher Zugang zum Verständnis der Randbedingungen ist die Beschreibung der Kräfte und Momente am Rand der Flüssigkeit

$$T \cdot n = t_b, \quad C \cdot n = c_b, \quad \text{auf } \partial\mathcal{G}.$$

Sicherlich sollten die Normalkräfte auf dem Rand nach dem *actio=reactio* Prinzip verschwinden, so dass die erste Bedingung auf

$$v = v_b$$

auf dem Rand führt und somit ebenfalls unsere Vermutung bzgl. der Rohrströmung stützt. Für die Microrotation findet man eine ausführliche Diskussion in [Aer64]. Dort werden Bedingungen der Form

$$C \cdot n = A(\omega - \frac{1}{2} \operatorname{curl} v_b)$$

für eine Matrix $A = (a_{ij})$ mit reellen Einträgen untersucht. Aus den beiden Grenzfällen $a_{ij} \rightarrow \infty$ und $a_{ij} \rightarrow 0$ erhalten wir:

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{curl} v_b \quad \text{bzw.} \quad C \cdot n = 0.$$

Diese Bedingung enthält die Dirichlet'schen Randbedingungen als Spezialfall für $v_b =$, impliziert aber darüber hinaus die starke Forderung, dass die Eigenrotation der Partikel am Rand der Flüssigkeit nur durch die Bewegung des Randes verursacht werden. Eine unseren Einwänden besser angepasste Randbedingung für die Mikrorotation wäre zum Beispiel (vgl. [Aer64])

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \operatorname{curl} v.$$

Dahinter verbirgt sich die Annahme, dass die Mikrorotation der Partikel durch die Rotation der Flüssigkeitsteilchen hervorgerufen wird. In der Suche nach passenden Rand- und Anfangsbedingungen für mikropolare Flüssigkeiten liegt sowohl ein Segen, als auch ein Fluch dieser Theorie. Zu Rechtfertigung einer Wahl von Randbedingung bleibt zunächst keine andere Möglichkeit, als die Lösung des zugehörigen Randwertproblems mit dem realen Verhalten von mikropolaren Flüssigkeiten, wie etwa Blut, zu vergleichen. Wie Kirwan und Newman in [Kir69] an verschiedenen Beispielen zeigen, können verschiedene Kombinationen von Rand- und Anfangsbedingungen bei festen Viskositätskoeffizienten

und andersherum auch verschiedene Kombinationen der Viskositätskoeffizienten bei festen Rand- und Anfangsbedingungen zu drastisch unterschiedlichen Geschwindigkeitsprofilen führen. Die Möglichkeit, die Randbedingungen unabhängig von gegebenen Anfangsbedingungen und Viskositätskoeffizienten an gegebene Phänomene anzupassen, ist eine der interessanten und spannenden Facetten dieser Theorie.

Im Folgenden werden wir uns trotz obiger Einwände zunächst dem stationären, inkompressiblen Fall zusammen mit den klassischen Dirichlet'schen Randbedingungen

$$v = 0, \quad \omega = 0, \quad \text{auf } \partial\mathcal{G}. \quad (4.26)$$

widmen.

4.3 Stationäre Dirichlet'sche Randbedingungen

In diesem Abschnitt werden wir das zugegebener Maßen einfachste Randwertproblem, das homogene Dirichlet'sche Randwertproblem für inkompressible und isotherme mikropolare Flüssigkeiten diskutieren und analysieren. Dabei ist das vorrangiges Ziel die Existenz einer Lösung mit möglichst hoher Regularität zu beweisen und Bedingungen abzuleiten unter denen diese Lösungen eindeutig sind. Wir werden uns dazu der Idee anschließen, zunächst eine schwache Formulierung des Randwertproblems zu konstruieren und zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen an die Viskositätskoeffizienten, eine eindeutige Lösung dieser Formulierung existiert. Anschließend werden wir mit Erkenntnissen aus der Theorie partieller elliptischer Differentialgleichungen beweisen, dass diese Lösung eine durchaus höhere Regularität aufweist. Bei unseren Untersuchungen gehen wir von einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit hinreichend glattem Rand aus und wiederholen zunächst einige Ergebnisse aus der Theorie klassischer stokescher Flüssigkeiten, die wir bei unserer Analyse benötigen werden.

4.3.1 Das Gleichungssystem von Stokes

Das Stokessche Randwertproblem

$$-\nu \Delta v + \nabla p = k \text{ in } \Omega \quad (\nu > 0),$$

$$\operatorname{div} v = g \text{ in } \Omega,$$

$$v = \phi \text{ in } \partial\Omega.$$

Dabei sind $v = v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$ und $k = k(x) = (k_1(x), k_2(x), k_3(x))$ vektorwertige und $p = p(x)$ eine skalare Funktion für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen.

Proposition 1 (vgl. [Tem77], Chapter I, Proposition 1.1): *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{D}'(\Omega)$ der Dualraum zum Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$. Ferner sei $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$, für $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ($i = 1, \dots, n$), dann ist*

$$T_{\mathcal{F}}(v) = 0$$

für alle $v \in \mathcal{V} = \{u = (u_1, \dots, u_n) : u_i \in \mathcal{D}'(\Omega), i = 1, \dots, n, \operatorname{div} u = 0\}$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für

$$\mathcal{F} = \nabla p$$

für ein $p \in \mathcal{D}'$.

Proposition 2 (vgl. [Tem77], Chapter I, Proposition 1.2): *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse $C^{0,1}$. Gilt für eine Distribution p*

$$\mathfrak{D}^\alpha p \in L^2(\Omega), \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } 0 \leq |\alpha| \leq 1,$$

dann ist $p \in L^2(\Omega)$ und es gilt

$$\|p\|_{L^2(\Omega) \setminus R} \leq c(\Omega) \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)},$$

für

$$L^2(\Omega) \setminus R = \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p(x) dx = 0 \right\}.$$

Sind

$$\mathfrak{D}^\alpha p \in H_{-1}(\Omega), \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } 0 \leq |\alpha| \leq 1,$$

so gilt ebenfalls $p \in L^2(\Omega)$ mit

$$\|p\|_{L^2(\Omega) \setminus R} \leq c(\Omega) \|\nabla p\|_{-1}.$$

Ist Ω lediglich eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , so ist in beiden Fällen $p \in L^2_{loc}(\Omega)$.

Bemerkung 3: Aus den beiden vorhergehenden Propositionen folgt, dass für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Klasse $C^{0,1}$ und $\mathcal{F} \in H_{-1}(\Omega)$ (oder $\mathcal{F} \in L^2(\Omega)$) mit $T_{\mathcal{F}}(v) = 0$ für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt:

$$\mathcal{F} = \nabla p$$

für ein $p \in L^2(\Omega)$ (oder $p \in H_{-1}(\Omega)$).

Satz 4.3.1: [vgl. [Tem77]] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ($n = 2, 3$), eine Menge der Klasse C^r für $r = \max(m+2, 2)$ und $m \geq -1$. Ferner seien $f \in H_m^p(\Omega)$, $g \in H_{m+1}^q(\Omega)$ und $\varphi \in H_{m+2-1/q}^q(\partial\Omega)$ für $1 < q < \infty$ vorgegeben mit

$$\int_{\Omega} g(x) dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \vec{n} ds.$$

Dann gibt es eindeutige Funktion v und eine bis auf eine Konstante eindeutige Funktion p , so dass (v, p) eine Lösung des Stokesschen Randwertproblems ist und

$$v \in H_{m+2}^q(\Omega) \text{ sowie } p \in H_{m+1}^q(\Omega).$$

Insbesondere gilt

$$\|u\|_{H_{m+2}^q(\Omega)} + \|p\|_{H_{m+1}^q(\Omega) \setminus R} \leq C \left\{ \|f\|_{H_m^q(\Omega)} + \|g\|_{H_{m+1}^q(\Omega)} + \|\varphi\|_{H_{m+2-1/q}^q(\partial\Omega)} \right\},$$

für eine von q , ν , m und Ω abhängige Konstante $C \geq 0$.

Für mehr Details zu den Stokesschen Gleichungen und ihrem nichtlinearen Pendant, den Navier-Stokes Gleichungen verweisen wir den Leser an [Hut95], [Cho93], [Ari89], [Var07], [Lio96] [Gal11] und [Tem77], sowie die in diesen Büchern angegebene Literatur.

