Wir danken all denen, die uns bei der Fertigstellung dieses zweiten Bandes unterstützt haben. Es sind Studierende, Mitarbeiter und Kollegen. Hervorheben möchten wir Frau Dipl.-Math. Kerstin Dostal, Herrn Dipl.-Math. Tobias Harth und Herrn Dr. Thilo Volz, die Teile des Manuskriptes Korrektur gelesen und bei der Auswahl von Beispielen und Aufgaben mitgewirkt haben. Besonderer Dank gilt Frau Gudrun Schumm, die ebenso wie beim ersten Band mit großer Sachkenntnis die TEX-Version des Manuskriptes erstellt hat. Schließlich danken wir dem Teubner-Verlag, insbesondere Herrn Dr. Peter Spuhler, für die gute Zusammenarbeit.

Darmstadt, im Juli 2002
Karl Graf Finck von Finckenstein,
Jürgen Lehn,
Helmut Wegmann

Inhaltsverzeichnis

Differentialgleichungen

Bei der Modellierung technischer und naturwissenschaftlicher Problemstellungen sind Differentialgleichungen unverzichtbare Hilfsmittel. In der Physik und Mechanik lassen sich einfache Bewegungsvorgänge mit sogenannten gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren Lösungen reelle Funktionen mit einer reellen Veränderlichen sind, beschreiben. Kompliziertere physikalische Vorgänge wie z.B. die Strömung von Flüssigkeiten oder die Wärmeausbreitung im Raum lassen sich mit sogenannten partiellen Differentialgleichungen modellieren. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen sind reellwertige Funktionen mit mehreren reellen Veränderlichen. Im Folgenden wird eine ganze Reihe von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungstypen behandelt, die einerseits bei den Modellierungen in Naturwissenschaft und Technik Verwendung finden, aber andererseits noch von so einfacher Struktur sind, daß analytische Lösungsverfahren existieren. Obwohl in der heutigen wissenschaftlichen Arbeit bei der Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen Computer zum Einsatz kommen und dazu Softwaresysteme mit schnellen Algorithmen zur Verfügung stehen, sind die analytischen Lösungsmethoden für Differentialgleichungen grundlegend für das Verständnis. Numerische Lösungsalgorithmen werden in den Kapiteln über Numerische Mathematik behandelt.

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen; Einführung und geometrische Betrachtungen

Die Differentialgleichungen spielen in den Anwendungen eine grundlegende Rolle, denn durch sie werden viele Sachverhalte aus den Natur-, den Wirtschafts- und den Ingenieurwissenschaften beschrieben oder, wie man auch sagt, *modelliert.* Bevor wir hierzu eine Reihe von Beispielen bringen, sollen zunächst zwei Definitionen gegeben werden.

Definition 1.1
Eine **Differentialgleichung** *ist eine Gleichung, in der Ableitungen von einer oder mehreren Funktionen auftreten, die von einer oder mehreren Veränderlichen abhängen. Die gesuchten Unbekannten sind hierbei die Funktionen. Eine* **gewöhnliche Differentialgleichung** *für eine Funktion $y(x)$ hat die allgemeine Form*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Eine **partielle Differentialgleichung** *für eine Funktion $z(x,y)$ in zwei unabhängigen Veränderlichen hat die allgemeine Form*

$$F(x, y, z(x,y), \tfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}, \tfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}, \tfrac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}, \tfrac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y}, \tfrac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}, \ldots, \tfrac{\partial^{(n)} z(x,y)}{\partial y^n}) = 0\,.$$

Die Ordnung der höchsten in einer Differentialgleichung auftretenden Ableitung heißt die **Ordnung** *der Differentialgleichung.*

Die am besten untersuchte Familie von Differentialgleichungen sind die **linearen Differentialgleichungen**:

Definition 1.2
Eine gewöhnliche Differentialgleichung heißt **linear**, *falls sie die Form*

$$a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x) \cdot y(x) = b(x)$$

besitzt, wobei die **"Koeffizienten"** *$a_\nu(x)$ und die rechte Seite $b(x)$ gegebene Funktionen sind.*

Alle anderen gewöhnlichen Differentialgleichungen heißen **nichtlinear**.

Definition 1.3
Eine partielle Differentialgleichung der Ordnung 2 heißt **linear**, *wenn sie die Form*

$$a_{20} \tfrac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} + a_{11} \tfrac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} + a_{02} \tfrac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}$$

$$+ a_1 \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} + a_0\ z(x,y) = b(x,y)$$

besitzt, wobei die Koeffizienten $a_\nu = a_\nu(x,y)$ und die rechte Seite $b(x,y)$ gegebene Funktionen sind.

Alle anderen partiellen Differentialgleichungen heißen **nichtlinear**.

Bemerkung:

(1) Um die Schreibweise zu vereinfachen, schreiben wir in der Regel für die unbekannte Funktion $y(x)$ und ihre Ableitungen $y'(x), y''(x) \ldots$ in einer gewöhnlichen Differentialgleichung nur y, y',y'' ... anstelle von $y(x)$ und $y'(x), y''(x)$ .... Für die Ableitung nach der Zeitvariablen t wird gewöhnlich die Schreibweise $\dot{y}(t)$ bzw. nur $\dot{y}$ verwendet. Auch bei den partiellen Differentialgleichungen verfahren wir gelegentlich analog und schreiben nur z, z_x oder $\frac{\partial z}{\partial x}$, z_y oder $\frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$ für $z(x,y)$, $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}, \ldots$.

Beispiele:

(2) $y \cdot y' = x$ ist eine gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung.

(3) $5y'' + x^2 \cdot y' - \sin x \cdot y = 0$ ist eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(4) $z_{xx}^2 + z_{yy} = x \cdot y$ ist eine partielle, nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(5) $z_x - x^2 \cdot y^3 \cdot z_y = 0$ ist eine partielle, lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine Differentialgleichung **lösen** heißt, alle diejenigen (differenzierbaren) Funktionen zu ermitteln, die, mit ihren Ableitungen eingesetzt in die Differentialgleichung, diese identisch befriedigen.

Wir wollen nun einige Beispiele von Differentialgleichungen vorstellen, die sich aus den Anwendungen ergeben. Für den Naturwissenschaftler oder den Ingenieur ist neben dem **Lösen** von Differentialgleichungen auch das **Aufstellen** von solchen eine wichtige Aufgabe. Dafür benötigt er die Kenntnis der für sein Arbeitsgebiet in Frage kommenden naturwissenschaftlichen Gesetze. Eine auf solchen Grundlagen aufgestellte Differentialgleichung liefert ein **mathematisches Modell** für das physikalische, biologische oder technische Problem. Dabei wird er bei der Übersetzung des praktischen Problems in eine Differentialgleichung oft unwesentliche Einflüsse vernachlässigen, um das Modell, also die Differentialgleichung, nicht zu kompliziert werden zu lassen.

Beispiele:

(6) **Exponentielles Wachstum einer Population**

Eine Bakterienpopulation befinde sich in einer Nährflüssigkeit und habe zur Zeit t die Größe $y(t)$. Bei $t = 0$ soll die Beobachtung des Wachstumsprozesses mit der Anfangsgöße $y(0) = y_0$ der Population beginnen. Ausgehend vom Zeitpunkt t wird sich nach Ablauf der Zeitspanne Δt die Population um

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$

Mitglieder vermehrt haben. Nun ist es sinnvoll anzunehmen, dass bei **kleinen** Zeitspannen Δt die Vermehrung etwa proportional zu dem Bestand $y(t)$ und zu der Zeitspanne Δt ist:

$$\Delta y \approx \alpha \cdot y(t) \cdot \Delta t$$

mit einer Proportionalitätskonstanten $\alpha > 0$.

Wir wollen $y(t)$ als differenzierbare Funktion annehmen, so dass sich mit Division durch Δt und Grenzübergang $\Delta t \to 0$ ergibt:

$$\dot{y} = \alpha \cdot y \quad , \quad y(0) = y_0 \, .$$

Hier haben wir neben der Differentialgleichung noch eine Bedingung über den Funktionswert der Lösung an der Stelle $t = 0$, eine **"Anfangsbedingung"** zu erfüllen. Dieses **"Anfangswertproblem"** beschreibt das **Wachstumsgesetz** der Bakterienpopulation. Im nächsten Kapitel wird klar werden, dass es genau eine Lösung $y(t)$ besitzt, die wir hier einfach angeben; sie lautet

$$y(t) = y_0 \cdot e^{\alpha \cdot t} \, .$$

(7) **Zeitliche Veränderung der Einwohnerzahl eines Landes**

Auch hier handelt es sich um ein Populationsproblem, nur soll das Modell jetzt gegenüber dem vorigen Beispiel verfeinert werden:

Sei $y(t)$ die Populationsgröße zur Zeit t und $\Delta t > 0$ eine kleine Spanne. Ferner seien $G(t)$ bzw. $T(t)$ die Anzahlen der Geburten bzw. der Todesfälle pro Zeiteinheit. Über diese Größen machen wir die Annahmen

$$G(t) \approx (a - b \cdot y(t)) \cdot y(t) \quad , \quad T(t) \approx (c + d \cdot y(t)) \cdot y(t) \, ,$$

wobei a , b , c , d positive Konstanten sind. Dies kann man wie folgt motivieren: Für eine geringe Populationsgröße $y(t)$ sind $G(t)$ und $T(t)$ etwa proportional zu $y(t)$. Mit wachsendem $y(t)$ nimmt die Lebensqualität ab, die Geburtenrate sinkt, während die Todesrate steigt. Für die Bevölkerungszunahme (bzw. -Abnahme) in der Zeitspanne Δt gilt nun

$$\begin{aligned} y(t + \Delta t) - y(t) &= (G(t) - T(t)) \cdot \Delta t \\ &\approx [(a - c) \cdot y(t) - (b + d) \cdot y^2(t)] \cdot \Delta t, \end{aligned}$$

was zu folgendem Anfangswertproblem führt:

$$\dot{y} = \alpha \cdot y - \beta \cdot y^2 \quad , \quad y(0) = y_0$$

Dabei seien $\alpha := a - c \neq 0$ und $\beta := b + d > 0$ vorausgesetzt, und y_0 ist die Anfangsgrösse der Population zum Zeitpunkt $t = 0$.

Während wir es in Beispiel (6) mit einer linearen Differentialgleichung zu tun haben, tritt in (7) eine nichtlineare, eine sogenannte **Bernoullische Differentialgleichung** auf. Das Lösen einer solchen Differentialgleichung wird im nächsten Kapitel behandelt. Wir geben die Lösung an:

$$y(t) = (c_1 \cdot e^{-\alpha t} + c_2)^{-1} \, ,$$

mit $c_1 = \dfrac{1}{y_0} - \dfrac{\beta}{\alpha}$ und $c_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Der Leser untersuche das Verhalten dieser Lösung in Abhängigkeit von α, β und y_0.

(8) **Radioaktiver Zerfall**

Die zerfallende Menge einer radioaktiven Substanz der Gesamtmasse $y(t)$ in einer kleinen Zeitspanne Δt ist (annähernd) proportional zu der Masse $y(t)$ der zur Zeit t noch vorhandenen Substanz:

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx -c \cdot y(t) \cdot \Delta t \, .$$

Die positive Zahl c ist eine Materialkonstante. Division durch Δt und Grenzübergang $\Delta t \to 0$ führt zu dem Anfangswertproblem

$$\dot{y} = -c \cdot y \quad , \quad y(0) = y_0 > 0 \, ,$$

dessen Lösung $y(t) = y_0 \cdot e^{-c \cdot t}$ lautet.

(9) **Bewegung im Schwerefeld der Erde**

Ein Körper der Masse m befinde sich im Schwerefeld der Erde (Masse M). Ist s der Abstand Körper – Erdmittelpunkt, dann gilt für die Anziehungskraft nach dem Gravitationsgesetz:

$$K = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{s^2} \, , \quad \gamma = \text{ Gravitationskonstante} \, .$$

Zur Zeit $t = 0$ ist sein Abstand s_0. Er bewegt sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0, und zwar nach oben, wenn v_0 positiv, und nach unten, wenn v_0 negativ ist. Nach t Zeiteinheiten hat er den Abstand $s(t)$ vom Erdmittelpunkt. Luftreibung werde vernachlässigt. Nach dem Newtonschen Kraftgesetz folgt daher die Differentialgleichung **zweiter** Ordnung

$$m \cdot \ddot{s} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{s^2} \; .$$

Sie hat viele Lösungen $s(t)$. Wir suchen solche, die zusätzlich zwei **Anfangsbedingungen** erfüllen:

$$s(0) = s_0 \quad \text{und} \quad \dot{s}(0) = v_0 \; .$$

Diese Aufgabe, die Differentialgleichung zusammen mit den Anfangsbedingungen zu lösen, ist ein **Anfangswertproblem zweiter Ordnung**. Es wird in Kapitel 4, Beispiel (4) gelöst.

Vollzieht sich die gesamte Fallbewegung in der Nähe der Erdoberfläche, dann kann man auf der rechten Seite der Differentialgleichung $s = s^* =$ Erdradius setzen, ohne viel falsch zu machen. Wir erhalten dann

$$\gamma \cdot M \cdot (s^*)^{-2} = g \approx 9.81\text{m} \cdot \text{sec}^{-2} \; ,$$

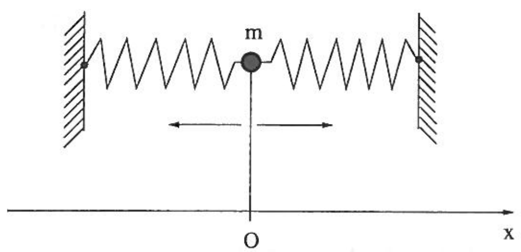
und die Differentialgleichung vereinfacht sich zu

$$\ddot{s} = -g \; .$$

Die Lösung lautet dann: $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$.

(10) **Schwingungen an einer Feder**

Ein Massenpunkt der Masse m sei an zwei gleichen Federn zwischen zwei festen Wänden aufgehängt. Von der Schwerkraft soll abgesehen werden.



Gesucht ist die **Auslenkung** $x(t)$ zur Zeit t des Massenpunktes aus der Ruhelage, wenn er durch Anstoßen in Schwingungen versetzt wird. Die **elastische Rückstellkraft** der Feder ist nach dem Hookeschen Gesetz zur Auslenkung proportional:

$$R_1 = k \cdot x(t)$$

mit der Federkonstanten k als Proportionalitätsfaktor. Ferner ist die entstehende **Reibungskraft** proportional zur Geschwindigkeit:

$$R_2 = r \cdot \dot{x}(t) \; ,$$

wobei r der Reibungskoeffizient ist. Da R_1 die Auslenkung und R_2 die Geschwindigkeit zu verkleinern sucht, erhalten wir für die Pendelbewegung nach dem Newtonschen Kraftgesetz:

$$m \cdot \ddot{x} = -R_1(t) - R_2(t) \; ,$$

also die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot x - \frac{r}{m} \cdot \dot{x} \; .$$

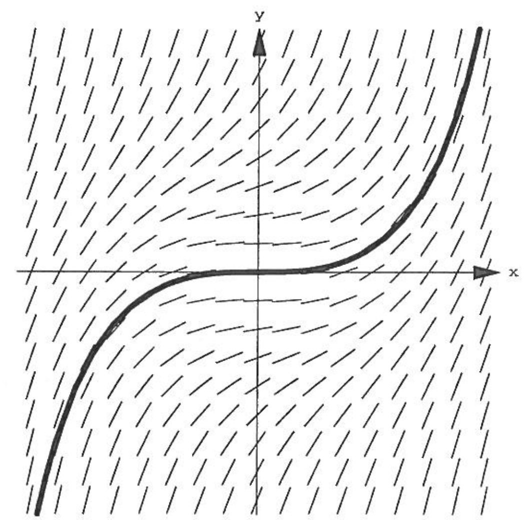
Auch hier kommen zwei Anfangsbedingungen hinzu, die durch Position und Geschwindigkeit zu Beginn der Bewegung festgelegt sind.

Für den Rest dieses Kapitels wollen wir nur Differentialgleichungen erster Ordnung betrachten, die in **expliziter Form**

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

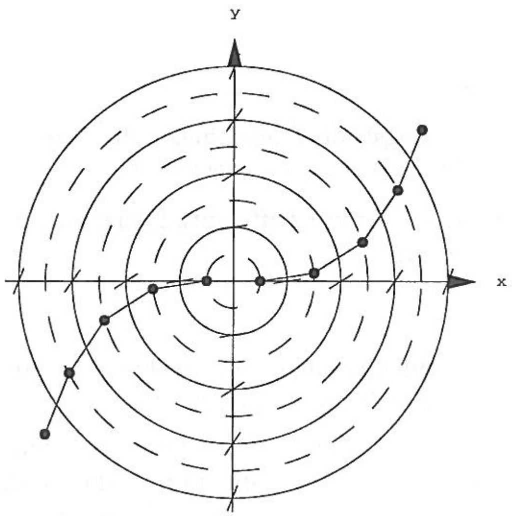
vorliegen. Eine Differentialgleichung ist in expliziter Form, wenn die Gleichung nach der höchsten auftretenden Ableitung aufgelöst ist.

