Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 13.06.2012

1. Klausur zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Aufgabe 1: Ein Schäfer übernimmt eine Herde mit 200 Schafen. In jedem Jahr werden durchschnittlich von jedem am Anfang des Jahres lebenden Schaf 2,5 Junge geboren und 10 Prozent der am Anfang des Jahres lebenden Schafe sterben im Verlauf des Jahres durch einen natürlichen Tod. Am Ende des Jahres möchte der Schäfer k Schafe verkaufen. Für $n \in \mathbb{N}$ gebe s_n die Anzahl der Schafe in der Herde am Ende des n-ten Jahres an.

a) Stellen Sie eine Differenzengleichung auf, die $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ näherungsweise erfüllt. $\boxed{3}$

b) Berechnen Sie s_n, $n \in \mathbb{N}$, explizit. $\boxed{8}$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil b) das maximale $k \in \mathbb{N}$, so dass die Schafherde nicht kleiner wird. $\boxed{4}$

Aufgabe 2: Die Glucosemenge im menschlichen Körper verringert sich in einer Minute um 10%. Bei künstlichen Ernährung wird über eine Tropfinfusion Glucose mit einer festen Rate von β mg pro Minute hinzugeführt. Zur Zeit $t_0 = 0$ wird ein stark unterzuckerter Patient mit einem Glucosegehalt von 100 mg an den Tropf angeschlossen. Für $t > 0$ sei $u(t)$ die nach t Minuten im Körper vorhandenen Menge Glucose in mg.

a) Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenz $u(t+\tau) - u(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $u(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u die Differentialgleichung $u'(t) = -\frac{1}{10}u(t) + \beta$, $t \geq 0$, erfüllt. $\boxed{5}$

b) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, indem Sie die Differentialgleichung aus Teil a) lösen. $\boxed{9}$

c) Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit β Glucose zugeführt werden muss, damit sich der Glucosegehalt bei 2000 mg stabilisiert. $\boxed{5}$

Aufgabe 3: Wir nehmen an, dass die Geschwindigkeit, mit der ein kugelförmiges Bonbon im Mund eines Kindes schmilzt, proportional zur Oberfläche ist, die das Bonbon noch hat. Wir bezeichnen mit $V(t)$ das Volumen des Bonbons zur Zeit t.

a) Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenz $V(t+\tau) - V(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $V(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass V die Differentialgleichung

$$V'(t) = -kV^{\frac{2}{3}}(t)$$

mit einer Konstante $k > 0$ erfüllt. $\boxed{4}$

b) Zur Zeit $t_0 = 0$ hat das Bonbon ein Volumen von $0,5\,cm^3$. Berechnen Sie die Funktion $V(t)$, $t \geq 0$, indem Sie die Differentialgleichung aus Teil a) lösen. $\boxed{9}$

Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen $V(t) = \left(0,5^{\frac{1}{3}} - \frac{kt}{3}\right)^3$

c) In der Lösung tritt noch die Proportionalitätskonstante k auf. Wie groß ist sie, wenn nach 10 Minuten das Bonbon noch eine Größe von $0,1\,cm^3$ hat? Runden Sie auf zwei Dezimalstellen. $\boxed{4}$

d) Berechnen Sie, nach wieviel Minuten sich das Bonbon aufgelöst hat. $\boxed{4}$

Information: Für das Volumen und die Oberfläche einer Kugel mit Radius r gelten bekanntermaßen die Formeln

$$V(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \qquad O(r) = 4\pi r^2 \,. \tag{1}$$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = e^{-t}\,.$$

$\boxed{10}$

Aufgabe 5: Ein radioaktiver Stoff A zerfällt mit einer Rate von 10 Prozent pro Minute in den Stoff B, der wiederum mit einer Rate von 20 Prozent pro Minute in den stabilen Stoff C zerfällt, der nicht weiter interessiert. Außerdem werde von aussen der Stoff A mit einer Rate von 20 Gramm pro Minute zugeführt. Zur Zeit $t_0 = 0$ sei von beiden Stoffen nichts vorhanden. Für $t > 0$ seien $a(t)$ und $b(t)$ die von den Stoffen A und B vorhandenen Mengen in Gramm.

a) Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenzen $a(t+\tau) - a(t)$ und $b(t+\tau) - b(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $a(t)$ und $b(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass a und b das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -0,1a + 20 \\ \dot{b} &= 0,1a - 0,2b \end{aligned}$$

erfüllen. $\boxed{4}$

b) Berechnen Sie die Funktionen $a(t)$ und $b(t)$, $t \geq 0$, indem Sie das Differentialgleichungssystem aus Teil a) lösen. $\boxed{11}$
Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen: $a(t) = -200e^{-0,1t} + 200$, $b(t) = 100e^{-0,2t} - 200e^{-0,1t} + 100$.

c) Bestimmen Sie das Langzeitverhalten der beiden Substanzen. $\boxed{4}$

Aufgabe 6: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.

		wahr	falsch
1.	Die Lösung der logistischen Differentialgleichung $x' = r \cdot (1 - \frac{x}{x_M}) \cdot x$, $t \geq 0$, mit $x(0) > x_M$ ist streng monoton fallend.		
2.	Die Differentialgleichung $y' = t^2 y - 3y^3$ führt durch die Substitution $z(t) = (y(t))^{-2}$ auf eine lineare Differentialgleichung für z.		
3.	Im Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra mit unbeschränkten Resourcen stirbt die Beutepopulation aus, falls die Räuberpopulation einen kritischen Wert übersteigt.		
4.	Im Modell des gedämpften Oszillators $\ddot{x} + 2\varrho\dot{x} + \omega^2 x = 0$ mit $\varrho, \omega > 0$ ist der stationäre Punkt $x = 0$, $v = 0$ stabil, aber nicht asymptotisch stabil.		
5.	Für die Modellierung von Explosionsprozessen sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten generell nicht geeignet.		
6.	Für einen Anfangswert $L_0 < L_M$ führt die Differentialgleichung $L' = k \cdot (L_M - L)$, $L_M, k > 0$ auf eine durch L_M beschränkte Lösung.		
7.	Für einen Anfangswert $L_0 < k$ führt die Differentialgleichung $L' = k \cdot (L_M - L)$, $L_M, k > 0$ auf eine durch k beschränkte Lösung.		
8.	Die Funktion $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $y(t) := t^3$ für $t \geq 0$, ist die Lösung einer linearen Differentialgleichung.		

Viel Erfolg!!

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	$\sum$