4.3.2 Das stationäre Dirichlet Problem ohne Wärmeleitung

Wir konzentrieren uns in diesem Abschnitt auf stationäre, viskose und inkompressible mikropolare Flüssigkeiten ohne Wärmeaustausch. Wie wir in Kapitel (a) unter (2.4) und (2.26) bereits gesehen haben, entsprechen diese Eigenschaften den Bedingungen

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \text{ bzw. } \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad \mu > 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{div} q = 0,$$

sodass sich die Bewegungsgleichungen mikropolärer Flüssigkeiten (vgl. Seite 46) auf

$$\operatorname{div} v = 0,$$

$$\rho(v \cdot \nabla) v = -\nabla p + (\mu + \mu_c^v) \Delta v + 2\mu_c^v \operatorname{curl} \omega + \rho k,$$

$$\rho I(c \cdot \nabla) \omega = 2\mu_c^v (\operatorname{curl} v - 2\omega) + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \omega + (c_d + c_a) \Delta \omega + \rho g$$

reduzieren. Nehmen wir die (homogenen) Dirichlet'sche Randbedingungen hinzu und setzen $\nu = \mu/\rho$, $\nu_c^v = \mu_c^v/\rho$, erhalten wir das Randwertproblem:

Das homogene Dirichlet'sche Randwertproblem

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{4.27}$$

$$-(\nu + \nu_c^v) \Delta v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = 2\nu_c^v \operatorname{curl} \omega + k, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} -(c_d + c_a) \Delta \omega + (\omega \cdot \nabla) \omega - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \omega + 4\nu_c^v \omega \\ = 2\nu_c^v \operatorname{curl} v + g \end{aligned} \tag{4.29}$$

in Ω mit

$$v = 0 \tag{4.30}$$

$$\omega = 0 \tag{4.31}$$

auf $\partial\Omega$.

Zur Erinnerung: $v(x) = v(x_1, x_2, x_3)$, $p(x)$ und $\omega(x) = \omega(x_1, x_2, x_3)$ sind die Geschwindigkeit, der Druck und die Mikrorotation der Partikel in der Flüssigkeit. Die Funktionen $k(x) = k(x_1, x_2, x_3)$ und $g(x) = g(x_1, x_2, x_3)$ representieren die Volumen- und Oberflächenkräfte, während die positiven Konstanten ν , ν_c^v , c_0 , c_a , c_d die Materialeigenschaften der Flüssigkeit charakterisieren; ν entspricht der üblichen Newton'schen Viskosität und

ν_c^v, c_0, c_a, c_d sind neue Viskositätskoeffizienten die letztlich auf das Mikrorotationsfeld ω zurückgehen³. Im Folgenden gehen wir stets von der Annahme

$$c_0 + c_d > c_a \quad (4.32)$$

aus.

Für $p \geq 1$ bezeichnen wir mit $H_m^p(\Omega)$ den Abschluss der Menge $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ($n = 1, 3$) in der Norm

$$\|f\|_{H_m^p(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

und mit $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ den Abschluss der Menge $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ in der Norm

$$\|u\|_1 = \left(\int_{\Omega} |\mathfrak{D}u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner definieren wir $\mathcal{V} = \{u \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u = 0\}$ und den Raum V als den Abschluss von \mathcal{V} in $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Insbesondere setzen wir für $v, u, \omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

$$b(v, u, \omega) := ((v \cdot \nabla) u, \omega)_{L^2(\Omega)}. \quad (4.33)$$

Wie man leicht nachrechnet ist

$$b(\cdot, \cdot, \cdot) : \overset{\circ}{H}_1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}_1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}_1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine multilinear Abbildung und es gilt:

$$\begin{aligned} b(v, \omega, \omega) &= \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(x) \omega_j(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} v_i(x) \omega_j(x) \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(x) dx \implies b(v, \omega, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Definition 4.3.1 (Schwache Lösungen): *Wir sagen das Tripel (v, p, ω) ist eine schwache Lösung des Randwertproblems (4.27)-(4.31), falls $v \in V$, $p \in L^2(\Omega)$, $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} p(x) dx = 0,$$

und die folgenden Integralgleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} (\nu + \nu_c^v)(v, \varphi)_{H_1(\Omega)} + b(v, v, \varphi) - (p, \operatorname{div} \varphi)_{L^2(\Omega)} \\ = 2\nu_c^v (\operatorname{curl} \omega, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (k, \varphi)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

³Für $\nu_c^v = 0$ entkoppeln die Differentialgleichungen und für $\nu_R = c_0 = c_a = c_d = 0$ und $g = \omega = 0$ geht das System (4.27)-(4.29) in das klassische Navier-Stokes-System der Hydrodynamik über.

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$,

$$(v, \nabla \xi)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (4.36)$$

für alle $\xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} & (c_a + c_d)(\omega, \psi)_{H_1(\Omega)} + b(v, \omega, \psi) + (c_0 + c_d - c_a)(\operatorname{div} \omega, \operatorname{div} \psi)_{L^2(\Omega)} \\ & + 4\nu_c^v(\omega, \psi)_{L^2(\Omega)} = 2\nu_c^v(\operatorname{curl} v, \psi)_{L^2(\Omega)} + (g, \psi)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

für alle $\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Wie man leicht sieht, erfüllt jede klassische aber insbesondere auch jede Distributionslösung (entsprechende Regularität vorausgesetzt) von (4.27)-(4.31) die Bedingungen (4.35)-(4.37). Für den eigentlichen Beweis zur Existenz einer Lösung werden wir den Fixpunkt-Satz von Schauder (Satz 4.1.9) benutzen. Dazu konstruieren wir mit dem nachfolgenden Hilfsproblem zunächst eine Lösung $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ für das Mikrorotationsfeld und definieren basierend auf dieser Lösung einen kompakten Operator A, der uns die Anwendung von Satz 4.1.9 ermöglichen wird.

Lemma 4.3.1 (Hilfsproblem): Sei $d = \operatorname{diam} \Omega$. Für $g \in L^2(\Omega)$ und $v \in V$ hat

$$\begin{aligned} & (c_a + c_d)(\omega, \psi)_{H_1(\Omega)} + b(v, \omega, \psi) + (c_0 + c_d - c_a)(\operatorname{div} \omega, \operatorname{div} \psi)_{L^2(\Omega)} + 4\nu_c^v(\omega, \psi)_{L^2(\Omega)} \\ & = 2\nu_c^v(\operatorname{curl} v, \psi)_{L^2(\Omega)} + (g, \psi)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

für alle $\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ als schwache Formulierung des Randwertproblems (4.29), (4.31) eine eindeutige Lösung $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Insbesondere gelten die folgenden Abschätzungen:

$$(c_a + c_d)\|\omega\|_1 \leq 2\nu_c^v\|v\|_{L^2(\Omega)} + d\|g\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.38)$$

$$2\nu_c^v\|\omega\|_{L^2(\Omega)} \leq \nu_c^v\|v\|_1 + \frac{1}{2}\|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.39)$$

Beweis. Da alle Terme in (4.37) auf $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ stetige Formen in ψ sind, können wir in (4.37) von $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ zu $\psi \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ übergehen. Dann setze für $(\omega, \psi) \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

$$\begin{aligned} B(\omega, \psi) := & (c_a + c_d)(\omega, \psi)_{H_1(\Omega)} + b(v, \omega, \psi) \\ & + (c_0 + c_d - c_a)(\operatorname{div} \omega, \operatorname{div} \psi)_{L^2(\Omega)} + 4\nu_c^v(\omega, \psi)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

so ist B nach Definition des Skalarprodukts, (3.61) in Satz 3.2.1, (4.33) und unserer Annahme (4.32) eine positive Bilinearform. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (4.8) und der Poincare-Ungleichung (4.20) folgt nun:

$$\begin{aligned} |B(\omega, \psi)| & \leq (c_a + c_d)|(\omega, \psi)_{H_1(\Omega)}| + |((v \cdot \nabla) \omega, \psi)_{L^2(\Omega)}| \\ & + (c_0 + c_d - c_a)|(\operatorname{div} \omega, \operatorname{div} \psi)_{L^2(\Omega)}| + 4\nu_c^v|(\omega, \psi)_{L^2(\Omega)}| \\ & \leq (c_a + c_d)\|\omega\|_1\|\psi\|_1 + \|(v \cdot \nabla) \omega\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \\ & + (c_0 + c_d - c_a)\|\operatorname{div} \omega\|_{L^2(\Omega)}\|\operatorname{div} \psi\|_{L^2(\Omega)} + 4\nu_c^v\|\omega\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \beta\|\omega\|_1\|\psi\|_1, \end{aligned}$$