Über die Lösungsschar einer solchen Differentialgleichung kann man sich einen ungefähren geometrischen Überblick verschaffen, indem man das **Richtungsfeld** der Differentialgleichung zeichnet: In der Skizze handelt es sich um das Richtungsfeld zu der Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$.



Einem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ wird durch die Differentialgleichung die Steigung $f(x_0, y_0)$ zugeordnet. Diese muss die Richtung der Tangenten an alle Lösungskurven festlegen, die durch (x_0, y_0) verlaufen. Zeichnet man nun in genügend vielen Punkten der Ebene kleine Linienelemente mit den jeweiligen Steigungen, so erhält man ein ungefähres Bild vom Verlauf der Lösungskurven, oder, wie man auch sagt, der **Integralkurven**.

Zur Konstruktion von Integralkurven kann man sich des Isoklinenverfahrens bedienen. Die **Isoklinen** einer Differentialgleichung der Form (1) sind die Höhenlinien der Funktion $f(x,y)$, also die Kurven in der x,y-Ebene,



die durch die Gleichungen

$$f(x,y) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

gegeben sind. In der Skizze ist es wieder die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$. Zeichnet man eine genügend große Anzahl von Isoklinen und skizziert noch zwischen diesen die Mittellinien, dann kann man durch Polygonzüge, deren Ecken auf den Mittellinien liegen, die Lösungskurven der Differentialgleichung angenähert darstellen.

Bemerkung:

(11) Es kommt vor, dass durch einen Punkt (x_0, y_0) mehr als eine Integralkurve hindurchgeht. Ist dies der Fall, so haben alle Lösungskurven in diesem Punkt gleiche Steigung. Sie müssen sich also dort berühren oder tangential schneiden.

Beispiel:

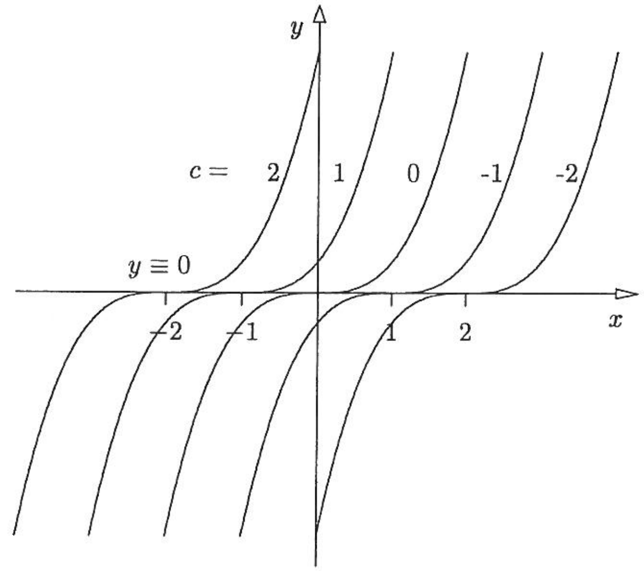
(12) Die Differentialgleichung

$$y' = 3 \cdot \sqrt[3]{y^2}$$

besitzt außer der trivialen Lösung $y(x) \equiv 0$ die Gesamtheit der Funktionen

$$y(x) = (x+c)^3, \quad c \in \mathbb{R},$$

als Lösungen.



Die Isoklinen der obigen Differentialgleichung sind die Geraden $y = \text{const}$. Insbesondere ist die Gerade $y = 0$, also die x-Achse, eine Isokline und gleichzeitig eine Integralkurve. Ferner erkennen wir, dass durch jeden Punkt der x-Achse viele Integralkurven verlaufen.

ÜBUNGEN

Ü1.1: Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen nach den Kategorien gewöhnlich (g) partiell (p), linear (l) und nichtlinear (n) und bestimmen Sie die Ordnung

Differentialgleichung	g	p	l	n	Ordnung
$y''' + x^2y' + 3y = 2e^x$					
$y^3 + x^2y' + 3y'' = 0$					
$\cos(y) \cdot z_{xx} - x \cdot z_{yy} = 0$					
$\cos(z_y) + z_x = 0$					
$xy \cdot z_{xxx} + z_y = x \cdot e^{2x}$					
$t \cdot \ddot{x}^2 + 2\dot{x} - 3x = t^2$					

Ü1.2: Zeigen Sie, dass die angegebenen Funktionen die Differentialgleichungen lösen

a) Für $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $y(x) = -\tan(x+c)$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x+c) \neq 0$ eine Lösung von

$$y^2 + y' + 1 = 0 \, .$$

b) Für $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $y(x) = -\ln(\cos x + c)$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x + c > 0$ eine Lösung von

$$y' = e^y \cdot \sin x \, .$$

c) Die Funktion $z(x,y) = \sin\left(\frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{2}\right)$ ist für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y^2 - x^2 \geq 0$ eine Lösung von

$$y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0 \, .$$

Ü1.3: Wir beziehen uns auf die Differentialgleichung in Beispiel (10). Für $r = 0$ und $\frac{k}{m} = 9$ wird eine reibungsfreie Schwingung des Federpendels beschrieben; die Differentialgleichung lautet nun:

$$\ddot{x} + 9 \cdot x = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass alle Funktionen der Form

$$x(t) = c_1 \cdot \cos 3t + c_2 \cdot \sin 3t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, ,$$

Lösungen dieser Schwingungsgleichung sind.

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingungen $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

Ü1.4: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y} \, .$$

a) Bestimmen Sie für $y > 0$ die Isoklinen, skizzieren Sie das Richtungsfeld und tragen Sie einige Lösungskurven ein.

b) Erraten Sie anhand der Skizze diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt. Machen Sie die Probe.

Ü1.5: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = 1 + x + y \, .$$

a) Berechnen Sie die Isoklinen.

b) Skizzieren Sie das Richtungsfeld, indem Sie die Linienelemente in den Punkten (x,y) mit $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ eintragen. Zeichnen Sie einige Isoklinen und Lösungskurven ein.

c) Lesen Sie aus der Skizze diejenige Lösung ab, die die Anfangsbedingung $y(0) = -2$ erfüllt und machen Sie die Probe. Was ist das Besondere an dieser Lösung?

2 Spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Dieses Kapitel befasst sich mit Methoden zur Lösung spezieller Differentialgleichungen erster Ordnung. In der Regel hat eine Differentialgleichung viele Lösungen. Jede davon nennen wir eine **spezielle** oder **partikuläre** Lösung. Die **allgemeine Lösung** ist die Gesamtheit aller Lösungen. Sie wird im Allgemeinen durch Gleichungen

$$y(x) = g(x, c) \quad , \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad c \in I \subset \mathbb{R}$$

beschrieben. Setzt man für c eine Zahl ein, so erhält man eine spezielle Lösung, und jede spezielle Lösung kann auf diese Weise erhalten werden. Eine spezielle Lösung ist gesucht, wenn die gesuchte Funktion $y(x)$ neben der Differentialgleichung noch eine **Anfangsbedingung** $y(x_0) = y_0$ befriedigen soll, wenn also eine Lösungskurve gesucht ist, die durch einen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ läuft. Differentialgleichung und Anfangsbedingung zusammen ergeben ein **Anfangswertproblem.**

Wir wollen nun sieben Typen von Differentialgleichungen und zugehörige Lösungsmethoden diskutieren.

I. Trennung der Veränderlichen

Eine Differentialgleichung der Form

$$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)} \tag{1}$$

heißt eine **Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen**. Ist a eine Nullstelle der Funktion g, so besitzt die Differentialgleichung die konstante Lösung $y(x) \equiv a$. Nicht konstante Lösungen erhält man unter der Voraussetzung $g(y) \neq 0$ nach Division durch $g(y)$ und Integration:

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x \, .$$

Mit der Substitutionsregel folgt daraus

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x) \mathrm{d}x}$$

Bemerkungen und Ergänzungen:

(1) Sind $H(y)$ und $F(x)$ Stammfunktionen von $\frac{1}{g(y)}$ und $f(x)$, so ist also die allgemeine Lösung in impliziter Form durch

$$H(y) = F(x) + c$$

gegeben. Im Allgemeinen wird man diese Gleichung nach y auflösen, um die Lösung in expliziter Form zu haben.

(2) Kommt zu der Differentialgleichung (1) noch eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ hinzu, so kann man in der allgemeinen Lösung $x = x_0$ und $y = y_0$ setzen und die Konstante c bestimmen. Eine oft einfachere Möglichkeit ist, statt der unbestimmten Integrale gleich bestimmte Integrale mit geeigneten Grenzen zu berechnen. Man erhält die spezielle Lösung des Anfangswertproblems durch

$$\boxed{\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^{x} f(\xi) \mathrm{d}\xi}$$

Beispiele:

(3) Die Differentialgleichung $y' = \tan x \cdot (y^2 - 1)$ besitzt die konstanten Lösungen $y(x) \equiv 1$ und $y(x) \equiv -1$. Für $|y| < 1$ erhalten wir Lösungen durch

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1 - y^2} = -\int \tan x \mathrm{d}x \, .$$

Integration ergibt

$$\operatorname{artanh} y = \ln(|\cos x|) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \, .$$

Wegen der Beziehung $\operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + y}{1 - y}$ folgt daher

$$\frac{1 + y}{1 - y} = C \cdot \cos^2 x \quad \text{mit} \quad C = e^{2c}$$

Auflösen nach y liefert die Lösungen

$$y(x) = \frac{C \cdot \cos^2 x - 1}{C \cdot \cos^2 x + 1} \, , \quad C > 0 \, .$$

(4) Die lineare Differentialgleichung $y' = p(x) \cdot y$ hat die konstante Lösung $y(x) \equiv 0$. Lösungen mit $y(x) \neq 0$ erhält man durch

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int p(x) \mathrm{d}x \quad \text{also} \quad \ln |y| = \int p(x) \mathrm{d}x \, .$$

Ist $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$, also $\int p(x)\mathrm{d}x = P(x) + c$, so ergibt sich

$$y(x) = C \cdot e^{P(x)} \quad \text{mit} \quad C = \begin{cases} e^c & \textit{für} \quad y > 0 \\ -e^c & \textit{für} \quad y < 0 \end{cases} .$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = C \cdot e^{P(x)} \quad , \quad C \in \mathbb{R} .$$

II. Substitution bei Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Eine Differentialgleichung der Form

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{2}$$

heißt **Ähnlichkeitsdifferentialgleichung**. Wir setzen $x \neq 0$ und $f(z) \neq z$ voraus. Mit der Substitution

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

erhält man wegen $y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x)$ die transformierte Differentialgleichung für $z(x)$ mit getrennten Veränderlichen

$$x \cdot z' = f(z) - z ,$$

die nach Methode I gelöst werden kann:

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \ln|x| + c .}$$

Nach Ausführen der Integration wird wieder rücksubstituiert, also z durch $\dfrac{y}{x}$ ersetzt.

Bemerkung:

(5) Der Fall $f(z) = z$ ist ausgeschlossen worden. Liegt er vor, so hat die Differentialgleichung (2) getrennte Veränderliche und kann direkt nach Methode I gelöst werden.

Beispiel:

(6) Das Anfangswertproblem

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad , \quad y(1) = \tfrac{1}{3}$$

ist zu lösen. Die Anwendung der soeben beschriebenen Substitutionsmethode setzt $x \neq 0$ und $f(z) = z^2 \neq z$ für $z = \dfrac{y}{x}$ voraus. Die Anfangsbedingung verlangt eine Lösung $y(x)$ für $x > 0$ mit $0 < y(x) < x$, also $0 < z^2 < z$. Wir erhalten über

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - z} = \ln x + c ,$$

nach Ausführung der Integration und Bilden der Exponentialfunktion

$$\frac{1 - z}{z} = e^c \cdot x .$$

Auflösen nach $z(x)$ und Rücksubstitution ergeben mit $a = e^c$

$$y(x) = x \cdot z(x) = \frac{x}{1 + ax} .$$

Schließlich liefert uns die Anfangsbedingung den Wert $a = 2$. Die Lösung lautet also

$$y(x) = \frac{x}{1 + 2x} .$$

III. Variation der Konstanten bei linearen Differentialgleichungen

Die lineare Differentialgleichung

$$\boxed{y' = p(x) \cdot y + r(x)} \tag{3}$$

nennt man **homogen**, wenn $r(x) \equiv 0$ ist. Andernfalls heißt sie **inhomogen**.

Die allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung

$$y' = p(x) \cdot y \tag{4}$$

ist nach Beispiel (4):

$$y_h(x) = c \cdot e^{P(x)} \quad , \quad c \in \mathbb{R} , \tag{5}$$

wobei $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$ ist.

Um die inhomogene Gleichung zu lösen, machen wir den **Ansatz durch Variation der Konstanten** c:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{P(x)} , \tag{6}$$

und bestimmen $c(x)$ so, dass die inhomogene Gleichung gelöst wird. Differentiation von (6) und Einsetzen in die Differentialgleichung (3) liefern eine Gleichung für die Ableitung $c'(x)$, und $c(x)$ ergibt sich durch Integration. Das Ergebnis ist Inhalt von

Satz 2.1 *Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung (3) ist gegeben durch*

$$y(x) = e^{P(x)} \cdot \left[c + \int r(x) \cdot e^{-P(x)} \mathrm{d}x\right] \quad , \quad c \in \mathbb{R} .$$

Dabei ist $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$.
Die spezielle Lösung des Anfangswertproblems mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist

$$y(x) = e^{P(x)} \cdot \left[y_0 e^{-P(x_0)} + \int_{x_0}^{x} r(t) \cdot e^{-P(t)} \mathrm{d}t\right] .$$

Die Funktion $y_0(x) = e^{P(x)} \cdot \int r(x) \cdot e^{-P(x)}\, dx$ ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (für $c = 0$), $y_h(x) = c \cdot e^{P(x)}$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Damit gilt für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) .$$

Dieses für lineare Differentialgleichungen typische Resultat halten wir fest:

Satz 2.2 *Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung (3) hat die Form*

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x),$$

wobei $y_0(x)$ eine (beliebige) spezielle Lösung von (3) und $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (4) ist.

Bemerkung:

(7) Der Wert dieses Satzes liegt in Folgendem: Ist eine spezielle Lösung $y_0(x)$ von (3) bekannt, dann braucht man nur noch die allgemeine Lösung $y_h(x)$ gemäß (5) zu ermitteln und mit $y_0(x)$ additiv zusammensetzen.

Beispiele:

(8) $y' = y + \sin x$.

Es ist $p(x) \equiv 1$, $r(x) = \sin x$, und man erhält mit $P(x) = x$ und einer geeigneten Integrationskonstanten:

$$y_0(x) = e^x \cdot \int \sin x \cdot e^{-x} dx = -\frac{1}{2} \cdot (\sin x + \cos x) .$$

Also ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = c \cdot e^x - \tfrac{1}{2} \cdot (\cos x + \sin x) \quad , \quad c \in \mathbb{R} .$$

Kommt noch die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ hinzu, dann ergibt sich $c = \frac{3}{2}$, und die nun eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = \tfrac{3}{2} \cdot e^x - \tfrac{1}{2} \cdot (\cos x + \sin x) .$$

(9) Bei dem Anfangswertproblem $y' = x \cdot y + 1$, $y(0) = 0$ ist $p(x) = x$ und $r(x) = 1$. Also erhält man mit der Stammfunktion $P(x) = \frac{1}{2}x^2$ die Lösung

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t .$$

Die Lösung lässt sich nicht weiter vereinfachen, da der Integrand nicht elementar integrierbar ist.

(10) Zu der Differentialgleichung $y' = x \cdot y - 2x$ ist es nicht schwer, eine partikuläre Lösung zu raten: $y_0(x) \equiv 2$.

Wegen Satz 2.2 braucht jetzt nur noch die homogene Differentialgleichung $y' = x \cdot y$ gelöst zu werden, was bereits in Beispiel (4) geschehen ist. Damit erhalten wir als allgemeine Lösung

$$y(x) = c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + 2 , \; c \in \mathbb{R} .$$

IV. Substitution bei Bernoullischen Differentialgleichungen

Eine Gleichung der Gestalt

$$\boxed{y' = p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^n} \tag{7}$$

mit $n \neq 0, 1$ heißt **Bernoullische Differentialgleichung**. Sie ist nichtlinear; man kann sie aber in eine lineare Differentialgleichung transformieren:

Satz 2.3 *Mit der Substitution*

$$z(x) = (y(x))^{1-n}$$

geht (7) in die lineare Differentialgleichung

$$z' = (1-n) \cdot p(x) \cdot z + (1-n) \cdot r(x) \ .$$

für $z(x)$ über.

Hat man die Lösung $z(x)$ mit Hilfe von Methode III ermittelt, bekommt man die Lösungen von (7) durch Rücksubstitution $y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-n}}$.