mit $\beta > 0$. Auch gilt (4.34) so dass mit Korollar 4.1.8

$$\begin{aligned} B(\omega, \omega) &= (c_a + c_d) |(\omega, \omega)_{H_1(\Omega)}| + |((v \cdot \nabla) \omega, \omega)_{L^2(\Omega)}| \\ &\quad + (c_0 + c_d - c_a) |(\operatorname{div} \omega, \operatorname{div} \omega)_{L^2(\Omega)}| + 4\nu_c^v |(\omega, \omega)_{L^2(\Omega)}| \\ &= (c_a + c_d) \|\omega\|_1^2 + (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4\nu_c^v \|\omega\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha \|\omega\|_1^2 \end{aligned}$$

mit $\alpha > 0$. Daher ist B eine stetige, koerzive Bilinearform auf $\overset{\circ}{H}_1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Ferner ist die rechte Seite von (4.37) ein stetiges, lineares Funktional auf $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$, sodass die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung direkt aus dem Lemma von Lax-Milgram (4.1.4) folgen.

Setzen wir $\psi = \omega$ in (4.37), dann ist mit (4.8)

$$\begin{aligned} (c_a + c_d) \|\omega\|_1^2 + 4\nu_c^v \|\omega\|_{L^2(\Omega)}^2 &= 2\nu_c^v (\operatorname{curl} v, \omega)_{L^2(\Omega)} + (g, \omega)_{L^2(\Omega)} - (c_0 + c_d - c_a) \|\operatorname{div} \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2\nu_c^v (\operatorname{curl} v, \omega)_{L^2(\Omega)} + (g, \omega)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \begin{cases} 2\nu_c^v \|v\|_1 \|\omega\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)} \\ 2\nu_c^v \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\omega\|_1 + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)} \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Die Abschätzungen folgen dann mit der Poincare-Ungleichung (4.20). \blacksquare

Wir tätigen nun einen ersten Schritt zum Existenzbeweis einer Lösung (v, p, ω) von (4.35)-(4.37). Dazu definieren wir für festes $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ die Abbildung $\tilde{A} : V \rightarrow V$, $v \mapsto \tilde{A}v$ durch die folgende Beziehung

$$(\nu + \nu_c^v) (\tilde{A}v, \varphi)_{H_1(\Omega)} = b(v, \varphi, v) + 2\nu_c^v (\operatorname{curl} \omega, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (k, \varphi)_{L^2(\Omega)}. \quad (4.41)$$

Nach Satz 4.1.6 (Riesz-Fréchet) ist \tilde{A} wohldefiniert. Der von uns bereits angekündigte Operator A entspricht dem Operator \tilde{A} für die eindeutige schwache Lösung $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ des Hilfsproblems aus Satz 4.3.1. Im Folgenden werden wir nun zwei Abschätzungen ableiten und damit zeigen, dass A vollstetig ist und somit nach Satz 4.1.2, aufgrund der Reflexivität von $\overset{\circ}{H}_1(\omega)$, kompakt ist.

Lemma 4.3.2: Für jedes $v_i \in V$, $\omega_i \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ ($i = 1, 2$) mit

$$(\nu + \nu_c^v) (\tilde{A}v_i, \varphi)_{H_1(\Omega)} = b(v_i, \varphi, v_i) + 2\nu_c^v (\operatorname{curl} \omega_i, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (k, \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad (4.42)$$

für alle $\varphi \in V$, gilt:

$$(\nu + \nu_c^v) \left\| \tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2 \right\|_1 \leq \left(\|v_1\|_{L^4(\Omega)} + \|v_2\|_{L^4(\Omega)} \right) \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} + 2\nu_c^v d \|\omega_1 - \omega_2\|_1.$$

Beweis. Durch Subtraktion der Gleichung (4.42) für v_i, ω_i , ($i = 1, 2$) erhalten wir

$$\begin{aligned} &(\nu + \nu_c^v) (\tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2, \varphi)_{H_1(\Omega)} \\ &= b(v_1, \varphi, v_1) - b(v_2, \varphi, v_2) + 2\nu_c^v (\operatorname{curl} (\omega_1 - \omega_2), \varphi)_{L^2(\Omega)} \\ &= b(v_1, \varphi, v_1 - v_2) + b(v_1, \varphi, v_2) - b(v_2, \varphi, v_2) + 2\nu_c^v (\operatorname{curl} (\omega_1 - \omega_2), \varphi)_{L^2(\Omega)} \\ &= b(v_1, \varphi, v_1 - v_2) + b(v_1 - v_2, \varphi, v_2) + 2\nu_c^v (\operatorname{curl} (\omega_1 - \omega_2), \varphi)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun speziell $\varphi = \tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2$ und benutzen die verallgemeinerte Hölder- (4.15) sowie die Poincare-Ungleichung (4.20) folgt

$$\begin{aligned}
& (\nu + \nu_c^v) \left\| \tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2 \right\|_1^2 \\
&= b(v_1, \tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2, v_1 - v_2) + b(v_1 - v_2, \tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2, v_2) \\
&\quad + 2\nu_c^v \left(\operatorname{curl}(\omega_1 - \omega_2), \tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2 \right)_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|v_1\|_{L^4(\Omega)} \left\| \nabla(\tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2) \right\|_{L^2(\Omega)} \|v_1 - v_2\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad + \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \left\| \nabla(\tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2) \right\|_{L^2(\Omega)} \|v_2\|_{L^1(\Omega)} \\
&\quad + 2\nu_c^v \|\operatorname{curl}(\omega_1 - \omega_2)\|_{L^2(\Omega)} \left\| \tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2 \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\|v_1\|_{L^4(\Omega)} + \|v_2\|_{L^4(\Omega)} \right) \left\| \tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2 \right\|_1 \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \\
&\quad + 2d\nu_c^v \|\omega_1 - \omega_2\|_1 \left\| \tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2 \right\|_1.
\end{aligned}$$

Division mit $\left\| \tilde{A}v_1 - \tilde{A}v_2 \right\|_1$ liefert nun die Behauptung. ■

Lemma 4.3.3: Sind $v_i \in V$, $\omega_i \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ für $i = 1, 2$ so, dass

$$\begin{aligned}
& (c_a + c_d) (\omega_i, \psi)_{H_1(\Omega)} + b(v_i, \omega_i, \psi) + (c_0 + c_d - c_a) (\operatorname{div} \omega_i, \operatorname{div} \psi)_{L^2(\Omega)} + 4\nu_c^v (\omega_i, \psi)_{L^2(\Omega)} \\
&= 2\nu_c^v (v_i, \operatorname{curl} \psi)_{L^2(\Omega)} + (g, \psi)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

für alle $\psi \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$, dann gilt:

$$(c_a + c_d) \|\omega_1 - \omega_2\|_1 \leq \left[C(\Omega) \|\omega_1\|_1 + 2\nu_c^v |\Omega|^{\frac{1}{4}} \right] \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)}. \tag{4.44}$$

Beweis. Der Beweis läuft analog zum vorhergehenden Lemma. Nach Subtraktion der beiden Gleichungen (4.43) gilt:

$$\begin{aligned}
& (c_a + c_d) (\omega_1 + \omega_2, \psi)_{H_1(\Omega)} + b(v_1 - v_2, \omega_1, \psi) + b(v_2, \omega_1 - \omega_2, \psi) \\
&+ (c_0 + c_d - c_a) (\operatorname{div}(\omega_1 - \omega_2), \operatorname{div} \psi)_{L^2(\Omega)} + 4\nu_c^v (\omega_1 - \omega_2, \psi)_{L^2(\Omega)} \\
&= 2\nu_c^v (v_1 - v_2, \operatorname{curl} \psi)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass b linear in jeder Komponente ist und daher

$$\begin{aligned}
b(v_1, \omega_1, \psi) - b(v_2, \omega_2, \psi) &= b(v_1 - v_2, \omega_1, \psi) + b(v_2, \omega_1, \psi) - b(v_2, \omega_2, \psi) \\
&= b(v_1 - v_2, \omega_1, \psi) + b(v_2, \omega_1 - \omega_2, \psi).
\end{aligned}$$

Speziell für $\psi = \omega_1 - \omega_2 \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ folgt nun wegen $b(v, \omega, \omega) = 0$ für $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

$$(c_a + c_d) \|\omega_1 - \omega_2\|_1^2 \leq |b(v_1 - v_2, \omega_1, \omega_1 - \omega_2)| + 2\nu_c^v (v_1 - v_2, \operatorname{curl}(\omega_1 - \omega_2))_{L^2(\Omega)}.$$

Nun gilt nach (4.21) und (4.20)

$$\|\omega\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\omega\|_1 \quad \forall \omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega) \quad (4.45)$$

und daher folgt mit der verallgemeinerten Hölder- (4.15) sowie (4.20)

$$\begin{aligned} (c_a + c_d) \|\omega_1 - \omega_2\|_1^2 &\leq \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \omega_1\|_{L^2(\Omega)} \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^4(\Omega)} \\ &\quad + 2\nu_c^v \|1\|_{L^4(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{L^4(\Omega)} \|\operatorname{curl}(\omega_1 - \omega_2)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(\Omega) \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \|\omega_1\|_1 \|\omega_1 - \omega_2\|_1 \\ &\quad + 2\nu_c^v |\Omega|^{\frac{1}{4}} \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \|\omega_1 - \omega_2\|_1. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun wieder durch Division mit $\|\omega_1 - \omega_2\|_1$. ■

Lemma 4.3.4: Seien $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ die eindeutige Lösung von

$$(c_a + c_d) (\omega, \psi)_{H_1(\Omega)} + b(v, \omega, \psi) + (c_0 + c_d - c_a) (\operatorname{div} \omega, \operatorname{div} \psi)_{L^2(\Omega)} + 4\nu_c^v (\omega, \psi)_{L^2(\Omega)} \quad (4.46)$$

$$= 2\nu_c^v (\operatorname{curl} v, \psi)_{L^2(\Omega)} + (g, \psi)_{L^2(\Omega)} \quad (4.47)$$

für alle $\psi \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ und $A : V \longrightarrow V; v \longmapsto Av$ definiert durch

$$(\nu + \nu_c^v) (Av, \varphi)_{H_1(\Omega)} = b(v, \varphi, v) + 2\nu_c^v (\operatorname{curl} \omega, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (k, \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad (4.48)$$

für alle $\varphi \in V$. Dann gilt für alle $v_1, v_2 \in V$

$$\|Av_1 - Av_2\|_1 \leq C \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)}, \quad (4.49)$$

für

$$C = (\nu + \nu_c^v)^{-1} \left\{ \|v_1\|_{L^4(\Omega)} + \|v_2\|_{L^4(\Omega)} + \frac{2\nu_c^v d}{c_a + c_d} \left(C(\Omega) \|\omega_1\|_1 + 2\nu_c^v |\Omega|^{\frac{1}{4}} \right) \right\}. \quad (4.50)$$

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 4.3.2 für $\tilde{A} = A$ und Anwendung von Lemma 4.3.3. ■

Lemma 4.3.5: Die Abbildung $A : V \longrightarrow V$ definiert durch (4.48) ist vollstetig.

Beweis. Sei $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge in $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Nach Definition müssen wir zeigen, dass die zugehörige Bildfolge $(Av_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ normkonvergent ist. Da schwach konvergente Folgen insbesondere normbeschränkt sind, folgt aus dem Spezialfall des Rellichen Auswahlssatzes 4.1.7 und Abschätzung 4.1.10 offensichtlich, dass $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^4(\Omega)$ normkonvergent ist. Setzen wir nun in (4.47) $\psi = \omega$ erhalten wir mit (4.15) und (4.20)

$$\begin{aligned} (c_a + c_d) \|\omega\|_1^2 &\leq 2\nu_c^v \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\omega\|_1 + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(2\nu_c^v |\Omega|^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^4(\Omega)} + d \|g\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\omega\|_1, \end{aligned}$$

also

$$\|\omega\|_1^2 \leq (c_a + c_d)^{-1} \left(2\nu_c^v |\Omega|^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^4(\Omega)} + d \|g\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\omega\|_1.$$

Kombinieren wir nun die Abschätzung (4.49) mit C wie in (4.50) und unsere gewonnene Abschätzung erhalten wir

$$\|Av_1 - Av_2\|_1 \leq C' \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \quad (4.51)$$

mit einer Konstanten C_1 , die linear von $\|v_1\|_{L^4(\Omega)}$, $\|v_2\|_{L^4(\Omega)}$ und ebenso von ν , ν_c^v , c_a , c_d , g , $|\Omega|$ und d abhängt. Für die schwach konvergente Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt somit:

$$\begin{aligned} \|Av_n - Av_m\|_1 &\leq C' \|v_n - v_m\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{2}C' \|v_n - v_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\mathfrak{D}(v_n - v_m)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \\ &\leq 2\sqrt{2}C' \|v_n - v_m\|_{L^2(\Omega)} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mathfrak{D}v_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \tilde{C} \|v_n - v_m\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0, \text{ für } n, m \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

nach Lemma 4.1.7 und 4.1.10. Also ist $(Av_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Hilbertraum $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ und daher normkonvergent. \blacksquare

Lemma 4.3.6: Für $\lambda \in [0, 1]$ und A definiert durch (4.48) sei $v \in V$ die Lösung der Gleichung

$$v = \lambda Av. \quad (4.52)$$

Dann gilt

$$\|v\|_1 \leq \lambda(2\nu)^{-1} \|g\|_{L^2(\Omega)} + \lambda d\nu^{-1} \|k\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.53)$$

Beweis. Für $\lambda = 0$ ist die Aussage trivial. Sei also $\lambda > 0$. Da

$$\begin{aligned} (v, \operatorname{curl} \psi)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} v_i(x) \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \varepsilon_{ijk} u_k(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon_{kji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) u_k(x) dx = (\operatorname{curl} v, \psi)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

für alle $v \in V$ und $\psi \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ ist, gilt für die eindeutige Lösung $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ von (4.43) nach Lemma 4.3.1 die Ungleichung (4.39). Setzen wir nun $Av = \lambda^{-1}v$ und $\psi = v$ in (4.48), erhalten wir mit (4.8) und (4.20)

$$\begin{aligned} \lambda(\nu + \nu_c^v) \|v\|_1^2 &= 2\nu_c^v (\operatorname{curl} \omega, v)_{L^2(\Omega)} + (k, v)_{L^2(\Omega)} \\ &= 2\nu_c^v (\omega, \operatorname{curl} v)_{L^2(\Omega)} + (k, v)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2\nu_c^v \|\operatorname{curl} v\|_{L^2(\Omega)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)} + d \|k\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(2\nu_c^v \|\omega\|_{L^2(\Omega)} + d \|k\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_1, \end{aligned}$$

mithin

$$(\nu + \nu_c^v) \|v\|_1 \leq 2\lambda\nu_c^v \|\omega\|_{L^2(\Omega)} + d\lambda \|k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Zusammen mit (4.39) folgt nun

$$(\nu + \nu_c^v) \|v\|_1 \leq \lambda\nu_c^v \|v\|_1 + 2^{-1}\lambda \|g\|_{L^2(\Omega)} + d\lambda \|k\|_{L^2(\Omega)}$$

und somit

$$\nu \|v\|_1 \leq (\nu + \nu_c^v \underbrace{(1 - \lambda)}_{\geq 0}) \|v\|_1 \leq 2^{-1}\lambda \|g\|_{L^2(\Omega)} + d\lambda \|k\|_{L^2(\Omega)}.$$

■

Wir gelangen nun zum Kern dieses Abschnitts und zeigen die Existenz und unter geeigneten Voraussetzungen an die Viskositätskoeffizienten, auch die Eindeutigkeit einer schwachen Lösung (v, p, ω) von (4.35)-(4.37).