Beispiel:

(11) Für die Differentialgleichung $y' = -\frac{1}{x}y + x^2 \cdot y^2$ ist $n = 2$, $p(x) = -\frac{1}{x}$ und $r(x) = x^2$. Mit Satz 2.3 erhält man für $z(x) = y(x)^{-1}$ die Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x} \cdot z - x^2.$$

Diese lineare Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$z(x) = \frac{x}{2} \cdot (c - x^2) \ , \ c \in \mathbb{R} \ .$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = \frac{2}{x \cdot (c - x^2)} \ , \ c \in \mathbb{R} \ .$$

V. Ansatz zur Lösung Riccatischer Differentialgleichungen

Riccatische Differentialgleichungen sind von der Form

$$\boxed{y' = p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^2 + q(x) \ .} \qquad (8)$$

Sie sind nichtlinear und können durch einen einfachen Ansatz auf eine Bernoullische Differentialgleichung zurückgeführt werden. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, dass eine spezielle Lösung $u(x)$ bereits bekannt ist.

Satz 2.4 *Sei $u(x)$ eine spezielle Lösung der Riccati-Gleichung (8). Dann ist die allgemeine Lösung durch*

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

gegeben, wobei $v(x)$ die allgemeine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung

$$v' = [p(x) + 2u(x) \cdot r(x)] \cdot v + r(x) \cdot v^2$$

ist.

Beispiel:

(12) Bei dem Anfangswertproblem $y' = y - y^2 + 2$, $y(0) = 5$ ist $p(x) \equiv 1$, $r(x) \equiv -1$ und $q(x) \equiv 2$.

Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist $u(x) \equiv 2$. Sie erfüllt aber nicht die Anfangsbedingung. Nach Satz 2.4 muss man die Bernoullische Differentialgleichung

$$v' = -3v - v^2 \ .$$

lösen, was mit der Methode IV erfolgen kann. Man erhält die allgemeine Lösung

$$v(x) = \frac{3}{c \cdot e^{3x} - 1} \ , \ c \in \mathbb{R} \ .$$

Damit ist die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y(x) = u(x) + v(x) = 2 + \frac{3}{c \cdot e^{3x} - 1} \ , \ c \in \mathbb{R} \ .$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 5$ ist für $c = 2$ erfüllt.

VI. Lösung exakter Differentialgleichungen

Ist die differenzierbare Funktion $y(x)$ implizit durch die Gleichung $u(x, y) = c$ gegeben (siehe Band I, Satz 32.1), so gilt nach der Kettenregel für Funktionen von zwei Variablen (siehe Band I, Kapitel 30)

$$\frac{d}{dx} u(x, y(x)) = u_x(x, y(x)) \cdot 1 + u_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0 \ .$$

Die Funktion befriedigt also die Differentialgleichung

$$u_x(x, y) + u_y(x, y) \cdot y' = 0 \ .$$

Definition 2.1 *Sei R ein offenes Rechteck im $\mathbb{R}^2$. Eine Differentialgleichung der Form*

$$f(x,y) + g(x,y) \cdot y' = 0$$

mit stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ heißt **exakt** *auf R, wenn es eine Funktion $u(x,y)$ so gibt, dass die beiden Beziehungen*

$$u_x(x,y) = f(x,y)\ ,\ u_y(x,y) = g(x,y) \quad \textit{für} \quad (x,y) \in R$$

gelten.

Bemerkung:

(13) Die Differentialgleichung

$$f(x,y) + g(x,y) \cdot y' = 0 \tag{9}$$

hat, wenn sie exakt ist, die Lösungen $u(x,y) = c\ ,\ c \in \mathbb{R}$. Um eine solche Differentialgleichung zu lösen, benötigt man also ein Kriterium, mit dem Exaktheit geprüft werden kann, und eine Methode, die Funktion $u(x,y)$ zu bestimmen. Beides ist in Band I, Kapitel 35 behandelt worden, denn die Bedingungen in Definition 2.1 bedeuten, dass $u(x,y)$ ein Potential des Vektorfeldes $(f(x,y), g(x,y))^T$ auf dem Rechteck R ist.

Satz 2.5 *Die Differentialgleichung (9) ist genau dann exakt auf R, wenn die* **Integrabilitätsbedingung**

$$f_y(x,y) = g_x(x,y) \quad \textit{für} \quad (x,y) \in R$$

gilt. In diesem Falle ist die Lösung von (9) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ für $(x_0,y_0) \in R$ implizit durch die Gleichung $u(x,y) = 0$, gegeben mit

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} g(x_0, \eta)\mathrm{d}\eta\ .$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist $u(x,y) = c\ ,\ c \in \mathbb{R}$.

Bemerkung:

(14) Die Differentialgleichung (9) wird auch häufig in der **symmetrischen Form**

$$\boxed{f(x,y)\ \mathrm{d}x + g(x,y)\ \mathrm{d}y = 0} \tag{10}$$

geschrieben.

Beispiel:

(15) Die Differentialgleichung $y' = \dfrac{x+y^2}{1-2xy}$ hat die symmetrische Form

$$(x+y^2)\mathrm{d}x + (2xy-1)\mathrm{d}y = 0,$$

also ist $f(x,y) = x + y^2$ und $g(x,y) = 2xy - 1$. Wegen $f_y(x,y) = g_x(x,y) = 2y$ ist die Differentialgleichung exakt auf $\mathbb{R}^2$.

Zur Berechnung von $u(x,y)$ setzen wir $x_0 = y_0 = 0$ und verwenden die Formel von Satz 2.5:

$$u(x,y) = \int_0^x (\xi + y^2)\mathrm{d}\xi + \int_0^y (-1)\mathrm{d}\eta = \tfrac{1}{2}x^2 + xy^2 - y.$$

Wir erhalten also die Lösungen in der impliziten Form

$$\tfrac{1}{2}x^2 + xy^2 - y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen und Ergänzungen:

(16) Ist die Differentialgleichung (9) nicht exakt, dann gelingt es mitunter, durch Multiplikation der Gleichung mit einer geeigneten Funktion $\mu(x,y)$ eine exakte Differentialgleichung herzustellen. Die zu befriedigende Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot f) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot g)$$

liefert uns eine partielle Differentialgleichung für $\mu(x,y)$:

$$g \cdot \mu_x - f \cdot \mu_y = \Big[f_y - g_x\Big] \cdot \mu\ . \tag{11}$$

Glücklicherweise benötigen wir nur eine Lösung $\mu(x,y) \not\equiv 0$. Diese zu finden ist manchmal nicht schwierig.

Ist

$$\mu(x,y) \cdot f(x,y)\ dx + \mu(x,y) \cdot g(x,y)\ dy = 0$$

eine exakte Differentialgleichung, so nennt man $\mu(x,y)$ einen **integrierenden Faktor** der Differentialgleichung (10).

Beispiel:

(17) Die Differentialgleichung $y' = -\dfrac{x \cdot y^3}{1 + 2x^2 \cdot y^2}$ lautet in symmetrischer Form

$$xy^3 \mathrm{d}x + (1 + 2x^2y^2)\mathrm{d}y = 0 \; .$$

Wegen $f_y(x,y) = 3xy^2 \neq 4xy^2 = g_x(x,y)$ ist diese nicht exakt.

Wir suchen also einen integrierenden Faktor.

Die partielle Differentialgleichung (11) lautet in diesem Beispiel

$$(1 + 2x^2y^2) \cdot \mu_x - xy^3 \cdot \mu_y = -xy^2 \cdot \mu .$$

Wir versuchen, eine **nur von y abhängige** Lösung $\mu = \mu(y)$ zu finden. Wegen $\mu_x = 0$ folgt

$$-xy^3 \cdot \mu'(y) = -xy^2 \cdot \mu(y)$$

mit der Lösung $\mu(y) = y$. Somit ist die Differentialgleichung

$$xy^4 \mathrm{d}x + (y + 2x^2y^3)\mathrm{d}y = 0$$

exakt. Sie kann nun wie in Beispiel (15) gelöst werden.

Die Lösungen sind in impliziter Form gegeben durch

$$(x^2y^2 + 1) \cdot y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

VII. Lösung durch Übergang zur Umkehrfunktion

Zur Lösung einer Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(x, y(x)) \tag{12}$$

kann es zweckmäßig sein, die Rollen der Variablen zu vertauschen, das heißt, die Differentialgleichung für die Umkehrfunktion $x(y)$ aufzustellen und zu lösen.

Aus (12) folgt

$$x'(y) = \frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(x(y), y)} \; . \tag{13}$$

Diese Differentialgleichung ist manchmal leichter zu lösen als (12).

Beispiel:

(18) Zu lösen ist das Anfangswertproblem $y' = \dfrac{x \cdot y}{x^2 + 3y^3}$, $y(3) = 1$.

Der Übergang zur Umkehrfunktion liefert das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{x^2 + 3y^3}{x \cdot y} = \frac{x}{y} + 3y^2 \cdot x^{-1} \; , \; x(1) = 3 \; .$$

Dies ist ein Anfangswertproblem mit einer Bernoullischen Differentialgleichung für $x(y)$. Sie kann mit Methode IV gelöst werden. Wir setzen (vgl. Satz 2.3) $z(y) = x^2(y)$ und erhalten für $z(y)$ die lineare Differentialgleichung

$$z' = \frac{2z}{y} + 6y^2 \; .$$

Nun gehen wir nach Methode III vor und erhalten mit Satz 2.1 die allgemeine Lösung

$$z(y) = c \cdot y^2 + 6y^3, \quad c \in \mathbb{R} \; .$$

Dies ergibt schließlich wegen $x > 0$ und der transformierten Anfangsbedingung $x(1) = 3$ die spezielle Lösung

$$x(y) = \sqrt{3y^2 + 6y^3} \; .$$

Dies ist die Umkehrfunktion der gesuchten Lösung $y(x)$.

ÜBUNGEN

Ü2.1:

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{\sin y}{x}, \quad y(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\pi}{2}, \quad x > 0$$

durch Trennen der Veränderlichen.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y)$$

durch die Substitution $z(x) = x + y(x)$ und anschließender Trennung der Veränderlichen.

Ü2.2: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x}$$

für $x \neq 0$.

Ü2.3: Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y' = -2 \cdot y \cdot \cos x + \cos x \, .$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen mit der Methode der Variation der Konstanten.

b) Raten Sie eine (möglichst einfache) partikuläre Lösung $y_0(x)$ und bestimmen Sie sodann alle Lösungen mit Hilfe von Satz 2.2.

Ü2.4: Bestimmen Sie für $x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \tan x \cdot y - 2 \cdot \sin x \, ,$$

mit der Formel aus Satz 2.1.

Ü2.5: Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{3}{1+x} \cdot y + 3 \cdot (1+x) \quad , \quad y(0) = 0 \, .$$

Ü2.6: Gegeben sei die Bernoullische Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{2x} \cdot y + 6x^2 \cdot y^5 \, .$$

a) Transformieren Sie diese Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung (vgl. Satz 2.3).

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $x > 0$.

Ü2.7: Bestimmen Sie für $x \neq 0$ alle nichttrivialen Lösungen der Bernoullischen Differentialgleichung

$$x^3 \cdot y' - y^2 - x^2 \cdot y = 0 \, .$$

Ü2.8: Die Riccati-Differentialgleichung

$$y' = \left(-\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right) \cdot y + \frac{1}{x^2} \cdot y^2 + \left(4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

besitzt für $x > 0$ die partikuläre Lösung $u(x) = 4x + 1$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes aus Satz 2.4 die allgemeine Lösung $y(x)$.

b) Welche dieser Lösungen erfüllt die Anfangsbedingung $y(1) = 6$?

Ü2.9: Schreiben Sie die Differentialgleichung

$$(4x^2 \cdot y^3 + x \cdot \cos y) \cdot y' + 2x \cdot y^4 + \sin y = 0$$

um in eine symmetrische Form der Gestalt (10) und zeigen Sie, dass sie exakt ist. Sodann geben Sie die allgemeine Lösung an.

Ü2.10: Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$(xy^2 - y^3)\, dx + (1 - xy^2)\, dy = 0$$

nicht exakt ist. Bestimmen Sie einen nur von y abhängigen integrierenden Faktor $\mu(y)$ (vgl. Bemerkung (16)) und lösen Sie anschließend die nun für $y > 0$ und für $y < 0$ exakte Differentialgleichung.

Ü2.11: Bestimmen Sie alle nichttrivialen Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2}{1 + x \cdot y}$$

durch Rollentausch der Variablen (Methode VII).

3 Existenz- und Eindeutigkeitsfragen

Dieses Kapitel behandelt die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines Anfangswertproblems mit einer Differentialgleichung in expliziter Form

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \, . \tag{1}$$

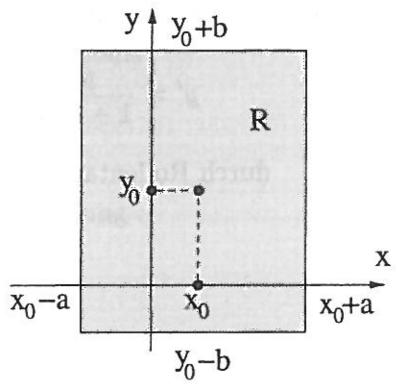
In Kapitel 1 hatten wir bei den geometrischen Betrachtungen bereits festgestellt, dass durch einen Punkt (x_0, y_0) mehrere Lösungskurven verlaufen können (Bemerkung (11)).

Es gibt aber auch Fälle, in denen (1) keine Lösung besitzt, wo also durch (x_0, y_0) keine Lösungskurve hindurchgeht. Die Antwort auf die Frage, wie man einem Anfangswertproblem ansehen kann, welche Situation vorliegt, geben die folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssätze.
Sei

$$R := \{(x, y) : \ |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b\}$$

das Rechteck mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Seitenlängen $2a$ und $2b$. Ferner sei $f(x, y)$ eine auf R definierte und dort stetige Funktion. Wir setzen

$$M := \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)| \text{ und } \alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\} \, .$$



Definition 3.1 *Die Funktion $f(x, y)$ heißt auf R* **Lipschitz-stetig** *bzgl. der Variablen y, falls eine Konstante L (die* **"Lipschitz-Konstante"***) existiert mit*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L \cdot |y_2 - y_1| \quad \textit{für alle } (x, y_1), \ (x, y_2) \in R \, .$$

Diese Ungleichung heißt **Lipschitz-Bedingung** *für $f(x, y)$ auf R.*

Die Überprüfung der Lipschitz-Bedingung erleichtert in vielen Fällen

Satz 3.1
Die Funktion $f(x, y)$ besitze auf R eine stetige partielle Ableitung nach y. Dann ist $f(x, y)$ auf R auch Lipschitz-stetig bzgl. y.

Bemerkung:

(1) Die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitung $f_y(x, y)$ auf R ist hinreichend für die Lipschitz-Stetigkeit von $f(x, y)$ auf R. Es gibt aber auch Lipschitz-stetige Funktionen, die nicht partiell differenzierbar sind, bei denen Satz 3.1 zum Nachweis nicht angewendet werden kann. Zum Beispiel ist die Funktion $f(x, y) = |y|$ an den Stellen $(x, 0)$ nicht nach y differenzierbar, trotzdem aber überall Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten $L = 1$.

Die folgenden Existenzaussagen tragen die Namen der drei Mathematiker Giuseppe Peano (1858-1932), Emile Picard (1856-1941) und Ernst Lindelöf (1870-1946). Der zweite der Sätze liefert neben der Existenzaussage auch ein Konstruktionsverfahren für die Lösung.

Satz 3.2 (Peano)
Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig auf R. Dann besitzt das Anfangswertproblem (1) **mindestens eine** *Lösung $y(x)$ auf dem Intervall $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.*

Satz 3.3 (Picard-Lindelöf)
Die Funktion $f(x, y)$ sei auf R stetig und zusätzlich Lipschitz-stetig bezüglich y. Dann besitzt das Anfangswertproblem (1) **genau eine** *Lösung $y(x)$ auf dem Intervall $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.*
Sie kann iterativ mit folgendem Verfahren gewonnen werden:
Man startet mit einer auf J stetigen Funktion $u_0(x)$ mit

$$|u_0(x) - y_0| \leq b \quad \textit{für alle} \quad x \in J$$

und bildet für $n = 1, 2, \ldots$ nacheinander die Funktionen

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1}(t)) \mathrm{d}t \quad \textit{für} \quad x \in J \, .$$

Die Folge $\{u_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf J gegen die Lösung $y(x)$ von (1).

Bemerkungen und Ergänzungen:

(2) Ersetzt man in den Sätzen 3.1 bis 3.3 das Rechteck R durch den Streifen

$$S := \{(x,y) : \ |x - x_0| \le a, \ y \in \mathbb{R}\},$$

und ist $f(x,y)$ stetig und bzgl. y Lipschitz-stetig auf S, dann gelten die Aussagen beider Sätze mit $\alpha = a$.

(3) Für alle in Satz 3.3 gebildeten Funktionen $u_n(x)$ gilt $y_0 - b \le u_n(x) \le y_0 + b$ für $x \in J$.

Beispiele:

(4) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = y \quad , \quad y(0) = 1.$$

Hier ist $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ und $f(x,y) = y$.

a) Sei $R = \{(x,y) : \ -1 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2\}$
also: $a = b = 1$, $M = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$.
$f(x,y)$ ist stetig auf R, also existiert nach Satz 3.2 mindestens eine Lösung im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Wegen $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |y_2 - y_1|$ ist in R eine Lipschitz-Bedingung mit $L = 1$ erfüllt. Also existiert nach Satz 3.3 genau eine Lösung im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

b) Sei a eine beliebige positive Zahl und $S = \{(x,y) : \ -a \le x \le a \ , \ y \in \mathbb{R}\}$ ein Streifen der Breite $2a$. Da $f(x,y) = y$ in $\mathbb{R}^2$ die Lipschitz-Bedingung mit $L = 1$ erfüllt, besitzt das Anfangswertproblem nach Bemerkung (2) und Satz 3.3 genau eine Lösung im Intervall $[-a, a]$.

(5) Zu der Differentialgleichung $y' = 3 \cdot y^{\frac{2}{3}}$ betrachten wir folgende Anfangsbedingungen:

a) $y(0) = 0$, also $x_0 = y_0 = 0$.

Die rechte Seite $f(x,y) = 3 \cdot y^{\frac{2}{3}}$ ist zwar in ganz $\mathbb{R}^2$ stetig, aber in keiner (noch so kleinen) Umgebung von $(x_0, y_0) = (0,0)$ Lipschitz-stetig, denn es gilt

$$f_y(x,y) = \frac{2}{y^{1/3}},$$

und dieser Ausdruck wird beliebig groß für $y \to 0$. Es sind also die Voraussetzungen von Satz 3.2, aber nicht die von Satz 3.3 erfüllt. Tatsächlich existieren auch viele Lösungen des Anfangswertproblems, nämlich (vgl. Kapitel 1, Beispiel (12)):

$$y(x) = \begin{cases} (x+c)^3 & \text{für } -\infty < x \le -c \\ 0 & \text{für } -c \le x \le c \\ (x-c)^3 & \text{für } c \le x < \infty \end{cases}$$

mit beliebigem $c > 0$.

b) $y(0) = 2$, also $x_0 = 0$, $y_0 = 2$.

Im Rechteck $\{(x,y) : \ |x| \le a \ , \ |y - 2| \le 1\}$ gilt $\left|f_y(x,y)\right| = \frac{2}{|y^{1/3}|} \le 2$, sodass die Voraussetzungen für Satz 3.3 erfüllt sind.

Die auf dem Intervall $[-1, 1]$ eindeutig bestimmte Lösung lautet

$$y(x) = (x + \sqrt[3]{2})^3 .$$

Diese Funktion ist sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung.

(6) In dem Streifen $S = \{(x,y) : \ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, \ y \in \mathbb{R}\}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1 .$$

Die hierzu eindeutig bestimmte Lösung lautet:

$$y(x) = (1 - x)^{-1} \quad \text{für } x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}].$$

Wegen

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |y_2^2 - y_1^2| = |y_2 + y_1| \cdot |y_2 - y_1|$$

ist $f(x,y) = y^2$ nicht Lipschitz-stetig bzgl. y in S, da keine Zahl L existiert, mit der die Lipschitz-Bedingung in Definition 3.1 befriedigt werden könnte.

Dieses Beispiel zeigt also, dass die Bedingung aus Bemerkung (2) lediglich hinreichend aber nicht notwendig für die eindeutige Lösbarkeit ist.

(7) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 \quad , \quad y(0) = 0 .$$

Wir wollen das Iterationsverfahren nach Picard-Lindelöf (also das in Satz 3.3 angegebene Verfahren) anwenden, um die Lösung näherungsweise zu berechnen. Hier ist $x_0 = y_0 = 0$ und $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Wir starten mit $u_0(x) \equiv 0$ und iterieren bis $n = 3$:

$$\begin{aligned} n = 1: \ u_1(x) &= \int_0^x (t^2 + 0^2)dt = \tfrac{1}{3}x^3 \\ n = 2: \ u_2(x) &= \int_0^x (t^2 + \tfrac{1}{9}t^6)dt = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{63}x^7 \\ n = 3: \ u_3(x) &= \int_0^x (t^2 + (\tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{63}t^7)^2)dt \\ &= \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{63}x^7 + \tfrac{2}{2079}x^{11} + \tfrac{1}{59535}x^{15} . \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist schnell; $u_3(x)$ ist im Intervall $[-1, 1]$ bereits eine sehr gute Näherung an die Lösung.

ÜBUNGEN

Ü3.1: Gegeben seien ein Rechteck und ein Streifen:

$$R = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}, \; S = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}.$$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Lipschitz-Stetigkeit bzgl. y in R bzw. S:

a) $f_1(x,y) = x^2 \cdot y$ in R ,

b) $f_2(x,y) = x \cdot y^3$ in R ,

c) $f_3(x,y) = x \cdot y^2$ in S ,

d) $f_4(x,y) = x^2 + 2y$ in S .

Ü3.2: Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{|x \cdot y|}, \qquad y(1) = 0.$$

Bestimmen Sie durch Anwendung des Satzes von Peano (Satz 3.2) auf das Rechteck

$$R = \{(x,y) : |x-1| \leq 3, |y| \leq 4\}$$

ein Intervall J, auf dem eine Lösung des Anfangswertproblems existiert.

Ü3.3: Zeigen Sie bei den folgenden Anfangswertproblemen, dass sie jeweils genau eine Lösung im Intervall $[1, 2]$ besitzen:

a) $y' = \sin(\sqrt{3x - x^2 - 2}) \cdot y, \qquad y(\tfrac{3}{2}) = 10^3,$

b) $y' = \sin(\sqrt{3x - x^2 - 2}) \cdot y^2, \qquad y(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{4}.$

Ü3.4: Für das Anfangswertproblem

$$y' = x \cdot y \quad , \quad y(0) = 1$$

berechnen Sie eine Näherungslösung nach der Iterationsmethode von Picard-Lindelöf, also nach dem in Satz 3.3 beschriebenen Verfahren. Starten Sie mit $u_0(x) \equiv 1$ und iterieren Sie bis $n = 3$.

4 Spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In diesem Kapitel sollen einige wichtige Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt werden, die sich entweder direkt lösen oder auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lassen. Letzteres nennt man **"Reduktion der Ordnung"**. Wir betrachten Anfangswertprobleme mit Differentialgleichungen 2. Ordnung in expliziter Form

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = \alpha_0, \; y'(x_0) = \alpha_1,$$

bei denen die Funktion f auf der rechten Seite eine spezielle Gestalt hat. Die Lösungen dieser Anfangswertprobleme sind in einer Umgebung des Anfangspunktes x_0 definiert. Wir werden nur in Beispielen diese Umgebung konkret angeben.

I. Die Funktion $y(x)$ tritt nicht direkt auf

$$\boxed{y'' = f(x, y'), \; y(x_0) = \alpha_0, \; y'(x_0) = \alpha_1} \qquad (1)$$

Mit der Substitution $z = y'$ erhält man ein Anfangswertproblem erster Ordnung, das mit den Methoden aus Kapitel 2 gelöst werden kann. Aus der Lösung z kann man durch Integration die Lösung y des Ausgangsproblems bestimmen:

$$\boxed{z' = f(x, z), \; z(x_0) = \alpha_1 \quad \text{und} \quad y(x) = \alpha_0 + \int_{x_0}^{x} z(t)\mathrm{d}t}$$

Beispiel:

(1) Bei dem Anfangswertproblem

$$y'' = y' + x^2, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 1$$

ist $f(x, y') = y' + x^2$, $x_0 = 0$, $\alpha_0 = 3$ und $\alpha_1 = 1$.

Das zugehörige Anfangswertproblem erster Ordnung

$$z' = z + x^2 \quad , \quad z(0) = 1$$

beinhaltet eine lineare Gleichung erster Ordnung. Es läßt sich mit Methode III aus Kapitel 2 lösen. Man erhält

$$z(x) = 3e^x - (x^2 + 2x + 2).$$

Anschließend wird $y(x)$ durch Integration ermittelt:

$$y(x) = 3 + \int_0^x z(t)\mathrm{d}t = 3e^x - (\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x) .$$

Ist nicht die spezielle Lösung des Anfangswertproblems sondern die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gesucht, so bestimmt man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $z' = z + x^2$ und berechnet das unbestimmte Integral von $z(x)$. Man erhält

$$z(x) = c \cdot e^x - (x^2 + 2x + 2) , \; c \in \mathbb{R} ,$$

und

$$y(x) = \int z(x)\mathrm{d}x + \tilde{c} = c \cdot e^x - (\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x) + \tilde{c} , \quad c, \tilde{c} \in \mathbb{R} .$$

II. Die unabhängige Variable x tritt nicht direkt auf

$$\boxed{y'' = f(y, y') , \; y(x_0) = \alpha_0 , \; y'(x_0) = \alpha_1 .} \tag{2}$$

Hier kommt man zum Ziel, wenn man zunächst nicht die Lösung $y(x)$ sondern ihre Umkehrfunktion $x(y)$ ermittelt. Man nennt dieses Vorgehen **"Variablentausch"**. Bei Differentialgleichungen erster Ordnung haben wir dies bereits kennengelernt (Methode VII in Kapitel 2). Die Umkehrfunktion existiert, wenn $y(x)$ stetig differenzierbar mit einer von Null verschiedenen Ableitung ist. Gilt in der zweiten Anfangsbedingung $y'(x_0) = \alpha_1 \neq 0$, so ist diese Voraussetzung in einer Umgebung von x_0 gewährleistet, und es gilt dort

$$x'(y) = \frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy(x)}{dx}} = \frac{1}{y'(x)}$$

(siehe Band 1, Satz 18.7). Für die zweiten Ableitungen erhält man mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} x''(y) &= \frac{d}{dy}(x'(y)) = \frac{d}{dy}\Big(\frac{1}{y'(x(y))}\Big) = -\frac{1}{y'(x)^2} \cdot \frac{d}{dy}(y'(x(y))) \\ &= -\frac{1}{y'(x)^2} \cdot y''(x) \cdot \frac{1}{y'(x)} = -(x'(y))^3 \cdot y''(x) . \end{aligned}$$

Ist $y(x)$ die Lösung des Anfangswertproblems (2), so ist also die Umkehrfunktion Lösung des Anfangswertproblems

$$\boxed{x'' = -(x')^3 \cdot f\Big(y, \frac{1}{x'}\Big) , \; x(\alpha_0) = x_0 , \; x'(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_1} .}$$

Dies ist ein Anfangswertproblem vom Typ I, da die Funktion $x(y)$ selbst auf der rechten Seite der Differentialgleichung nicht auftritt, nur $x'(y)$ und die unabhängige Variable y. Mit dem in I beschriebenen Verfahren kann dieses transformierte Anfangswertproblem gelöst werden. Ist $x(y)$ die Lösung, so löst die Umkehrfunktion $y(x)$ das Ausgangsproblem.

Beispiel:

(2) Das Anfangswertproblem

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y} , \; y(0) = 3 , \; y'(0) = 1$$

geht durch Variablentausch in das transformierte Problem

$$x'' = -(x')^3 \cdot \Big(-\frac{1}{(x')^2} \cdot \frac{1}{y}\Big) = \frac{x'}{y} , \; x(3) = 0 , \; x'(3) = 1$$

über. Mit $v(y) = x'(y)$ erhält man das Anfangswertproblem erster Ordnung

$$v' = \frac{v}{y} , \; v(3) = 1 ,$$

das die Lösung $v(y) = \frac{y}{3}$ besitzt. Also ist

$$x(y) = 0 + \int_3^y \frac{t}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{y^2 - 9}{6} .$$

Damit ergibt sich die Lösung $y(x) = \sqrt{6x + 9}$ des Ausgangsproblems, die für $x > -\frac{3}{2}$ definiert und monoton ist.

III. Es treten x und y' nicht auf

Bei dem Anfangswertproblem

$$\boxed{y'' = f(y) , \; y(x_0) = \alpha_0 , \; y'(x_0) = \alpha_1} \tag{3}$$

handelt es sich um einen Spezialfall von (2), bei dem aber der Übergang zur Umkehrfunktion nicht nötig ist.

Zuerst multiplizieren wir beide Seiten der Differentialgleichung mit $2y'$ und erhalten

$$2y' \cdot y'' = 2\, f(y) \cdot y' \,.$$

Nach der Kettenregel ist die linke Seite dieser Gleichung gleich $\frac{d}{dx}(y')^2$ und die rechte gleich $\frac{d}{dx} 2\, F(y(x))$ für eine beliebige Stammfunktion $F(y)$ von $f(y)$. Daraus folgt

$$(y')^2 = 2\, F(y) + c \,,\; c \in \mathbb{R} \,.$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt $c = \alpha_1^2 - 2\, F(\alpha_0)$, und wir erhalten die Differentialgleichung

$$\boxed{y' = \pm\sqrt{2\, F(y) + \alpha_1^2} \quad \text{mit} \quad F(y) = \int_{\alpha_0}^{y} f(t)\mathrm{d}t}$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Variablen für y. Wegen der zweiten Anfangsbedingung ist das positive Vorzeichen vor der Wurzel zu wählen, wenn $\alpha_1 > 0$, und das negative, wenn $\alpha_1 < 0$ ist. Diese Differentialgleichung kann durch Trennen der Veränderlichen gelöst werden (vgl. Kapitel 2, Methode I). Mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = \alpha_0$ erhalten wir eine eindeutige Lösung.

Bemerkung:

(3) Anfangswertprobleme der Form (3) treten häufig in der Mechanik auf, wobei y'' abgesehen von einem konstanten Faktor die Rolle der Beschleunigung, x die der Zeit und $f(y)$ die der Kraft spielen. Die obige Umformung ist dann nichts Anderes, als der Übergang von einer Bewegungsgleichung zu einer Energiebilanzgleichung.

Beispiel:

(4) Wir greifen das Beispiel (9) von Kapitel 1 auf. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$m \cdot \ddot{s} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{s^2}, \quad s(0) = s_0 \,,\; \dot{s}(0) = v_0 \,,$$

welches die Bewegung eines Körpers der Masse m beschreibt, dessen Abstand $s(t)$ vom Erdmittelpunkt zur Zeit $t = 0$ gleich s_0 ist und dessen Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ den Wert v_0 besitzt. γ ist die Gravitationskonstante und M die Erdmasse. Wir kürzen aus der Gleichung m heraus und gehen nach der Methode III vor. Es ergibt sich

$$\dot{s} = \pm\sqrt{2\gamma M \cdot \Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_0}\Big) + v_0^2} \,,$$

wobei das Vorzeichen vor der Wurzel mit dem Vorzeichen von v_0 übereinstimmt. Wir behandeln nur noch den Fall $v_0 > 0$, also zu Beginn bewegt sich der Körper nach oben. Mit den Abkürzungen

$$a = 2\, \gamma\, M \quad \text{und} \quad b = v_0^2 - \frac{2\gamma M}{s_0}$$

erhält man das Anfangswertproblem erster Ordnung

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{a}{s} + b} \,,\; s(0) = s_0 \,. \tag{4}$$

Ist $b \geq 0$, so bleibt $\dot{s}$ immer positiv, und der Körper kehrt niemals zur Erde zurück. Dies gilt auch noch im Falle $b = 0$, der dann eintritt, wenn für die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{s_0}}$ gilt. Es ist die kleinste Geschwindigkeit, mit der ein Verlassen des Gravitationsfeldes der Erde möglich ist. Sie heißt die **Fluchtgeschwindigkeit**. Mit $\gamma \approx 6.7 \cdot 10^{-23}\mathrm{km}^3\mathrm{g}^{-1}\mathrm{sec}^{-2}$, $M \approx 6 \cdot 10^{27}\mathrm{g}$ und $s_0 =$ Erdradius $\approx 6.3 \cdot 10^3$ km errechnet man

$$v_0 \approx 11.297\ \mathrm{km/sec} \,.$$

Es bleibt nun noch, das Anfangswertproblem (4) zu lösen. Es ergibt sich durch Integration

$$\int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a/\eta + b}} = t \,.$$

Wir wollen dieses Integral jetzt nur für den Fall $b = 0$, also für den Fall $v_0 =$ Fluchtgeschwindigkeit berechnen. Man erhält

$$s(t) = \Big(\frac{3\,\sqrt{a}}{2}\, t + s_0^{3/2}\Big)^{2/3} \,.$$

IV. Die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

Die Differentialgleichung

$$\boxed{y'' = p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y} \tag{5}$$

ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir werden in den folgenden drei Kapiteln lineare Differentialgleichungen auch höherer Ordnung ausführlich behandeln. Hier soll nur gezeigt werden, wie man die allgemeine Lösung von (5) bestimmen kann, wenn man eine spezielle Lösung $y_1(x)$ bereits kennt.

Die Differentialgleichung hat wie jede homogene lineare Differentialgleichung die Lösung $y(x) \equiv 0$, die **"triviale Lösung"**. Ist $y_1(x)$ eine nichttriviale Lösung, so sind alle Funktionen $y(x) = c \cdot y_1(x)$, $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls Lösungen. Weitere findet man durch einen **Ansatz der Variation der Konstanten**

$$y(x) = v(x) \cdot y_1(x) . \tag{6}$$

Setzt man $y(x)$ in dieser Form in (5) ein und benutzt die Tatsache, dass $y_1(x)$ eine Lösung ist, so erhält man für $v(x)$ die lineare homogene Differentialgleichung

$$v'' = v' \cdot \left(p(x) - \frac{2\,y_1'(x)}{y_1(x)}\right),$$

die, da v selbst nicht vorkommt, nach Methode I gelöst werden kann. Die Reduktion der Ordnung führt auf eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Dies wurde in Kapitel 2 Beispiel (4) allgemein durchgeführt. In unserem Fall ist das Ergebnis

$$v(x) = c_1 \cdot \int e^{h(x)}\,dx + c_2 \quad \text{mit} \quad h(x) = \int \left(p(x) - \frac{2\,y_1'(x)}{y_1(x)}\right) dx . \tag{7}$$

Satz 4.1 *Sei $y_1(x)$ eine nichttriviale Lösung von (5). Dann ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung durch*

$$y(x) = v(x) \cdot y_1(x) ,$$

gegeben, wobei die Funktion $v(x)$ in (7) definiert ist.