Satz 4.3.2 (Existenz einer schwachen Lösung): *Sind $k, g \in L^2(\Omega)$, dann hat das Dirichlet'sche Randwertproblem (4.27) - (4.31) eine schwache Lösung.*

Beweis. Die Existenz einer Lösung $\omega \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ von (4.37) folgt aus Lemma 4.3.1. Zu diesem ω definiere nun A wie in (4.48), dann ist A nach Lemma 4.3.5 vollstetig und wegen Satz 4.1.2 damit ein kompakter Operator auf V . Insbesondere folgt aus Lemma 4.3.6 für alle $v \in V$ und $\sigma \in [0, 1]$ mit $v = \sigma Av$:

$$\|v\|_1 \leq (2\nu)^{-1} \|g\|_{L^2(\Omega)} + d\nu^{-1} \|k\|_{L^2(\Omega)} =: r \iff v \in B_r(0) \subset V.$$

Der Fixpunktsatz von Leray-Schauder (vgl. Satz 4.1.10) liefert daher ein $v \in V$ mit $Av = v$, für das

$$\|v\|_1 \leq (2\nu)^{-1} \|g\|_{L^2(\Omega)} + d\nu^{-1} \|k\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.54)$$

Für die Existenz einer schwachen Lösung (v, p, ω) des Dirichlet'schen Randwertproblems bleibt somit zu zeigen, dass es ein $p \in L^2(\Omega)$ gibt mit

$$\int_{\Omega} p(x) dx = 0$$

für die (4.35) mit diesem v erfüllt ist. Dazu setzen wir (vgl. (4.28))

$$\hat{k}(v) = 2\nu_c^v \operatorname{curl} \omega + k + (\nu + \nu_c^v) \Delta v - (v \cdot \nabla) \cdot v.$$

Dann ist offensichtlich $\hat{k} \in H_{-1}(\Omega)$ dem Dualraum zu $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ und $T_{\hat{k}}(v) = 0$ für alle $v \in \mathcal{V}$. Nach Bemerkung 3 gibt es daher ein $p \in L^2(\Omega)$ mit

$$\hat{k} = \nabla p \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} p(x) dx = 0.$$

■

Satz 4.3.3 (Eindeutigkeit der schwachen Lösung): *Ist die Newton'sche Viskosität ν groß genug, so ist die schwache Lösung des Dirichlet'schen Randwertproblems aus Satz 4.3.2 eindeutig.*

Beweis. Seien (v_1, p_1, ω_1) und (v_2, p_2, ω_2) zwei schwache Lösungen von (4.27)-(4.31). Dann gilt für $i = 1, 2$ und alle $\varphi \in V$

$$(\nu + \nu_c^v)(v_i, \varphi)_{H_1(\Omega)} + b(v_i, v_i, \varphi) = 2\nu_c^v (\operatorname{curl} \omega_i, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (k, \varphi)_{L^2(\Omega)}, \quad (4.55)$$

sowie für alle $\psi \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

$$\begin{aligned} (c_a + c_d)(\omega_i, \psi)_{H_1(\Omega)} + b(v_i, \omega_i, \psi) + (c_0 + c_d - c_a)(\operatorname{div} \omega_i, \operatorname{div} \psi)_{L^2(\Omega)} + 4\nu_c^v (\omega_i, \psi)_{H_1(\Omega)} \\ = 2\nu_c^v (\operatorname{curl} v_i, \psi)_{L^2(\Omega)} + (g, \psi)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Subtrahieren wir die ersten beiden Gleichungen (4.55) voneinander und setzen $\varphi = v_1 - v_2 \in V$ erhalten wir mit der verallgemeinerten (4.15), Lemma 4.1.10 und (4.20)

$$\begin{aligned} & (\nu + \nu_c^v) \|v_1 - v_2\|_1^2 \\ &= 2\nu_c^v (\omega_1 - \omega_2, \operatorname{curl} (v_1 - v_2))_{L^2(\Omega)} - b(v_1 - v_2, v_2, v_1 - v_2) \\ &\leq 2\nu_c^v \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{curl} (v_1 - v_2)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_2\|_{L^2(\Omega)} \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)}^2 \\ &\leq 2\nu_c^v d \|\omega_1 - \omega_2\|_1 \|v_1 - v_2\|_+ \left(\sqrt{2} \|v_1 - v_2\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\mathfrak{D}(v_1 - v_2)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \right)^2 \\ &\leq 2 \left[\|v_2\|_1 \|v_1 - v_2\|_1 + \nu_c^v d \|\omega_1 - \omega_2\|_1 \right] \|v_1 - v_2\|_1, \end{aligned}$$

d. h.

$$(\nu + \nu_c^v) \|v_1 - v_2\|_1 \leq 2 \|v_2\|_1 \|v_1 - v_2\|_1 + 2\nu_c^v d \|\omega_1 - \omega_2\|_1. \quad (4.57)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $(v, \operatorname{curl} \psi)_{L^2(\Omega)} = (\operatorname{curl} v, \psi)_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in V$, $\psi \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ und b linear in jeder Komponente ist; mithin

$$\begin{aligned} b(v_1, v_1, \psi) - b(v_2, v_2, \psi) &= b(v_1 - v_2, v_2, \psi) - b(v_1, v_2, \psi) + b(v_1, v_1, \psi) \\ &= b(v_1 - v_2, v_2, \psi) + b(v_1, v_1 - v_2, \psi). \end{aligned}$$

Subtraktion der letzten beiden Gleichungen (4.56) liefert nun für $\psi = \omega_1 - \omega_2 \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

$$\begin{aligned} & (c_a + c_d) \|\omega_1 - \omega_2\|_1^2 + b(v_1 - v_2, \omega_2, \omega_1 - \omega_2) + 4\nu_c^v \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2\nu_c^v (\operatorname{curl} v_1 - v_2, \omega_1 - \omega_2)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Mit der verallgemeinerten Hölderungleichung (4.15), der Poincareungleichung (4.20) und (4.45) folgt nun:

$$\begin{aligned} & (c_a + c_d) \|\omega_1 - \omega_2\|_1^2 \\ &= b(v_2 - v_1, \omega_2, \omega_1 - \omega_2) - 4\nu_c^v \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\nu_c^v (\operatorname{curl} v_1 - v_2, \omega_1 - \omega_2)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |b(v_1 - v_2, \omega_2, \omega_1 - \omega_2)| + 2\nu_c^v (\operatorname{curl} v_1 - v_2, \omega_1 - \omega_2)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \omega_2\|_{L^2(\Omega)} \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^4(\Omega)} + 2\nu_c^v \|\operatorname{curl} (v_1 - v_2)\|_{L^2(\Omega)} \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left[C(\Omega) \|\omega_2\|_1 + 2\nu_c^v d \right] \|v_1 - v_2\|_1 \|\omega_1 - \omega_2\|_1, \end{aligned}$$

d. h.

$$(c_a + c_d) \|\omega_1 - \omega_2\|_1 \leq \left[C(\Omega) \|\omega_2\|_1 + 2\nu_c^v d \right] \|v_1 - v_2\|_1. \quad (4.58)$$

Kombinieren wir (4.57) und (4.58) folgt

$$\begin{aligned} & (\nu + \nu_c^v) \|v_1 - v_2\| \\ & \leq 2 \left\{ \|v_2\|_1 + \nu_c^v d (c_a + c_d)^{-1} \left[C(\Omega) \|\omega_2\|_1 + 2\nu_c^v d \right] \right\} \|v_1 - v_2\|_1. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Auch gilt mit (4.38), (4.20) und (4.54)

$$\begin{aligned} \|\omega_2\|_1 & \leq (c_a + c_d)^{-1} \left\{ 2\nu_c^v \|v\|_{L^2(\Omega)} + d \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ & \leq (c_a + c_d)^{-1} \left\{ 2\nu_c^v d \|v\|_1 + d \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ & \leq (c_a + c_d)^{-1} \left\{ 2\nu_c^v d \left[(2\nu)^{-1} \|g\|_{L^2(\Omega)} + d\nu^{-1} \|k\|_{L^2(\Omega)} \right] + d \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ & \leq (c_a + c_d)^{-1} \left\{ 2\nu_c^v d^2 \nu^{-1} \|k\|_{L^2(\Omega)} + d(\nu_c^v \nu^{-1} + 1) \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Zusammengenommen folgt aus (4.59), (4.60) und (4.54)

$$(\nu + \nu_c^v) \|v_1 - v_2\|_1 \leq C \|v_1 - v_2\|_1 \quad (4.61)$$

mit

$$\begin{aligned} C &= \left[2d\nu^{-1} + 4d^3 C(\Omega) (c_a + c_d)^{-2} \right] \nu^{-1} \|k\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left[\nu^{-1} + 2\nu_c^v d^2 C(\Omega) (c_a + c_d)^{-2} (\nu_c^v \nu^{-1} + 1) \right] \|g\|_{L^2(\Omega)} + 2\nu_c^v d. \end{aligned}$$

Ist nun ν so groß, dass $\nu_c^v + \nu > C$, impliziert (4.61)

$$u_1 = u_2.$$

■

Wie schon in Abschnitt 4.1.4 angekündigt versuchen wir nun die gefundene Lösung in Räume höherer Regularität einzubetten. Dabei erwenden wir einerseits die Erkenntnisse aus 4.1.4 und andererseits bekannte Regularitätseigenschaften elliptischer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Satz 4.3.4 (Regularität der schwachen Lösung): *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.3.2 gilt*

$$u \in H_2^2(\Omega), \quad p \in H_1^2(\Omega) \text{ und } \omega \in H_2^2(\Omega).$$

Insbesondere gilt

$$\|u\|_{H_2^2(\Omega)} + \|p\|_{H_1^2(\Omega)} + \|\omega\|_{H_2^2(\Omega)} \leq F(\|k\|_{L^2(\Omega)}, \|g\|_{L^2(\Omega)}), \quad (4.62)$$

für eine stetige, monoton wachsende Funktion F , mit $F(0, 0) = 0$.