Beispiel:

(5) Die Differentialgleichung $y'' = \frac{2}{x} \cdot y' - \frac{2}{x^2} \cdot y$ hat für $x > 0$ und auch für $x < 0$ die Lösung $y_1(x) = x$. Weitere Lösungen sind $y(x) = v(x) \cdot x$, wobei $v(x)$ die Differentialgleichung

$$v'' = v' \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{2 \cdot 1}{x}\right) = 0$$

erfüllt. Also gilt $v(x) = c_1 x + c_2$, und die allgemeine Lösung $y(x)$ der Ausgangsgleichung ist

$$y(x) = c_1\, x^2 + c_2\, x .$$

Kommen zu der Differentialgleichung noch zwei Anfangsbedingungen hinzu, etwa $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, dann sind die beiden Integrationskonstanten eindeutig bestimmt, und man erhält die spezielle Lösung

$$y(x) = 2x - x^2 .$$

ÜBUNGEN

Ü4.1: a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' = \sqrt{x \cdot y'}$.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung in a) mit den beiden Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$.

Ü4.2: a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y' = x + 2 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 2.$$

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x \cdot y'' - y' + \frac{2}{x} = 0 .$$

Ü4.3: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0$$

durch Angabe der Umkehrfunktion $x(y)$.

Ü4.4: Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = (y+1) \cdot y' , \; y(1) = 1 , \; y'(1) = 2 .$$

Ü4.5: Lösen Sie die Anfangswertprobleme

a) $y'' = e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \sqrt{2}$,

b) $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$, $y(1) = y'(1) = 1$.

Ü4.6: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x \cdot y'' - (x+1) \cdot y' + y = 0 \quad .$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der speziellen Lösung $y_1(x) = e^x$.

b) Geben Sie die Lösung an, die die Anfangswerte $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$ annimmt.

Ü4.7: Berechnen Sie für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + (\tan x - 2\cot x) \cdot y' + 2\cot^2 x \cdot y = 0 , \quad y(\frac{\pi}{4}) = 2 , \; y'(\frac{\pi}{4}) = 3 .$$

Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist durch $y_1(x) = \sin x$ gegeben.

5 Lineare Differentialgleichungen der Ordnung n

In diesem Kapitel wollen wir uns einen Überblick über die Gesamtheit der Lösungen linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung verschaffen, um sodann Methoden zu ihrer Lösung kennenzulernen. Als Vorbereitung führen wir den Begriff der **linearen Unabhängigkeit von Funktionen** ein.

Definition 5.1
Sei I ein endliches oder unendliches Intervall, wobei auch $I = \mathbb{R}$ zugelassen ist. Ein System von Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, die auf I definiert sind, heißt **linear unabhängig über** *I, wenn aus der Beziehung*

$$c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \cdots + c_n \cdot y_n(x) = 0 \quad \textit{für alle } x \in I$$

stets folgt, dass alle Koeffizienten Null sein müssen:

$$c_1 = c_2 \cdots = c_n = 0.$$

Andernfalls heißt das Funktionensystem **linear abhängig über** *I.*

Es gibt ein bequemes Hilfsmittel, die lineare Unabhängigkeit von Funktionen zu prüfen, die **Wronskische Determinante**:

Definition 5.2
Wir setzen voraus, dass die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ $(n-1)$-mal stetig differenzierbar auf dem Intervall I sind. Die für $x \in I$ definierte Matrix

$$W(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

heißt die **Wronskische Matrix** *zu $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Ihre Determinante* $\det W(x)$ *nennt man die* **Wronskische Determinante**.

Den Zusammenhang zwischen der Wronskischen Determinante und linearer Unabhängigkeit stellt der folgende Satz her:

Satz 5.1 *Sind die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ über I linear abhängig und $(n-1)$-mal stetig differenzierbar, so gilt*

$$\det W(x) = 0 \quad \textit{für alle } x \in I\,.$$

Bemerkungen und Ergänzungen:

(1) Die Menge aller auf I definierten Funktionen bildet mit der üblichen Addition von Funktionen und der Multiplikation von Funktionen mit reellen Zahlen einen Linearen Raum im Sinne von Band I, Kapitel 9. Der dort eingeführte Begriff von linearer Unabhängigkeit korrespondiert mit Definition 5.1. Man vergleiche insbesondere Bemerkung (7) in Kapitel 9, Band I.

(2) Ist die Wronskische Determinante von $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ an einer einzigen Stelle $x \in I$ von 0 verschieden, so ist das System linear unabhängig.

Beispiele:

(3) Es sei $I = \mathbb{R}$ und

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2 - 2, \quad y_3(x) = 2x^2 + 3x - 4\,.$$

Die Wronskische Matrix

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & x^2-2 & 2x^2+3x-4 \\ 1 & 2x & 4x+3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

hat die Determinante $\det W(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hier können wir mit Satz 5.1 und Bemerkung (2) nicht auf Unabhängigkeit schließen, aber auch nicht auf Abhängigkeit. Diese folgt aus der Beziehung $y_3(x) = 3 \cdot y_1(x) + 2 \cdot y_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(4) Sei $I = \mathbb{R}$ und

$$y_1(x) = x\,, \quad y_2(x) = \sin x\,, \quad y_3(x) = \cos x\,.$$

Für die Wronski-Matrix

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad \det W(x) = -x\,.$$

Da die Wronskische Determinante nur für $x = 0$ den Wert Null hat, ist das Funktionensystem linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

(5) Die lineare Unabhängigkeit eines Funktionensystems hängt von dem zugrundeliegenden Intervall ab. Es sei

$$y_1(x) = 1 \text{ für } x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \,. \end{cases}$$

Man erhält für

a) $I_1 = [-1, 0]$ lineare Abhängigkeit, da

$$0 \cdot y_1(x) + 1 \cdot y_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in I_1,$$

gilt,

b) $I_2 = [1, 2]$ lineare Unabhängigkeit, da $\det W(x) = 2x > 0$ für alle $x \in I_2$ gilt.

Nun betrachten wir lineare Differentialgleichungen der Ordnung n:

$$\boxed{a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x) \cdot y = b(x)} \tag{1}$$

und lineare Anfangswertprobleme der Ordnung n, bei denen zur Differentialgleichung noch Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = \alpha_0 \,, \; y'(x_0) = \alpha_1 \,, \ldots , y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \tag{2}$$

hinzukommen. Die Funktionen $a_0(x), \ldots , a_n(x)$ heißen die **Koeffizienten** der Differentialgleichung, die Funktion $b(x)$ die **Störfunktion**.

Wir beschränken uns bei der Suche nach Lösungen auf Intervalle I, auf denen all diese Funktionen stetig sind und auf denen die Koeffizientenfunktion $a_n(x)$ der höchsten Ableitung $y^{(n)}$ keine Nullstellen besitzt. Der Anfangspunkt x_0 in der Anfangsbedingung (2) liegt in diesem Intervall I. Im Folgenden ist I immer ein Intervall mit diesen Eigenschaften.

Die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen klärt

Satz 5.2
Das Anfangswertproblem (1) mit (2) besitzt auf I eine eindeutige Lösung.

Diese Lösung zu bestimmen, ist die nächste Aufgabe. Für die linke Seite der Differentialgleichung (1) führen wir die Abkürzung $L(y)$ ein, also

$$L(y) = a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x) \cdot y \,.$$

Damit bekommt die Differentialgleichung die Kurzform

$$L(y) = b(x) \,.$$

Sie heißt **inhomogen**, wenn die Störfunktion $b(x)$ nicht identisch auf I verschwindet. Die zugehörige **homogene Differentialgleichung** ist

$$L(y) = 0 \,.$$

Wir werden zunächst Lösungen der homogenen Gleichung suchen. Für diese gilt das **Überlagerungsprinzip:**

Satz 5.3
Die homogene Differentialgleichung $L(y) = 0$ besitzt die triviale Lösung $y(x) = 0$ für alle $x \in I$.
Sind $y_1(x), \ldots , y_k(x)$ Lösungen, so ist jede Linearkombination

$$c_1 \cdot y_1(x) + \ldots + c_k \cdot y_k(x)$$

mit $c_1, \ldots , c_k \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

Aus Lösungen der homogenen Gleichung kann man also durch Überlagerung viele weitere gewinnen. Hat man genügend viele, so kann man daraus sogar alle Lösungen bilden:

Satz 5.4
Bilden die Lösungen $y_1(x), \ldots , y_n(x)$ der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$ ein linear unabhängiges System, so ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung durch

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + \ldots + c_n \cdot y_n(x) \,, \quad c_1, \ldots , c_n \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Bemerkung:

(6) Satz 5.3 besagt, dass die Menge der Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung einen Linearen Raum bilden (vgl. Band I, Kapitel 9). Aus Satz 5.4 entnimmt man, dass n linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots , y_n$ eine Basis bilden, dass also dieser Raum n-dimensional ist.

Definition 5.3
Ein System von n Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$, das linear unabhängig ist, heißt ein **Fundamentalsystem** *(oder eine* **Integralbasis***) der Differentialgleichung.*

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung benötigt man also ein Fundamentalsystem von Lösungen. Die Wronskische Determinante ist hilfreich, wenn die lineare Unabhängigkeit geprüft werden soll:

Satz 5.5
Seien $y_1(x), \dots, y_n(x)$ Lösungen der linearen, homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$ auf dem Intervall I. Dann gilt für ihre Wronskische Determinante $\det W(x)$ entweder
(i) $\det W(x) = 0$ für alle $x \in I$
oder
(ii) $\det W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.
Die Lösungen bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn der Fall (ii) vorliegt.

Bemerkungen und Ergänzungen:

(7) Die Bedeutung dieses Satzes 5.5 liegt darin, dass man bei n gegebenen Lösungen von $L(y) = 0$ leicht entscheiden kann, ob ein Fundamentalsystem vorliegt: Man braucht nur in einem einzigen Punkt $x \in I$ nachzuprüfen, ob $\det W(x) \neq 0$ ist oder nicht.

(8) Wegen Satz 5.2 besitzt die homogene Differentialgleichung eindeutig bestimmte Lösungen $u_1(x), \dots, u_n(x)$, $x \in I$, die die folgenden Anfangsbedingungen befriedigen:

$$u_i^{(k-1)}(x_0) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \qquad i, k = 1, \dots, n\,.$$

Für die Wronski-Matrix $W(x)$ dieser n Lösungen gilt

$$W(x_0) = I \text{ (=Einheitsmatrix)}\,, \quad \text{also} \quad \det W(x_0) = 1\,.$$

Sie bilden also ein Fundamentalsystem. Damit ist nachgewiesen, dass eine homogene lineare Differentialgleichung stets ein Fundamentalsystem besitzt.

(9) Es sei betont, dass die Sätze 5.2 bis 5.5 unter der auf Seite 40 angegebenen allgemeinen Voraussetzung formuliert wurden, dass also zum Beispiel $a_n(x) \neq 0$ in I angenommen wurde. Ohne diese Voraussetzungen sind die Aussagen im Allgemeinen nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel:

(10) Die Differentialgleichung

$$x \cdot (x-1) \cdot y'' - (2x-1) \cdot y' + 2 \cdot y = 0$$

hat auf $\mathbb{R}$ die Lösungen $y_1(x) = x^2$ und $y_2(x) = (x-1)^2$. Sie bilden ein unabhängiges System, denn ihre Wronskische Determinante $\det W(x) = 2x \cdot (x-1)$ ist nicht identisch gleich 0. Auf der anderen Seite hat sie im Gegensatz zur Aussage (ii) von Satz 5.5 zwei Nullstellen.

Auch die Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.2 trifft hier nicht zu, denn die Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$ werden sowohl von der trivialen Lösung als auch von der Lösung $y_1(x) = x^2$ befriedigt.

Wir kommen nun zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $L(y) = b(x)$. Wie schon in Kapitel 2 in Satz 2.2 bei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung gilt auch allgemein für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Satz 5.6
Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $L(y) = b(x)$ hat die Form

$$y(x) = y_h(x) + y^*(x),$$

wobei $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$ und $y^*(x)$ eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $L(y) = b(x)$ ist.

Bemerkungen und Ergänzungen:

(11) Mit Satz 5.4 erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in der Form

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + \ldots + c_n \cdot y_n(x) + y^*(x)\,, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\,.$$

Sucht man die spezielle Lösung, die die Anfangsbedingungen (2) erfüllt, so müssen die Konstanten $c_1, \dots, c_n$ geeignet gewählt werden. Die Anfangsbedingungen führen auf das lineare Gleichungssystem

$$W(x_0)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_0-y^*(x_0)\\\alpha_1-(y^*)'(x_0)\\\vdots\\\alpha_{n-1}-(y^*)^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}$$

für die Konstanten $c_1,\dots,c_n$, das wegen Satz 5.5 eindeutig lösbar ist.

(12) Zur vollständigen Lösung einer linearen Differentialgleichung wird man folgendermaßen vorgehen:

a) Man bestimmt ein Fundamentalsystem zur homogenen Differentialgleichung und erhält dann mit Satz 5.4 die allgemeine Lösung $y_h(x)$. Die Bestimmung eines Fundamentalsystems kann mit Schwierigkeiten verbunden sein. Mitunter lässt sich, wie im Fall der Ordnung 2 bei Methode IV in Kapitel 4 beschrieben, aus der Kenntnis einer Lösung ein Fundamentalsystem ermitteln. Wir bringen gleich ein Beispiel für den Fall $n=3$. Einfacher ist die Situation, wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung konstant sind. Dieser Fall wird in Kapitel 6 behandelt werden.

b) Man verschafft sich eine partikuläre Lösung $y^*(x)$ der inhomogenen Gleichung, eventuell durch „Erraten". Eine systematische Methode ist die **Methode der Variation der Konstanten**, die wir gleich beschreiben werden. Wir haben sie im Falle von Differentialgleichungen erster Ordnung (Methode III in Kapitel 2) bereits kennengelernt.

c) Mit Satz 5.6 erhält man durch Addition von $y_h(x)$ und $y^*(x)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Wir beschreiben nun die Lösungsmethode der **Variation der Konstanten**. Ausgehend von der allgemeinen Lösung

$$y_h(x)=c_1\cdot y_1(x)+\dots+c_n\cdot y_n(x)\ ,\quad c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}\ ,$$

der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$y(x)=v_1(x)\cdot y_1(x)+\dots+v_n(x)\cdot y_n(x)\ ,\tag{3}$$

und bestimmen die Funktionen $v_1(x),\dots,v_n(x)$ so, dass $y(x)$ die inhomogene Gleichung löst. Dies geschieht wie folgt: Man löst zunächst das wegen Satz 5.5 für alle $x\in I$ eindeutig lösbare Gleichungssystem

$$W(x)\cdot\begin{pmatrix}v_1'(x)\\\vdots\\v_{n-1}'(x)\\v_n'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\b(x)/a_n(x)\end{pmatrix}.\tag{4}$$

Anschließend integriert man die durch (4) ermittelten n Funktionen $v_1'(x),\dots,v_n'(x)$ und setzt sie in (3) ein. Das Ergebnis ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $L(y)=b(x)$. Sie enthält n Konstanten, die durch die n Integrationen entstanden sind.

Beispiele:

(13) Die lineare Differentialgleichung

$$y''-\tfrac{2}{x}\cdot y'+\tfrac{2}{x^2}\cdot y=x$$

zweiter Ordnung erfüllt die allgemeinen Voraussetzungen auf dem Intervall $I=(0,\infty)$.

a) Die zugehörige homogene Gleichung hat die beiden Lösungen

$$y_1(x)=x,\quad y_2(x)=x^2.$$

Diese hatten wir bereits in Beispiel (5), Kapitel 4 gefunden. Sie bilden ein Fundamentalsystem, denn ihre Wronski-Matrix

$$W(x)=\begin{pmatrix}x&x^2\\1&2x\end{pmatrix}\quad\text{hat die Determinante}\quad\det W(x)=x^2>0\text{ für }x>0\ .$$

b) Das Gleichungssystem (4) lautet in diesem Beispiel

$$\begin{pmatrix}x&x^2\\1&2x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1'(x)\\v_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}$$

und hat die Lösung

$$v_1'(x)=-x,\quad v_2'(x)=1\ .$$

Also gilt

$$v_1(x)=-\tfrac12x^2+c_1,\quad v_2(x)=x+c_2,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\ .$$

Nun erhält man aus (3) die allgemeine Lösung

$$y(x)=c_1\cdot x+c_2\cdot x^2+\tfrac12\cdot x^3,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\ .$$

(14) Das Anfangswertproblem

$$y''+y=\frac{1}{\cos x}\quad,\quad y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$$

hat auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ eine eindeutige Lösung, denn dort ist die Störfunktion $b(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ stetig.

a) Ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung ist

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x.$$

b) Das Gleichungssystem (4) lautet

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^{-1} x \end{pmatrix}$$

und hat die Lösungen $v_1'(x) = -\tan x$, $v_2'(x) = 1$. Also liefert die Integration

$$v_1(x) = \ln(\cos x) + c_1 , \quad v_2(x) = x + c_2 , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} ,$$

und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = (\ln(\cos x) + c_1) \cdot \cos x + (x + c_2) \cdot \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

c) Aus den Anfangsbedingungen ergeben sich die Konstanten $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, sodass

$$y^*(x) = \ln(\cos x) \cdot \cos x + (x + 1) \cdot \sin x$$

die Lösung des Anfangswertproblems ist.