Beweis. Wir schreiben das Dirichlet'sche Randwertproblem (4.27)-(4.31) in der Form

$$\begin{cases} -(\nu + \nu_c^v)\Delta v + \nabla p = k + 2\nu_c^v \operatorname{curl} \omega - (v \cdot \nabla)v =: \tilde{k} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{Prob 1})$$

$$\begin{cases} -(c_a + c_d)\Delta\omega - (c_0 + c_d - c_a)\nabla \operatorname{div} \omega + 4\nu_c^v \omega \\ \quad = g + 2\nu_c^v \operatorname{curl} v - (v \cdot \nabla)\omega =: \tilde{g} & \text{in } \Omega, \\ \omega = 0 & \text{in } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{Prob 2})$$

Betrachten wir zunächst das erste Problem (Prob 1) in (v, p) zu gegebenem $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Als Spezialfall des Stokesschen Randwertproblems können wir darauf Satz 4.3.1 anwenden und erhalten

$$\|v\|_{H_2^q(\Omega)} + \|p\|_{H_1^q(\Omega)} \leq C \|\tilde{k}\|_{L^q(\Omega)}, \quad (4.63)$$

für $q > 1$ und $\tilde{k} = k + 2\nu_c^v \operatorname{curl} \omega - (v \cdot \nabla)v$, mit $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ und $v \in V$. Wählen wir nun $q = \frac{3}{2}$ in (4.63), folgt aus der Einbettung $\overset{\circ}{H}_1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ (vgl. Lemma 4.1.11) und der Hölderungleichung (4.13)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(v(x) \cdot \nabla)v(x)|^{\frac{3}{2}} dx &\leq C \int_{\Omega} |v(x)|^{\frac{3}{2}} |\nabla v(x)|^{\frac{3}{2}} dx \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |v(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{3}{4}} \\ &\leq \tilde{C} \left(\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

mithin

$$\|(v \cdot \nabla)v\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq \tilde{C} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \tilde{C} \|v\|_1^2. \quad (4.64)$$

Nun sind nach Voraussetzung $k \in L^2(\Omega)$ und $\omega \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Dann ist $k + 2\nu_c^v \operatorname{curl} \omega \in L^2(\Omega) \subset L^{3/2}(\Omega)$ und somit $\tilde{k} \in L^{3/2}(\Omega)$. Aus (4.63) folgt daher

$$v \in H_2^{3/2}(\Omega) \text{ und } p \in H_1^{3/2}(\Omega).$$

Auch gilt $H_2^{3/2}(\Omega) \hookrightarrow H_1^3(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ (vgl. [Ada03]), sodass mit (4.13)

$$\|(v \cdot \nabla)v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} |v(x)|^2 |\nabla v(x)|^2 dx \leq C \left(\int_{\Omega} |v(x)|^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^3 dx \right)^{\frac{2}{3}}$$

und daher

$$\|(v \cdot \nabla)v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^3(\Omega)} \leq \tilde{C} \|v\|_1 \|v\|_{H_2^{3/2}(\Omega)}. \quad (4.65)$$

Zusammen mit $k + 2\nu_c^v \operatorname{curl} \omega \in L^2(\Omega)$ folgt daraus $\tilde{k} \in L^2(\Omega)$ und nach (4.63) für $q = 2$:

$$v \in H_2^2(\Omega) \text{ und } p \in H_1^2(\Omega).$$

Betrachten wir nun das Problem (Prob 2) in ω zu gegebenem $v \in H_2^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\|(v \cdot \nabla)\omega\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} |v(x)|^2 |\nabla \omega(x)|^2 dx \leq C \operatorname{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|^2 \int_{\Omega} |\nabla \omega(x)|^2 dx$$

und somit wegen $H_2^2(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1/2}(\bar{\Omega})$

$$\|(v \cdot \nabla)\omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|\omega\|_1 \leq \tilde{C} \|v\|_{H_2^2(\Omega)} \|\omega\|_1. \quad (4.66)$$

Daher ist

$$\tilde{g} = g + 2\nu_c^v \operatorname{curl} v - (v \cdot \nabla)\omega \in L^2(\Omega).$$

Nun ist (Prob 2) ein elliptisches partielles Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für deren eindeutige Lösung (vgl. [Eva02], Section 6.3, Theorem 4) ω gilt:

$$\omega \in H_2^2(\Omega) \text{ und } \|\omega\|_{H_2^2(\Omega)} \leq C \|\tilde{g}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.67)$$

Kombinieren wir (4.63) für $q = 2$ mit (4.65), (4.54) und nehmen (4.67), sowie (4.60) für ω statt ω_2 hinzu, erhalten wir direkt die Abschätzung (4.62). ■

Anhang A

Anhang

A.1 Vektor- und Tensoridentitäten

In Teil A des Anhangs finden sich essentielle Nebenrechnungen und Identitäten, deren Beweis mehr einer mathematischen Fingerübung entspricht, als dass sie das Verständnis der im Hauptteil behandelten Themen erleichtert. Im Wesentlichen werden dabei die bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen mikropolarer Flüssigkeiten auftretenden Skalarprodukte berechnet.

A.1.1 Ergänzungen zur Vektoranalysis

Für $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$; $(x, t) \mapsto f(x, t)$ und $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$; $(x, t) \mapsto F(x, t)$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{div} (f(x, t), F(x, t)) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (f(x, t) F_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x, t) \right) F(x, t) + f(x, t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x) \\ &= F(x, t) \cdot \nabla_x f(x, t) + f(x, t) \operatorname{div} F(x, t).\end{aligned}\tag{A.1}$$

In Kapitel 2 haben wir die substantielle Ableitung

$$\frac{D\phi}{Dt}(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla_x) \phi(x, t)$$

einer skalaren oder vektoriellen Größe $\phi(x, t)$ eingeführt. Ist $x : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^3$; $t \mapsto x = x(t)$ der Ort eines Teilchens und $v = v(x, t) = \dot{x}(t)$ die Geschwindigkeit des Teilchens am

Ort x zur Zeit t , so gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} (x \times v) &= \frac{D}{Dt} (\varepsilon_{ijk} x_j v_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{Dx_j}{Dt} \right) v_k + \varepsilon_{ijk} x_j \left(\frac{Dv_k}{Dt} \right) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} + v_l \frac{\partial x_j}{x_l} \right) v_k + \varepsilon_{ijk} x_j \left(\frac{Dv_k}{Dt} \right) \\
 &= \varepsilon_{ijk} (v_j + v_l \delta_{jl}) v_k + \varepsilon_{ijk} x_j \left(\frac{Dv_k}{Dt} \right) \\
 &= \varepsilon_{ijk} v_j v_k + \varepsilon_{ijk} x_j \left(\frac{Dv_k}{Dt} \right) \\
 &= \varepsilon_{ijk} x_j \left(\frac{Dv_k}{Dt} \right) = x \times \left(\frac{Dv}{Dt} \right). \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

A.1.2 Das Levi-Civita-Symbol alias der ε -Tensor

Bekanntlich ist das Levi-Civita Symbol definiert durch (vgl. (1.2))

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (ijk) \text{ eine gerade Permutation von } (123) \text{ ist.} \\ -1, & \text{falls } (ijk) \text{ eine ungerade Permutation von } (123) \text{ ist.} \\ 0, & \text{falls mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Durch direktes Nachrechnen zeigt man leicht, dass