(15) Die lineare Differentialgleichung

$$x^3 \cdot y''' - 3x^2 \cdot y'' + 6x \cdot y' - 6 \cdot y = 2$$

dritter Ordnung soll für $x > 0$ gelöst werden. Dort hat der Koeffizient x^3 von y''' keine Nullstelle.

a) Wir erraten die partikuläre Lösung: $y^*(x) = -\frac{1}{3}$.

b) Wir erraten für die homogene Gleichung die Lösung $y_1(x) = x$ und benötigen noch zwei weitere Lösungen der homogenen Gleichung, um ein Fundamentalsystem zu erhalten.

c) Mit dem Ansatz

$$y_h(x) = v(x) \cdot y_1(x) = v(x) \cdot x$$

(Variation der Konstanten) erhalten wir aus der homogenen Differentialgleichung $v'''(x) = 0$. Durch dreimaliges Integrieren ergibt sich

$$v(x) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2, \quad c_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, 3,$$

und somit die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} .$$

d) Wir zeigen, dass die drei Lösungen

$$y_1(x) = x , \quad y_2(x) = x^2 , \quad y_3(x) = x^3$$

ein Fundamentalsystem bilden. Ihre Wronski-Matrix ist

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{pmatrix}$$

und hat die für $x = 1$ positive Determinante $\det W(1) = 2$.

e) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist damit

$$y(x) = -\tfrac{1}{3} + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 , \quad c_1 , c_2 , c_3 \in \mathbb{R} .$$

(16) Die Differentialgleichung

$$x^3 \cdot y''' - 3x^2 \cdot y'' + 6x \cdot y' - 6 \cdot y = 2x^3$$

unterscheidet sich von der im vorigen Beispiel nur durch die Störfunktion $b(x) = 2x^3$. Wir suchen auch hier eine Lösung für $x > 0$. Da eine partikuläre Lösung $y^*(x)$ jetzt nicht auf der Hand liegt, wenden wir die Methode der Variation der Konstanten gemäß (3) und (4) an, wobei wir das im vorigen Beispiel ermittelte Fundamentalsystem verwenden. Wir erhalten das Gleichungssystem und die Lösung:

$$\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \\ v_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ x^{-1} \end{pmatrix} .$$

Die Integration ergibt

$$v_1(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + c_1 , \quad v_2(x) = -2x + c_2 , \quad v_3(x) = \ln x + c_3$$

und somit die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + (c_3 - \tfrac{3}{2}) \cdot x^3 + x^3 \cdot \ln x , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} .$$

ÜBUNGEN

Ü5.1: Prüfen Sie bei den folgenden Funktionssystemen, ob sie linear abhängig oder linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind:

a) $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x, \quad y_3(x) = \sin x,$

b) $y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = 2 \cdot \sin x, \quad y_3(x) = 3x^2 - \sin x.$

Ü5.2: Entscheiden Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, in welchen Fällen die folgenden Funktionen ein Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung der Form (1) bilden können:

a) $y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = x^2,$

b) $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2, \quad y_3(x) = x^5,$

c) $y_1(x) = \sin x, \quad y_2(x) = \cos x,$

d) $y_1(x) = \sin^2 x, \quad y_2(x) = 2 \cdot \cos^2 x, \quad y_3(x) = 3,$

e) $y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x \cdot e^x.$

Ü5.3: Gegeben sei für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$x \cdot (x+1) \cdot y'' - (2x+1) \cdot y' + 2 \cdot y = 2x \cdot (x+1) .$$

a) Überprüfen Sie, ob die Funktionen $y_1(x) = (x+1)^2$ und $y_2(x) = x^2$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bilden.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten.

Ü5.4: Gegeben sei für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$x^2 \cdot y''' - 2 \cdot y' = \frac{1}{x} \cdot \ln x .$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x^3, \quad y_3(x) = \ln x$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bilden.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten.

Hinweis: $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^4} \mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3} .$

Ü5.5: Überprüfen Sie, ob die angegebenen Funktionen auf dem Intervall $(0, \infty)$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' - \frac{x+2}{x} \cdot y' + \frac{1}{x} \cdot y = 0$$

bilden:

a) $y_1(x) = e^x \cdot (x-2), \quad y_2(x) = 3x + 6 ,$

b) $y_1(x) = e^x \cdot (x-2), \quad y_3(x) = x - 3 ,$

c) $y_1(x) = e^x \cdot (x-2), \quad y_4(x) = 4 + 2x - 2e^x + xe^x .$

Bestimmen Sie nun diejenige Lösung der obigen Differentialgleichung, die die Anfangsbedingungen

$$y(2) = 8, \quad y'(2) = 2 + e^2$$

erfüllt.

6 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Es soll in diesem Kapitel auf den wichtigen Spezialfall eingegangen werden, dass die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung Konstanten sind. In diesem Fall - so hatten wir schon im vorigen Kapitel angedeutet - gestattet das Auffinden eines Fundamentalsystems ein wesentlich systematischeres Vorgehen. Auch die Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gestaltet sich in vielen Fällen einfacher als mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten.

Betrachtet werden also lineare Differentialgleichungen von folgender Gestalt

$$\boxed{L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b(x)}$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ reelle Konstanten sind, und die Störfunktion $b(x)$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetig ist.

Wir nennen wieder die Differentialgleichung

$$\boxed{L(y) = 0}$$

die zugehörige **homogene** Differentialgleichung.

Bemerkung:

(1) Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind stets auf der gesamten reellen Achse definiert. Für die Lösungen der inhomogenen Gleichung allerdings kann die Definitionsmenge ein Teilintervall I sein; dies hängt von der Störfunktion $b(x)$ ab.

Zur vollständigen Lösung der linearen Differentialgleichung gehen wir wieder den üblichen Weg, indem wir zunächst ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung bestimmen. Hierzu machen wir den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

mit einer reellen oder komplexen Konstanten λ. Setzt man diese Funktion mit ihren Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich die Gleichung

$$(\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0) \cdot e^{\lambda x} = 0 \,.$$

Da der Faktor $e^{\lambda x}$ nicht verschwindet, muss

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0 \qquad (1)$$

sein. Das Polynom $P(\lambda)$ wird das **charakteristische Polynom** der homogenen Differentialgleichung genannt. Also ist $y(x) = e^{\lambda x}$ genau dann eine Lösung der homogenen Differentialgleichung, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ ist. Ist λ eine mehrfache Nullstelle von $P(\lambda)$, so erhält man weitere Lösungen:

Satz 6.1
Ist λ eine k-fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$, so besitzt diese die k linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = e^{\lambda x}\ ,\ y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}\ ,\ \ldots\ ,\ y_k(x) = x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$$

Ist $\lambda = \alpha + i\,\beta$ eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so ist die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ eine komplexwertige Funktion und deshalb hier als Lösung nicht zu gebrauchen. Mit Hilfe der Eulerschen Formel (Band I, Definition 5.2) erhält man aber

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x + i\,\beta x} = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + i \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x\ ,$$

und es zeigt sich, dass sowohl der Realteil $e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$ dieser Funktion als auch der Imaginärteil $e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$ reelle Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind. Mit $\lambda = \alpha + i\,\beta$ ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ eine Nullstelle von $P(\lambda)$. Mit dieser erhalten wir aber keine weiteren Lösungen der Differentialgleichung: Die Funktion $\overline{y}(x) = e^{\alpha x - i\,\beta x}$ hat den gleichen Realteil und bis auf das Vorzeichen den gleichen Imaginärteil wie $y(x) = e^{\alpha x + i\,\beta x}$. Mit einem Paar λ und $\overline{\lambda}$ konjugiert komplexer Nullstellen des charakteristischen Polynoms gewinnt man also zwei reelle Lösungen der homogenen Differentialgleichung. Handelt es sich um mehrfache komplexe Nullstellen, so gewinnt man weitere Lösungen:

Satz 6.2
Ist $\lambda = \alpha + i\,\beta$ eine k-fache komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$, so besitzt diese Differentialgleichung die linear unabhängigen Lösungen
$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x\ ,\ y_2(x) = x \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x\ ,\ \cdots\ ,\ y_k(x) = x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$
und
$y_{k+1}(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x\ ,\ y_{k+2}(x) = x \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x\ ,\ \cdots\ ,\ y_{2k}(x) = x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$

Diese beiden Sätze ermöglichen die Konstruktion eines Fundamentalsystems für die homogene Differentialgleichung:

Satz 6.3 *Mit den n Nullstellen des charakteristischen Polynoms (mehrfache Nullstellen auch mehrfach gezählt) erhält man mit Hilfe von Satz 6.1 und Satz 6.2 genau n Lösungen der homogenen Differentialgleichung, die zusammen ein Fundamentalsystem bilden.*

Bemerkung:

(2) Sind die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $P(\lambda)$ reell und einfach, so bilden

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \; y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \ldots, \; y_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

ein Fundamentalsystem.

Beispiele:

(3) Zu der Differentialgleichung $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$ der Ordnung 2 gehört das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$ mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot (a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4\, a_0})$. Sie hat im Falle

1. $a_1^2 > 4\, a_0$ die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$,
2. $a_1^2 = 4\, a_0$ die allgemeine Lösung $y(x) = (c_1 + c_2 x) \cdot e^{-\frac{1}{2} a_1 \cdot x}$
3. $a_1^2 < 4\, a_0$ die allgemeine Lösung $y(x) = e^{-\frac{1}{2} a_1 \cdot x} \cdot (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ mit $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4\, a_0 - a_1^2}$.

(4) Das charakteristische Polynom von $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ lautet

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3).$$

Also haben die Nullstellen $\lambda_k = k$, $k = 1, 2, 3$, alle die Vielfachheit 1. Die Funktionen

$$y_1(x) = e^x, \; y_2(x) = e^{2x}, \; y_3(x) = e^{3x}$$

bilden ein Fundamentalsystem, und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{3x}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(5) Die Differentialgleichung $y'''' + 2y''' - 2y' - y = 0$ hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = (\lambda + 1)^3 \cdot (\lambda - 1)$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = -1 \text{ (dreifach) und } \lambda_2 = 1.$$

Ein Fundamentalsystem lautet

$$y_1(x) = e^{-x}, \; y_2(x) = xe^{-x}, \; y_3(x) = x^2 \cdot e^{-x}, \; y_4(x) = e^x,$$

und die allgemeine Lösung

$$y(x) = (c_1 + c_2\, x + c_3\, x^2) \cdot e^{-x} + c_4 \cdot e^x, \; c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Kommen noch die vier Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1$$

hinzu, dann sind die Konstanten c_ν, $\nu = 1, 2, 3, 4$, eindeutig festgelegt, und man erhält die spezielle Lösung

$$y(x) = e^x.$$

(6) Die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ hat nach Beispiel 3 die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

(7) Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^4 - 1$ der Differentialgleichung $y'''' - y = 0$ hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = -i,$$

und hieraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = \cos x, \quad y_4(x) = \sin x.$$

Wir kommen nun zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $L(y) = b(x)$. Hat man ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ermittelt, dann ist lediglich noch eine spezielle Lösung $y^*(x)$ zu bestimmen, um die allgemeine Lösung zu erhalten. Dies ist, wie im vorangegangenen Kapitel erläutert, mit der Methode der Variation der Konstanten möglich. Im Falle konstanter Koeffizienten gibt es aber eine einfachere Methode, die in manchen Fällen zum Ziel führt, nämlich den **Ansatz vom Typ der Störfunktion**. Er ist mit Erfolg anwendbar, wenn die Störfunktion von der Form

$$b(x) = e^{\alpha x} \cos \beta\, x \cdot (a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0)$$

oder

$$b(x) = e^{\alpha x} \sin \beta\, x \cdot (b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0)$$

ist. Hierzu gehören insbesondere Polynome, Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen. In all diesen Fällen gibt es eine Lösung $y^*(x)$, die vom gleichen Typ ist, und die man ausgehend von einem entsprechenden Ansatz bestimmen kann. Dabei muss man zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: Die Zahl $\lambda = \alpha + i\,\beta$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$. Dann kommt man mit dem Ansatz

$$y^*(x) = e^{\alpha x}\Big(\cos\beta\, x\cdot(A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0) + \sin\beta\, x\cdot(B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0)\Big)$$

zum Ziel.

Fall 2: Die Zahl $\lambda = \alpha + i\,\beta$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ mit der Vielfachheit $k \geq 1$. Dann ist der Ansatz

$$y^*(x) = x^k\cdot e^{\alpha x}\Big(\cos\beta\, x\cdot(A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0) + \sin\beta\, x\cdot(B_m x^m + \ldots + B_1 x + B_0)\Big)$$

geeignet. In diesem Fall ist die Störfunktion mitunter selbst eine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Man nennt ihn den **Resonanzfall**.

Setzt man die Ansatzfunktion in die Differentialgleichung ein, so kann man durch Koeffizientenvergleich die unbekannten Koeffizienten $A_m, \ldots, A_0, B_m, \ldots, B_0$ bestimmen. Wir stellen einige Beispiele für den Fall 1 zusammen, in dem λ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Liegt Fall 2 vor, ist also λ eine k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, so ist jeweils noch der Faktor x^k hinzuzufügen.

Störfunktion $b(x)$	λ	Zugehöriger Ansatz $y^*(x)$
$a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$	0	$A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0$
$a \cdot e^{\alpha x}$	α	$A \cdot e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}(a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0)$	α	$e^{\alpha x}(A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0)$
$a \cdot \cos\beta\, x$	$i\,\beta$	$A \cdot \cos\beta\, x + B \cdot \sin\beta\, x$
$b \cdot \sin\beta\, x$	$i\,\beta$	$A \cdot \cos\beta\, x + B \cdot \sin\beta\, x$
$a \cdot e^{\alpha x}\cos\beta\, x$	$\alpha + i\,\beta$	$e^{\alpha x}\Big(A \cdot \cos\beta\, x + B \cdot \sin\beta\, x\Big)$
$b \cdot e^{\alpha x}\sin\beta\, x$	$\alpha + i\,\beta$	$e^{\alpha x}\Big(A \cdot \cos\beta\, x + B \cdot \sin\beta\, x\Big)$

Bemerkung:

(8) Ist $b(x)$ eine Linearkombination dieser in der Tabelle angeführten Funktionen, dann macht man auch einen entsprechenden Ansatz für $y^*(x)$. Sind in $b(x)$ einige der Koeffizienten a_ν gleich Null, so ist trotzdem der volle in der rechten Spalte angegebene Ansatz erforderlich.

Beispiele:

(9) Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'''' - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 4x^2 \,.$$

a) Lösung der homogenen Differentialgleichung: Man erhält

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - (1+i))^2 \cdot (\lambda - (1-i))^2.$$

Die Nullstellen sind also konjugiert komplex von der Vielfachheit 2. Mit Satz 6.2 erhält man das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^x \cdot \cos x\,, \quad y_2(x) = x \cdot e^x \cdot \cos x\,,$$
$$y_3(x) = e^x \cdot \sin x\,, \quad y_4(x) = x \cdot e^x \cdot \sin x\,.$$

b) Bestimmung einer partikulären Lösung $y^*(x)$ durch Ansatz vom Typ der Störfunktion:

$$y^*(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \,.$$

Differenzieren und Einsetzen liefert die Gleichung

$$4A_2 \cdot x^2 + (4A_1 - 24A_2) \cdot x + (4A_0 - 8A_1 + 24A_2) = 4x^2\,,$$

woraus man durch Koeffizientenvergleich $A_2 = 1$, $A_1 = A_0 = 6$ erhält.

c) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = e^x \cdot [\cos x \cdot (c_1 + c_2 x) + \sin x \cdot (c_3 + c_4 x)] + x^2 + 6x + 6 \,.$$

(10) Wir betrachten die Schwingung eines Federpendels, die wir in Beispiel (10) in Kapitel 1 durch die Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

beschrieben haben. Diese lineare homogene Differentialgleichung beschreibt eine **freie Schwingung**. Hier wollen wir die Bewegung unter Einwirkung einer äußeren Kraft betrachten, also eine **erzwungene Schwingung**. Den Einfluss der äußeren Kraft beschreiben wir in der Differentialgleichung durch eine Störfunktion, die wir in diesem Beispiel als $b(t) = \cos\beta t$ annehmen. Zu lösen ist also die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = \cos\beta t$$

für die Funktion $x(t)$.

a) Wir lösen zunächst die homogene Gleichung, untersuchen also die freie Schwingung. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms lauten

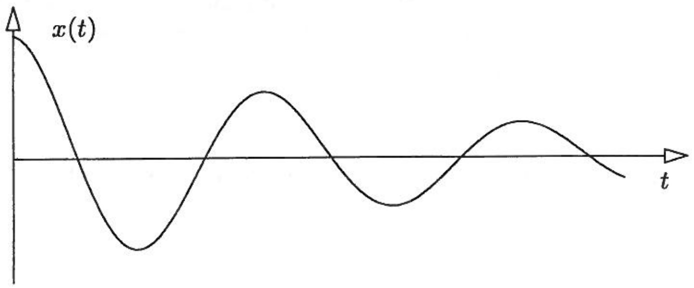
$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \,.$$

In Abhängigkeit von dem Term unter der Wurzel gibt es drei Fälle:

Fall 1: $r^2 < 4km$. („periodischer Fall")
Die Nullstellen sind komplex, und die Lösungen lauten

$$x(t) = e^{-\varrho t} \cdot (c_1 \cdot \cos \omega t + c_2 \cdot \sin \omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

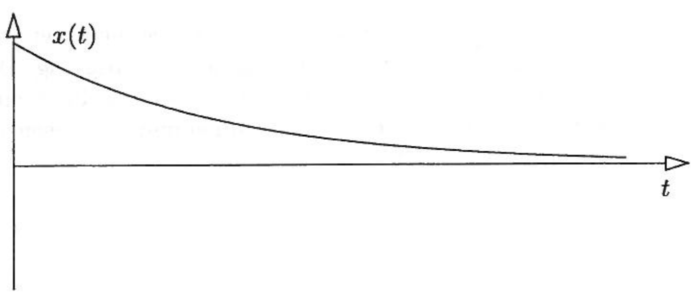
mit $\varrho = \frac{r}{2m}$ und $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \varrho^2}$. Sie stellen **gedämpfte Schwingungen** mit der Kreisfrequenz ω dar.



Für $\varrho = 0$ (keine Reibung) handelt es sich um eine **harmonische Schwingung** mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, der Frequenz der ungedämpften, also der harmonischen Schwingung. Im gedämpften Fall ist $\omega < \omega_0$.

Fall 2: $r^2 > 4km$. („aperiodischer Fall")
Die Nullstellen λ_1 und λ_2 sind reell, verschieden und beide negativ. Die Lösungen

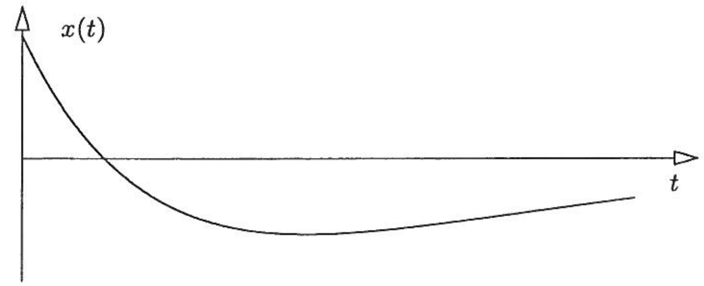
$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$



sind Funktionen, die ohne Schwingungen (**aperiodisch**) abklingen.

Fall 3: $r^2 = 4km$. („aperiodischer Grenzfall")
Nun liegt eine negative Nullstelle $\lambda = -\frac{r}{2m}$ der Vielfachheit 2 vor, und die Lösungen lauten

$$x(t) = (c_1 + c_2 \cdot t)e^{\lambda t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$



Die skizzierte spezielle Lösung beschreibt ein Abklingen des Pendelausschlages, bei dem das Pendel noch einmal durch die Ruhelage schwingt, um dann langsam endgültig in die Ruhelage zurückzukehren.

b) Wir lösen nun die inhomogene Gleichung durch Bestimmung einer partikulären Lösung $x^*(t)$ durch Ansatz vom Typ der Störfunktion. Liegt nicht der Resonanzfall vor, der bei $r = 0$ (keine Reibung) und $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$ eintritt, so ist nach der Tabelle

$$x^*(t) = A \cdot \cos \beta t + B \cdot \sin \beta t$$

anzusetzen. Der Koeffizientenvergleich ergibt ein lineares Gleichungssystem für A und B mit der Lösung

$$A = \frac{k - m\beta^2}{(r\beta)^2 + (k - m\beta^2)^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{r\beta}{(r\beta)^2 + (k - m\beta^2)^2}\,.$$

Mit Additionstheoremen ergibt sich daraus die Lösung

$$x^*(t) = a \cdot \cos(\beta t - \varphi_0)$$

mit der Amplitude $a = \sqrt{\frac{1}{(r\beta)^2 + (k - m\beta^2)^2}}$ und der Phasenverschiebung $\varphi_0 = \arctan \frac{r\beta}{k - m\beta^2}$. Es handelt sich um eine harmonische Schwingung

mit der gleichen Frequenz wie die Störfunktion. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist die Überlagerung dieser Schwingung mit der abklingenden allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.
Im Resonanzfall $r = 0$, $k = m\beta^2$ muss der Ansatz

$$x^*(t) = t \cdot (A \cdot \cos \beta t + B \cdot \sin \beta t)$$

gewählt werden. Man erhält wiederum ein Gleichungssystem für A und B mit der Lösung $A = 0$ und $B = \frac{1}{2m\beta}$, also

$$x^*(t) = \frac{t}{2m\beta} \cdot \sin \beta t \ .$$

Die Amplitude dieser Schwingung wächst linear an. Man spricht deshalb von der **Resonanzkatastrophe**.

ÜBUNGEN

Ü6.1: Geben Sie zu den folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen jeweils ein reelles Fundamentalsystem an:

a) $y^{(4)} - 10y^{(3)} + 35y'' - 50y' + 24y = 0$,

b) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = 0$,

c) $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$,

d) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 9y'' - 10y' = 0$.

Ü6.2: Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0 , \quad y(0) = 2 , \ y'(0) = 0$,

b) $y'' + 4y' + 4y = 0 , \quad y(0) = 0 , \ y'(0) = 1$,

c) $y'' + 4y = 0 , \quad y(0) = 0 , \ y'(0) = 1$.

Ü6.3: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = b(x)$$

mit

a) $b(x) = e^x$, b) $b(x) = \sin 2x$, c) $b(x) = e^x + \sin 2x$.

Ü6.4: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} = b(x) \ .$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung durch Berechnung eines Fundamentalsystems der homogenen Gleichung und einer partikulären inhomogenen Lösung $y^*(x)$ durch Ansatz vom Typ der Störfunktion für $b(x) = 2 + e^{2x}$.

b) Geben Sie den Ansatz für $y^*(x)$ an für die Störfunktion $b(x) = \cos x + x \cdot e^{-x}$ (die explizite Berechnung von $y^*(x)$ ist nicht verlangt).

Ü6.5: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3x} \cdot \sin x \ , \quad y(0) = y'(0) = 0 \ ,$$

indem Sie zunächst ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung und sodann eine spezielle Lösung $y^*(x)$ der inhomogenen Gleichung durch Ansatz vom Typ der Störfunktion bestimmen.

7 Systeme von Differentialgleichungen

In den Anwendungen hat man es oft mit Systemen von Differentialgleichungen zu tun. Es handelt sich dabei um mehrere Differentialgleichungen, in denen mehrere gesuchte Funktionen und ihre Ableitungen auftreten. Ein klassisches Beispiel, das wir auch am Ende dieses Kapitels noch behandeln werden, ist die Beschreibung der Schwingungen zweier gekoppelter Federpendel.

Dieses Kapitel ist in drei Abschnitte eingeteilt: Zunächst wird gezeigt, wie man Einzeldifferentialgleichungen höherer Ordnung in äquivalente Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung überführen kann. Der zweite Abschnitt behandelt lineare Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung. Schließlich wird anhand eines Beispiels eine **Eliminationsmethode** zur Lösung solcher Systeme beschrieben.

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Ordnung n in expliziter Form

$$\boxed{y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) .} \tag{1}$$

Löst die Funktion $y(x)$ diese Differentialgleichung, so befriedigen die Funktionen

$$z_1(x) = y(x) \ , \ z_2(x) = y'(x) \ , \dots \ , \ z_n(x) = y^{(n-1)}(x) \tag{2}$$

das System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= \quad z_3 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ z_n' &= f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) . \end{aligned}$$

Hat man umgekehrt eine Lösung $(z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x))^T$ des Systems gefunden, so ist die erste Komponente $z_1(x)$ des Lösungsvektors eine Lösung von (1). In diesem Sinne sind die Differentialgleichung der Ordnung n und das System der Ordnung 1 äquivalent.

Bemerkungen und Ergänzungen:

(1) Kommen zur Differentialgleichung (1) noch n Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = \alpha_0 \ , \ y'(x_0) = \alpha_1 \ \dots \ , \ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

hinzu, hat man also ein Anfangswertproblem, so entsprechen diese den Anfangsbedingungen

$$z_1(x_0) = \alpha_0 \ , \ z_2(x_0) = \alpha_1 \ \dots \ , \ z_n(x_0) = \alpha_{n-1}$$

für das System.

(2) Die Umformung einer Einzeldifferentialgleichung der Ordnung n in ein System von n Differentialgleichungen der Ordnung 1 ist in zweierlei Hinsicht von Bedeutung:

Erstens sind die Existenz- und Eindeutigkeitssätze von Kapitel 3 leicht auf Systeme übertragbar, woraus sich für Differentialgleichungen n-ter Ordnung entsprechende Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen ergeben.

Zweitens gibt es effektive numerische Lösungsverfahren für Systeme erster Ordnung, die sich damit zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen höherer Ordnung einsetzen lassen. Man vergleiche hierzu Kapitel 27.

Beispiel:

(3) Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b(x) \tag{3}$$

geht in das System

$$\begin{aligned} z_1' &= \quad z_2 \\ z_2' &= \qquad z_3 \\ \dots\dots &\quad \dots \quad \dots \\ z_n' &= -a_0 z_1 - a_1 z_2 - a_2 z_3 \dots - a_{n-1} z_n + b(x) \end{aligned}$$

über. Dies ist ein **lineares** Differentialgleichungssystem, das homogen ist, wenn $b(x) \equiv 0$ gilt, und sonst inhomogen ist.

Bemerkungen und Ergänzungen:

(4) Für das System in Beispiel (3) bietet sich eine Kurzschreibweise an: Mit den Abkürzungen

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} , \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \ \text{und}\ \vec{b}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

hat das System die Form

$$\vec{z}\,' = A \cdot \vec{z} + \vec{b}(x) .$$

(5) Eine Matrix der Form wie die Koeffizientenmatrix A in (4) heißt **Frobeniusmatrix**. Ihr charakteristisches Polynom

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

ist identisch mit dem zur Einzeldifferentialgleichung gehörigen charakteristischen Polynom.

Im zweiten Teil dieses Kapitels betrachten wir **lineare homogene Systeme** von Differentialgleichungen 1. Ordnung, die wir, wie in Bemerkung (4) für das Beispiel bereits durchgeführt, in vektorieller Kurzform schreiben wollen:

$$\boxed{\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y}}$$

mit dem Vektor $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ der gesuchten Funktionen, dem Vektor $\vec{y}\,' = (y_1', \ldots, y_n')^T$ ihrer Ableitungen und der reellen $n \times n$-Koeffizientenmatrix $A = (a_{ik})_{n,n}$.

Wie bei linearen homogenen Einzeldifferentialgleichungen hat ein solches System immer die **triviale Lösung** $\vec{y}(x) \equiv (0, 0, \ldots, 0)^T$, und mit k Lösungen $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_k(x)$ ist auch jede Linearkombination $\vec{y}(x) = c_1 \cdot \vec{y}_1(x) + \ldots + c_k \cdot \vec{y}_k(x)$ eine Lösung. In anderen Worten: Die Menge aller Lösungen bildet einen Linearen Raum. Darum benötigen wir nur eine Basis, um die allgemeine Lösung zu erhalten. Eine solche Basis heißt ein **Fundamentalsystem**.

Satz 7.1 *Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das lineare homogene System*

$$\vec{y}\,' = A \cdot \vec{y}$$

besitzt ein Fundamentalsystem von n Lösungen $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$.

Besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, so sind die Funktionen

$$\vec{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x} \cdot \vec{v}_1 \ , \ \ldots \ , \ \vec{y}_n(x) = e^{\lambda_n x} \cdot \vec{v}_n$$

Lösungen des Systems. Sind die Eigenvektoren linear unabhängig, so bilden diese Funktionen sogar ein Fundamentalsystem.

Bemerkungen und Ergänzungen:

(6) Besitzt die Matrix A n linear unabhängige Eigenvektoren, so ist sie „diagonalähnlich" (siehe Band I, Kapitel 13). Nur in diesem Fall liefert der Satz explizit ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung des Systems:

$$\vec{y}(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \cdot \vec{v}_1 + \ldots + c_n \cdot e^{\lambda_n x} \cdot \vec{v}_n \ .$$

(7) Ist die Koeffizientenmatrix A nicht diagonalähnlich, so erhält man über die Eigenwerte und die Eigenvektoren allein noch kein Fundamentalsystem.

(8) Die in Beispiel (3) auftretende Frobeniusmatrix A ist nur dann diagonalähnlich, wenn ihre Eigenwerte paarweise verschieden sind. Hat also das charakteristische Polynom der in diesem Beispiel betrachteten linearen Differentialgleichung mehrfache Nullstellen, so haben wir mit Satz 7.1 zwar Lösungen des zugehörigen Systems erster Ordnung gefunden, aber noch kein Fundamentalsystem.

Wir setzen nun voraus, dass die Matrix A diagonalähnlich ist. Ist λ ein komplexer Eigenwert von A, so erhalten wir durch Satz 7.1 komplexwertige Lösungen. Ähnlich wie in Kapitel 6 können wir daraus reelle Lösungen gewinnen.

Sei $\lambda = \alpha + i\ \beta$ ein komplexer Eigenwert und $\vec{v} = \vec{a} + i\ \vec{b}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= e^{\lambda x} \cdot \vec{v} = e^{(\alpha + i\ \beta)x} \cdot (\vec{a} + i\ \vec{b}) \\ &= e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x \cdot \vec{a} - \sin \beta x \cdot \vec{b}) + i\ e^{\alpha x} \cdot (\sin \beta x \cdot \vec{a} + \cos \beta x \cdot \vec{b}) \ . \end{aligned}$$

Nun sind sowohl der Realteil

$$\vec{y}_1(x) = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x \cdot \vec{a} - \sin \beta x \cdot \vec{b})$$

als auch der Imaginärteil

$$\vec{y}_2(x) = e^{\alpha x} \cdot (\sin \beta x \cdot \vec{a} + \cos \beta x \cdot \vec{b})$$

von $\vec{y}(x)$ Lösungen des Systems, sodass wir aus einer komplexen Lösung zwei reelle Lösungen gewinnen. Da mit dem komplexen Eigenwert λ auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert ist, und die zugehörige komplexe Lösung bis auf das Vorzeichen gleichen Realteil und gleichen Imaginärteil wie $\vec{y}(x)$ besitzt, erhalten wir insgesamt aus zwei konjugiert komplexen Lösungen zwei reelle Lösungen. Wird dieser Austausch für sämtliche komplexen Eigenwerte durchgeführt, so entsteht ein Fundamentalsystem aus reellen Lösungen.

Beispiele:

(9) Die Differentialgleichung

$$y'' - 2 \cdot y' + y = 0$$

ist zu dem System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

äquivalent. Die Koeffizientenmatrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, ist also nicht diagonalähnlich (siehe Bemerkung (8)).

(10) Zu der Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

gehört das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Man errechnet für die Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\;; \quad \lambda_2 = 2\,, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sodass ein Fundamentalsystem lautet

$$\vec{z}_1(x) = e^x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{z}_2(x) = e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Als allgemeine Lösung (vgl. Bemerkung (6)) erhält man

$$\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} \\ c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{2x} \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(11) Die Koeffizientenmatrix A des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= \, 2 \cdot y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

hat die Eigenwerte $\lambda = 1 + i$ und $\bar{\lambda} = 1 - i$. Zu λ gehört der Eigenvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir ein reelles Fundamentalsystem

$$\vec{y}_1(x) = e^x \cdot \left[\cos x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right],$$

$$\vec{y}_2(x) = e^x \cdot \left[\sin x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right],$$

sodass die allgemeine reelle Lösung durch

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2c_1 \cdot \cos x + 2c_2 \cdot \sin x \\ (c_1 + c_2) \cdot \cos x + (c_2 - c_1) \cdot \sin x \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

gegeben ist.