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix}. \tag{A.3}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} &= \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{l2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{l3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{vmatrix} \\
 &= \left| \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{l1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{l2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{l3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{pmatrix} \right| \\
 &= \begin{vmatrix} \delta_{is}\delta_{ls} & \delta_{is}\delta_{ms} & \delta_{is}\delta_{ns} \\ \delta_{js}\delta_{ls} & \delta_{js}\delta_{ms} & \delta_{js}\delta_{ns} \\ \delta_{ks}\delta_{ls} & \delta_{ks}\delta_{ms} & \delta_{ks}\delta_{ns} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} &= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kk} \end{vmatrix} \\
 &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kk} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{ik} - \delta_{km}\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{kk}\delta_{jl}\delta_{im} \\
 &= 3\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jm}\delta_{il} - 3\delta_{jl}\delta_{im} \\
 &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im} \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{jl}\delta_{ij} = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il}. \tag{A.6}$$

A.1.3 Das Tensorskalarprodukt $\langle A, B \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}$

Das in Kapitel 2 bei der Herleitung eingeführte Produkt

$$\langle A, B \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} = \text{tr}(AB^T)$$

zweier Tensoren $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ hat die schöne Eigenschaft, dass bzgl. dieses Skalarproduktes symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen orthogonal zueinander stehen. Für einen schiefsymmetrischen Tensor W und einen symmetrischen Tensor S gilt nämlich

$$\begin{aligned}
 \langle S, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} &= \text{tr}(SW^T) = \text{tr}(WS^T) \\
 &= \text{tr}(WS) \\
 &= \text{tr}(SW) = -\text{tr}(SW^T) \\
 &= -\langle S, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \implies \langle S, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} = 0. \tag{A.7}
 \end{aligned}$$

A.1.4 Ergänzungen zu Kapitel 3

Die Ergebnisse zur Beschaffenheit der Spannungstensoren mikropolarer Flüssigkeiten haben wir in Kapitel 4.50 benutzt um die Bewegungsgleichungen (3.1) zu konkretisieren. Dabei haben wir die Berechnung einiger autretender Terme übersprungen und reichen sie

nun an dieser Stelle nach. Es ist

$$\begin{aligned}
(1) \quad & 2 \operatorname{axl}(\operatorname{skew} T) \\
&= \epsilon_{ijk} \left(\left[-p + \lambda \operatorname{tr} D \right] \delta_{kj} + 2\mu D_{jk} + 2\mu_c^v (B - D)_{kj} \right) \\
&= \mu \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) + \mu_c^v \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + 2\epsilon_{mkj}\omega_m \right) \\
&= \mu \left(-\epsilon_{ikj} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) + \mu_c^v \left(\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \epsilon_{ikj} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) + 4\mu_c^v \delta_{im} \omega_m \\
&= \mu \left(-(\operatorname{curl} v)_i + (\operatorname{curl} v)_i \right) + \mu_c^v \left((\operatorname{curl} v)_i + (\operatorname{curl} v)_i \right) + 4\mu_c^v \omega_i \\
&= 4\mu_c^v \left(\omega - \frac{1}{2} \operatorname{curl} v \right) \\
&= -4\mu_c^v \operatorname{axl}(\mathcal{W} + L) \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \langle M, \nabla \omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \\
&= \langle c_0 \cdot \operatorname{tr}(\omega) \cdot \mathbb{1} + 2c_d \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) + 2c_a \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right), \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \rangle \\
&= c_0 \operatorname{tr}(\omega)^2 + c_d \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)^2 + c_d \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + c_a \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)^2 - c_a \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \\
&= c_0 \operatorname{tr}(\omega)^2 + (c_d + c_a) \langle \mathfrak{D}\omega, \mathfrak{D}\omega \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + (c_d - c_a) \langle \mathfrak{D}\omega, \mathfrak{D}\omega^T \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Auch gilt mit (A.5):

$$\begin{aligned}
\langle W, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{curl} v, \operatorname{curl} v \rangle &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \\
&= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \\
&= \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 2 \langle W, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}
\end{aligned}$$

Damit können wir nun auch den letzten Term berechnen:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \langle \text{sym } T, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + \langle \text{skew } T, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} = \langle T, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \\
 &= \langle [-p + \lambda \operatorname{tr} D] \mathbb{1} + 2\mu D + 2\mu_c^v (W + \mathcal{W}), L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \\
 &= [-p + \lambda \operatorname{div} v] \langle \mathbb{1}, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + 2\mu \langle D, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \\
 &\quad + 2\mu_c^v (\langle W, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + \langle \mathcal{W}, L \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}) \\
 &= [-p + \lambda \operatorname{div} v] \operatorname{div} v + 2\mu \langle D, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} + 2\mu_c^v \langle W, W \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} - 2\mu_c^v \epsilon_{mji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \omega_m \\
 &= -p \operatorname{div} v + \lambda(\operatorname{div} v)^2 + 2\mu \langle D, D \rangle_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \\
 &\quad + \mu_c^v \langle \operatorname{curl} v, \operatorname{curl} v \rangle - 2\mu_c^v \langle \operatorname{curl} v, \omega \rangle. \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

A.2 Weitergehende Sätze

Bei der Untersuchung des Dirichlet'schen Randwertproblems für mikropolare Flüssigkeiten haben wir in Kapitel 4 insbesondere den Riesz'schen Darstellungssatz und das Lemma von Lax-Milgramm auf separablen Hilberträumen eingeführt. Dabei hatten wir bereits bemerkt, dass im Allgemeinen auf die Separabilität der Räume verzichtet werden kann. Zur Bestätigung dieser Bemerkung werden wir in diesem Abschnitt eine allgemeine Formulierung dieser Sätze geben.

A.2.1 Der Riesz'sche Darstellungssatz

Satz A.2.1 (Riesz'scher Darstellungssatz): *Sei H ein Hilbertraum und $L \in H'$. Dann gibt es genau ein $u \in H$ mit*

$$L(v) = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H. \tag{A.11}$$

Beweis.

- (1) (Existenz:) Sei $N := \{v \in H | L(v) = 0\}$ der Kern von L . Da $L : H \rightarrow \mathbb{K}$ stetig ist gilt für $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $v_n \rightarrow v$:

$$0 = L(v_n) \rightarrow L(v),$$

d. h. $v \in N$ und daher ist N ein abgeschlossener, linearer Teilraum von H . Ist $N = H$, so ist L das Nullfunktional und wir können $u = 0$ wählen. Sei also N ein echter Teilraum von H . Dann ist $H = N \oplus N^\perp$ und wir wählen ein $z \in N^\perp$ mit $L(z) = 1$. Für beliebiges $v \in H$ gilt dann

$$L(v - L(v)z) = L(v) - L(v)L(z) = 0, \quad \text{d. h. } v - L(v)z \in N.$$

Folglich ist

$$0 = \langle z, v - L(v)z \rangle \iff \langle z, v \rangle = L(v)\langle z, z \rangle \iff L(v) = \langle \frac{z}{\|z\|^2}, v \rangle,$$

d. h. wir können

$$u = \frac{z}{\|z\|^2}$$

wählen.

(2) (Eindeutigkeit:) Sei $u' \in H$ ein weiteres Element mit $L(v) = \langle v, u' \rangle$. Dann ist

$$0 = L(v) - L(v) = \langle u, v \rangle - \langle u', v \rangle = \langle u - u', v \rangle \quad \forall v \in H$$

und wählen wir speziell $v := u - u'$ folgt daraus

$$\|u - u'\|^2 = 0 \iff u - u' = 0 \iff u = u'.$$

■

A.2.2 Das Lemma von Lax-Milgramm

Satz A.2.2 (Lax-Milgram): *Sei H ein Hilbertraum, $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ eine stetige und koerzive Bilinearform, d.h. $\exists \alpha > 0$, sodass*

$$|B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{und} \quad B(u, u) \geq \beta \|u\|^2 \quad \forall u, v \in H. \quad (\text{A.12})$$

Dann gibt es für jedes stetige lineare Funktional $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ ein eindeutiges $\hat{u} \in H$ mit

$$B(\hat{u}, v) = L(v) \quad \forall v \in H. \quad (\text{A.13})$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz von $\hat{u} \in H$. Für $u \in H$ fest ist $v \mapsto B(u, v)$ ein stetiges lineares Funktional auf H . Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es daher für jedes u ein eindeutiges $w \in H$ mit

$$B(u, v) = \langle w, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Dies definiert eine lineare Abbildung $T : H \rightarrow H$; $u \mapsto Tu := w$, denn für alle $v \in H$ ist

$$\begin{aligned} B(\lambda u_1 + \mu u_2, v) &= \lambda B(u_1, v) + \mu B(u_2, v) \\ &= \lambda \langle Tu_1, v \rangle + \mu \langle Tu_2, v \rangle = \langle \lambda Tu_1 + \mu Tu_2, v \rangle, \end{aligned}$$

also nach Definition von T : $T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda Tu_1 + \mu Tu_2$. Ferner ist T beschränkt:

$$\|Tu\|^2 = |\langle Tu, Tu \rangle| = |B(u, Tu)| \leq \alpha \|u\| \cdot \|Tu\| \iff \|Tu\| \leq \alpha \|u\|$$

und es gilt für alle $u \in H$:

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u, u) = \langle Tu, u \rangle \leq \|Tu\| \cdot \|u\| \iff \beta \|u\| \leq \|Tu\|,$$

d.h. T ist injektiv und stetig. Ist außerdem $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\text{im}\{T\} \subset H$ mit $w_n = Tu_n$ und $w_n \rightarrow w$, so gilt nach obigem:

$$\|u_j - u_k\| \leq \beta^{-1} \|T(u_j - u_k)\| = \beta^{-1} \|w_j - w_k\| \rightarrow 0 \text{ für } j, k \rightarrow \infty,$$

d.h. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ ist eine Cauchyfolge die gegen ein Element $u \in H$ konvergiert. Dann ist

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n = Tu \in \text{im}\{T\}$$

und daher $\text{im}\{T\}$ abgeschlossen. Es gilt sogar $\text{im}\{T\} = H$, denn für $w \in \text{im}\{T\}^\perp$ folgt aus (4.2)

$$0 = \langle Tw, w \rangle = B(w, w) \geq \beta \|w\|^2 \geq 0,$$

also $w = 0$ und damit $\text{im}\{T\}^\perp = \{0\}$ bzw.

$$\text{im}\{T\} = \overline{\text{im}\{T\}} = (\text{im}\{T\}^\perp)^\perp = \{0\}^T = H.$$

Insgesamt folgt somit, dass T linear, beschränkt und bijektiv, also insbesondere invertierbar ist.

Sei nun $L : H \rightarrow \mathbb{K}$ ein lineares stetiges Funktional. Nach dem Ries'zschen Darstellungsatz gibt es ein $\hat{w} \in H$ mit $\langle v, \hat{w} \rangle = L(v)$ für alle $v \in H$. Setze nun

$$\hat{u} := T^{-1}\hat{w},$$

dann gilt für alle $v \in H$:

$$B(\hat{u}, v) = \langle T\hat{u}, v \rangle = \langle \hat{w}, v \rangle = L(v).$$

■

Literaturverzeichnis

- [Ada03] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2nd Edition, 2003, ISBN 0-12-044143-8
- [Aer64] E. L. Aero, A. N. Bulygin, E. V. Kuvshinskii, *Asymmetric Hydromechanics*, J. Appl. Mech., Vol. 29, No. 2 (1964), pp. 333-346
- [Alt06] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, 2006, ISBN 3-540-34186-2
- [Ari89] R. Aris, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications, 1989, ISBN 0-486-66110-5
- [Bur10] K. Burg, H. Haf, F. Wille, A. Meister, *Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen*, Vieweg, ISBN 978-3-8348-1294-0
- [Cho93] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer, 1992, ISBN 0-387-97918-2
- [Eck08] C. Eck, H. Garcke, P. Knabner, *Mathematische Modellierung*, Springer, 2008, ISBN 978-3-540-74967-7
- [Eri64] A. C. Eringen, *Simple microfluids*, Int. J. Eng. Sci., Vol. 2, No. 2 (1964), pp. 205-217
- [Eri66] A. C. Eringen, *Theory of micropolar fluids*, J. Math. Mech., Vol. 16, No. 1 (1966), pp. 1-16
- [Eri99] A. C. Eringen, *Microcontinuum Field Theories - I. Foundations and Solids*, Springer, 1999, ISBN 0-387-98620-0
- [Eri01] A. C. Eringen, *Microcontinuum Field Theories - II. Fluent Media*, Springer, 2001, ISBN 0-387-98969-2
- [Eva02] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2002, ISBN 0-8218-0772-2
- [Gal11] G. P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Springer, 2011, ISBN 978-0-387-09619-3
- [Gil83] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1983, ISBN 3-540-41160-7
- [Her07] N. Herrmann, *Höhere Mathematik für Ingenieure, Physiker und Mathematiker*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, ISBN 978-3-4865-8447-9

- [Hut95] K. Hutter, *Fluid- und Thermodynamik - Eine Einführung*, Springer, 1995, ISBN 3-540-59235-0
- [Kir69] A. D. Kirwan Jr., N. Newman, *Plane flow of a fluid containing rigid structures*, Int. J. Engng. Sci., Vol. 7, No.8 (1969), pp. 883-893
- [Lad87] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach Science Publishers, 1987, ISBN 978-0-677-20230-3
- [Lio96] P. L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume 1: Inkompressible Models*, Clarendon Press, 1996, ISBN 0-19-851487-5
- [Luk99] G. Lukaszewicz, *Micropolar fluids: Theory and Applications*, Birkhäuser, 1999 ISBN 0-8176-4008-8
- [Nos04] A. Nosier, A. Yavari, *Surface Balance Laws of Linear and Angular Momenta and Cauchy's Stress Theorem*, Scientia Iranica, Vol. 11, No. 1& 2 (2004), pp. 21-25
- [Maz11] V. Maz'ya, *Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, Springer, 2011, ISBN 978-3-642-15563-5
- [Mor66] Ch. B. Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer, 1966, ISBN 978-3-540-69915-6
- [Mun07] I. Münch, *Ein geometrisch und materiell nichtlineares Cosserat-Modell - Theorie, Numerik und Anwendungsmöglichkeiten*, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, 2007, ISBN 978-3-935322-12-6
- [Mur03] A. I. Murdoch, *Objectivity in classical continuum physics: a rationale for discarding the „principle of invariance under superposed rigid body motions“ in favour of purely objective considerations*, Continuum Mech. Thermodyn., Vol. 15, No. 3 (2003), pp. 309-320
- [Pab05] W. Pabst, *Micropolar Materials*, Ceramics Silikaty, Vol. 49, No. 3 (2005), pp. 170-180
- [Riv60] A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, *The Theory of Matrix Polynomials and its Application to the Mechanics of Isotropic Continua*, Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 2, No. 1 (1958), pp. 309-336
- [Tem77] R. Temam, *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, North-Holland Publishing Company, 1977, ISBN 0-7204-2840-8
- [Tru65] C. Truesdell, W. Noll, *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, Springer, 3rd Edition 2004, ISBN 3-540-02779-3
- [Var07] W. Varnhorn, *The Navier-Stokes Equations with Particle Methods*, Mathematische Schriften Kassel, 2007, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2008022020404>

- [Wan70] . C. Wang, *A new representation theorem for isotropic functions, Part I and Part II*, Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 36, No. 3 (1970), pp. 166-223
- [Wer07] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, 2007, ISBN 978-3-540-72533-6

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel erstellt zu haben.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Moers, 18. Oktober 2011
(Frank Osterbrink)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Patrizio Neff, Leiter der AG Nichtlineare Analysis und Modellierung an der Universität Duisburg-Essen, der mit sehr viel Engagement und unermüdlichem Einsatz meine Diplomarbeit betreut hat. Seine stetige Bereitschaft, Probleme zu besprechen, seine oftmals notwendige konstruktive Kritik und die exzellente Betreuung während der vergangenen 16 Monate haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Besonders herzlich möchte ich mich bei meinen Eltern und meinem Bruder bedanken, die stets Rücksicht genommen und mir meinen Berufswunsch ermöglicht haben. Ihre immerwährende Unterstützung während der Dauer der Diplomarbeit, ihre grammatischen und syntaktischen Durchsicht und nicht zuletzt ihre Geduld während meines Studiums waren eine große Hilfe für mich.