(12) Die Schwingungen zweier gekoppelter Pendel können, wenn man von der Reibung absieht, durch ein System von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \\ \ddot{x}_2 &= c \cdot x_1 + d \cdot x_2 \end{aligned} \tag{4}$$

mit reellen Konstanten a, b, c, d beschrieben werden. Durch Einführung der zwei Funktionen

$$x_3(t) = \dot{x}_1(t) \quad \text{und} \quad x_4(t) = \dot{x}_2(t)$$

erhält man das folgende System erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die allgemeine Lösung im Falle $a = d = 7$, $b = 1$ und $c = 4$ bestimmen. Man erhält als Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\lambda_{1,2} = \pm 3, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{5}, \quad \vec{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \pm 3 \\ \pm 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \pm\sqrt{5} \\ \pm 2 \cdot \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Von der allgemeinen Lösung

$$\vec{x}(t) = \sum_{\nu=1}^{4} c_\nu \cdot e^{\lambda_\nu \cdot t} \cdot \vec{v}_\nu$$

nimmt man nun die ersten beiden Komponenten, die die allgemeine Lösung des Ausgangssystems (4) liefern:

$$x_1(t) = c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{-3t} + c_3 \cdot e^{\sqrt{5}t} + c_4 \cdot e^{-\sqrt{5}t}\,,$$

$$x_2(t) = 2 \cdot \left(c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{-3t} - c_3 \cdot e^{\sqrt{5}t} - c_4 \cdot e^{-\sqrt{5}t}\right).$$

Eine andere – oft einfachere – Methode, ein Differentialgleichungssystem zu lösen, besteht in einem **Eliminationsverfahren**. Wir wollen dies am Beispiel (12) demonstrieren:

a) Differentiation der ersten Gleichung von (4) liefert

$$x_1^{(4)} = a \cdot \ddot{x}_1 + b \cdot \ddot{x}_2\,.$$

b) Auflösen der ersten Gleichung von (4) nach $x_2(t)$ liefert

$$b \cdot x_2 = \ddot{x}_1 - a \cdot x_1 \,.$$

c) Setzt man $\ddot{x}_2$ aus der zweiten Gleichung von (4) und $b \cdot x_2$ aus b) in Gleichung a) ein, so ergibt sich

$$x_1^{(4)} = (a+d) \cdot \ddot{x}_1 + (bc - ad) \cdot x_1 \,.$$

Dies ist eine Differentialgleichung vierter Ordnung allein für $x_1(t)$. Hat man sie gelöst, also $x_1(t)$ bestimmt, so erhält man mit b) auch $x_2(t)$ (vgl. Ü7.6).

ÜBUNGEN

Ü7.1: Zeigen Sie, dass die Frobeniusmatrix A in Bemerkung (5) das charakteristische Polynom

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

besitzt.

Anleitung: Entwickeln Sie $\det(\lambda I - A)$ nach der ersten Zeile und führen Sie vollständige Induktion über die Reihenzahl n durch.

Ü7.2: Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des folgenden Systems linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= 2 \cdot y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2 \cdot y_2 \,. \end{aligned}$$

Ü7.3: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}$$

a) mittels der Eigenwerte und Eigenvektoren,

b) durch die Eliminationsmethode.

Ü7.4:

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \,.$$

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung aus Teil a), die der Anfangsbedingung

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

genügt.

Ü7.5: Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \,.$$

Ü7.6: Lösen Sie mit dem Eliminationsverfahren das System in Gleichung (4) für die Schwingungen der gekoppelten Pendel. Rechnen Sie mit dem Zahlenbeispiel: $a = d = 7$, $b = 1$, $c = 4$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in Beispiel (12) gewonnenen.

8 Approximative Lösungsverfahren

Es gibt viele Differentialgleichungen, deren Lösungen nicht mehr durch elementare Funktionen (z.B. Polynome, trigonometrische, Exponential- oder Logarithmusfunktionen) ausgedrückt werden können. Dies ist nicht weiter verwunderlich, wenn man bedenkt, dass man auch schon bei der Integration vor derselben Situation steht. So sind die Stammfunktionen von e^{-x^2} oder von $\frac{1}{x} \cdot \sin x$ keine elementaren Funktionen mehr. Ein Beispiel für eine nicht elementar lösbare Differentialgleichung ist

$$y' = x^2 + y^2 .$$

In Kapitel 1 haben wir das Richtungsfeld zu dieser Differentialgleichung gezeichnet und in Kapitel 3, Beispiel (7) ein Anfangswertproblem näherungsweise gelöst. Da sie, wie man nachweisen kann, keine elementaren Lösungen besitzt, ist man, wie immer in solchen Fällen, auf **Näherungsverfahren** angewiesen. Oft sind Näherungslösungen für den Praktiker ausreichend.

Es seien hier drei Verfahrenstypen genannt:

1. der Potenzreihen-Ansatz,
2. das Verfahren der schrittweisen Näherung nach Picard-Lindelöf und
3. die numerische Lösung durch Differenzenverfahren.

Das Verfahren von Picard-Lindelöf ist in Kapitel 3 behandelt worden. Es wurde bei dem oben genannten Beispiel demonstriert. Die Differenzenverfahren, die für die Praxis von großer Wichtigkeit sind, werden in den Kapiteln 27 und 28 eingeführt. Die zuerst genannte Methode, der **Potenzreihen-Ansatz**, ist das Thema dieses Kapitels.

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 . \qquad (1)$$

Es gilt

Satz 8.1
Falls die Funktion $f(x,y)$ in einer Umgebung von (x_0,y_0) in eine konvergente Potenzreihe bzgl. x und y entwickelbar ist, dann ist auch die (eindeutig bestimmte) Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems (1) in einer Umgebung von x_0 in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar.

Aufgrund dieses Satzes geht man folgendermaßen vor: Man setzt die gesuchte Lösung als eine **Potenzreihe** mit unbekannten Koeffizienten an

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot (x - x_0)^\nu ,$$

differenziert gliedweise

$$y'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \cdot a_\nu \cdot (x - x_0)^{\nu-1} ,$$

setzt diese Reihen in die Differentialgleichung ein, ordnet nach Potenzen von $x - x_0$ und berechnet die Koeffizienten a_ν , $\nu = 0,1,2,\ldots$, durch **Koeffizientenvergleich.** Dabei liefert die Anfangsbedingung in (1) den ersten Koeffizienten a_0.

Beispiele:

(1) Wir lösen das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 \quad , \quad y(0) = 0 .$$

Wegen $x_0 = 0$ lautet der Potenzreihen-Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Differentiation und Einsetzen liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (k+1)a_{k+1} \cdot x^k + \cdots \\ = x^2 + (a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots)^2 \\ = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (1 + 2a_0 a_2 + a_1^2) \cdot x^2 + \cdots + \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \cdot a_{k-\nu} \cdot x^k + \cdots . \end{aligned}$$

Da beide Potenzreihen übereinstimmen sollen, erhält man durch Koeffizientenvergleich:

1.	Wegen $y(0) = 0$,	folgt $a_0 = 0$
2.	$a_1 = a_0^2 = 0$,	also $a_1 = 0$
3.	$2a_2 = 2a_0 a_1 = 0$,	also $a_2 = 0$
4.	$3a_3 = 1 + 2a_0 a_2 + a_1^2 = 1$,	also $a_3 = \frac{1}{3}$
5.	$4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = 0$,	also $a_4 = 0$
6.	$5a_5 = 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2 = 0$,	also $a_5 = 0$
7.	$6a_6 = 2a_0 a_5 + 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3 = 0$,	also $a_6 = 0$
8.	$7a_7 = 2a_0 a_6 + 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2 = \frac{1}{9}$,	also $a_7 = \frac{1}{63}$.

Also ist der Anfang der gesuchten Potenzreihe

$$y(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{63}x^7 + \cdots .$$

Man vergleiche hierzu das Beispiel (7) in Kapitel 3. Dort wurde das gleiche Anfangswertproblem mit dem Verfahren nach Picard-Lindelöf näherungsweise gelöst.

(2) Wir lösen das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2 \quad , \quad y(2) = 0 \, .$$

Hier ist $x_0 = 2$. Man setzt daher die Potenzreihe

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-2) + \cdots + a_k \cdot (x-2)^k + \cdots \, .$$

an. Es ergibt sich die Gleichung

$$a_1 + 2a_2 \cdot (x-2) + \cdots + (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot (x-2)^k + \cdots =$$

$$= 1 + \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-2)^\nu\Big)^2$$

$$= (1 + a_0^2) + 2a_0 a_1 \cdot (x-2) + \cdots + \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu a_{k-\nu} \cdot (x-2)^k + \cdots \, .$$

Koeffizientenvergleich liefert:

1.	Wegen $y(2) = 0$	folgt $a_0 = 0$
2.	$a_1 = 1 + a_0^2 = 1$,	also $a_1 = 1$
3.	$2a_2 = 2a_0 a_1 = 0$,	also $a_2 = 0$
4.	$3a_3 = 2a_0 a_2 + a_1^2 = 1$,	also $a_3 = \frac{1}{3}$
5.	$4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = 0$,	also $a_4 = 0$
6.	$5a_5 = 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2 = \frac{2}{3}$,	also $a_5 = \frac{2}{15}$.

Wir erhalten als Anfang der gesuchten Potenzreihe

$$y(x) = (x-2) + \tfrac{1}{3} \cdot (x-2)^3 + \tfrac{2}{15} \cdot (x-2)^5 + \cdots \, .$$

Dies stimmt mit dem Anfang der Reihe für $\tan(x-2)$ überein. Tatsächlich ist auch $y(x) = \tan(x-2)$ die Lösung des Anfangswertproblems (vgl. Bemerkung (17), Kapitel 27 des ersten Bandes).

(3) Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{\cos y} \quad , \quad y(0) = 0 \, ,$$

in einer Umgebung des Anfangspunktes $(0,0)$. Um die Potenzreihe von $\cos y$

$$\cos y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} \cdot y^{2\nu}$$

verwenden zu können, schreiben wir die Differentialgleichung in der Form

$$y' \cdot \cos y = 1$$

und erhalten

$$y' \cdot \big[1 - \tfrac{1}{2} \cdot y^2 + \tfrac{1}{24} \cdot y^4 - \cdots\big] = 1 \, .$$

Mit dem Potenzreihenansatz ergibt sich nach Ausmultiplizieren und Ordnen nach Potenzen von x

$$\begin{aligned} 1 &= y'(x) \cdot \cos y(x) \\ &= a_1 + 2a_2 \cdot x + (3a_3 - \tfrac{1}{2}a_1^3) \cdot x^2 + (4a_4 - 2a_1^2 a_2) \cdot x^3 + \\ &\quad + (5a_5 - \tfrac{5}{2}a_1 a_2^2 - \tfrac{5}{2}a_1^2 a_3 + \tfrac{1}{24}a_1^5) \cdot x^4 + \cdots \quad . \end{aligned}$$

Es folgt durch Koeffizientenvergleich

1.	Wegen $y(0) = 0$	folgt $a_0 = 0$
2.	$1 = a_1$,	also $a_1 = 1$
3.	$0 = 2a_2$,	also $a_2 = 0$
4.	$0 = 3a_3 - \frac{1}{3}a_1^3 = 3a_3 - \frac{1}{2}$,	also $a_3 = \frac{1}{6}$
5.	$0 = 4a_4 - 2a_1^2 a_2 = 4a_4$,	also $a_4 = 0$
6.	$0 = 5a_5 - \frac{5}{2}a_1 \cdot (a_2^2 + a_1 a_3) + \frac{1}{24}a_1^5 = 5a_5 - \frac{3}{8}$,	also $a_5 = \frac{3}{40}$.

Der Beginn der gesuchten Potenzreihe lautet somit

$$y(x) = x + \tfrac{1}{6} \cdot x^3 + \tfrac{3}{40} \cdot x^5 + \cdots \, .$$

Auch hier ist die exakte Lösung bekannt; sie lautet $y(x) = \arcsin x$. Man vergleiche Bemerkung (21) in Kapitel 27 des ersten Bandes.

Zum Abschluss dieses Kapitels zeigen wir, dass man die Methode des Potenzreihen-Ansatzes auch bei **Differentialgleichungen höherer Ordnung** verwenden kann. Zwei Beispiele sollen dies verdeutlichen.

Beispiele:

(4) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x \cdot y'' + y' + x \cdot y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \, , \; y'(0) = 0 \, .$$

Diese lineare Differentialgleichung heißt **Besselsche Differentialgleichung**. Das Anfangswertproblem hat eine Besonderheit: Setzt man $x_0 = 0$ in die Differentialgleichung ein, dann erhält man automatisch die zweite Anfangsbedingung $y'(0) = 0$.

Wir gehen wieder von dem Potenzreihenansatz aus, differenzieren zweimal, setzen in die Differentialgleichung ein und ordnen nach Potenzen von x. Es folgt

$$0 = a_1 + (a_0 + 4a_2) \cdot x + (a_1 + 9a_3) \cdot x^2 + \cdots + (a_{k-1} + (k+1)^2 \cdot a_{k+1}) \cdot x^k + \cdots \, .$$

Nun werden die Koeffizienten durch Vergleich bestimmt:

1. Wegen $y(0) = 1$ folgt $a_0 = 1$.
2. Wegen $y'(0) = 0$ folgt $a_1 = 0$.

3. Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$a_{k+1} = -\frac{a_{k-1}}{(k+1)^2} \,.$$

Man erhält durch Induktion

$$a_{2\nu+1} = 0, \quad a_{2\nu} = \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu} \cdot (\nu!)^2}\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \,.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu} \cdot (\nu!)^2} \cdot x^{2\nu} \,.$$

Diese Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(5) Bei dem Anfangswertproblem

$$y'' + x \cdot y' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \,, \; y'(0) = 0 \,,$$

wird genauso vorgegangen wie im vorigen Beispiel. Man erhält die Gleichung
$0 = (a_0 + 2a_2) + (2a_1 + 6a_3) \cdot x + \cdots + (k+1) \cdot (a_k + (k+2) \cdot a_{k+2}) \cdot x^k + \cdots$.
Zusammen mit den Anfangsbedingungen ergeben sich daraus die Koeffizienten

$$a_0 = 1 \,, \quad a_1 = 0 \,, \quad a_{k+2} = -\frac{a_k}{k+2} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots \,,$$

sodass die gesuchte Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^\nu = e^{-\frac{x^2}{2}} \,.$$

lautet.

ÜBUNGEN

Ü8.1: Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit einem Potenzreihen-Ansatz und bestimmen Sie die Glieder bis zur 7. Ordnung einschließlich:

a) $y' = 2x + y \quad , \quad y(0) = 1 \,,$

b) $y' = x \cdot y + 1 \quad , \quad y(0) = 0 \,.$

Ü8.2: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1 - x) \cdot y - 1 \quad , \quad y(0) = 1 \,,$$

mit Hilfe eines Potenzreihen-Ansatzes.
Berechnen Sie die Koeffizienten a_0 bis a_5 der Potenzreihe. Leiten Sie hieraus eine Vermutung ab, welche Werte die Koeffizienten a_n , $n = 6, 7, \ldots$ haben könnten.

Welche bekannte Funktion erhalten Sie? Machen Sie die Probe.

Ü8.3: Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihen-Ansatzes für die Lösung $y(x)$ sowie der Potenzreihe für die Kosinusfunktion die ersten 6 Glieder der Potenzreihe der Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = \cos x \cdot y \quad , \quad y(0) = 1 \,.$$

Vergleichen Sie das so erhaltene Polynom $P_5(x)$ 5. Grades mit der exakten Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems (Trennung der Veränderlichen!), indem Sie sowohl $y(\frac{1}{2})$ als auch $P_5(\frac{1}{2})$ berechnen.

Ü8.4: Bestimmen Sie eine Näherungslösung des Anfangswertproblems

$$y'' + x^2 \cdot y' + x \cdot y = x^2 + 2 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \,,$$

mit Hilfe eines Potenzreihen-Ansatzes. Geben Sie die Koeffizienten bis zur Ordnung 5 an.

Ü8.5: Bestimmen Sie eine Näherungslösung des Anfangswertproblems

$$y'' + (x-1)^2 \cdot y = 4 \quad , \quad y(1) = 1 \,, \quad y'(1) = 0 \,,$$

mit Hilfe eines Potenzreihen-Ansatzes. Wählen Sie den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und geben Sie die Koeffizienten bis zur Ordnung 6 an.

9 Rand- und Eigenwertprobleme

Neben den in den vorigen Kapiteln behandelten Anfangswertaufgaben treten in der Physik und den Ingenieurwissenschaften oft auch **Randwertaufgaben** auf. Sie beschreiben in der Regel stationäre (also zeitunabhängige) Sachverhalte und unterscheiden sich von ersteren dadurch, dass in den zu der Differentialgleichung hinzukommenden Bedingungen **mindestens zwei verschiedene Stellen** des x-Intervalls auftreten. Da im Allgemeinen die Anzahl der Randbedingungen mit der Ordnung der Differentialgleichung identisch ist, handelt es sich also bei Randwertproblemen um Differentialgleichungen mindestens zweiter Ordnung.

Die Frage nach der Lösbarkeit von Randwertproblemen ist etwas schwieriger zu beantworten als bei Anfangswertproblemen. Wir beginnen mit einigen Beispielen, behandeln dann lineare Randwertprobleme und beschließen das Kapitel mit der Betrachtung von Eigenwertproblemen.

Zur **numerischen** Behandlung von Randwertproblemen, auf die man in vielen Fällen nicht verzichten kann, verweisen wir den Leser auf das Kapitel 29.

Beispiele:

(1) Die Differentialgleichung

$$y'' + y = 0$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x\ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Zwei Randbedingungen ergeben ein System von zwei Gleichungen für die beiden Konstanten c_1 und c_2, das eine eindeutige Lösung oder auch viele Lösungen haben kann. Es kann auch vorkommen, dass dieses System keine Lösung hat. Zum Beispiel existiert zu den Randbedingungen

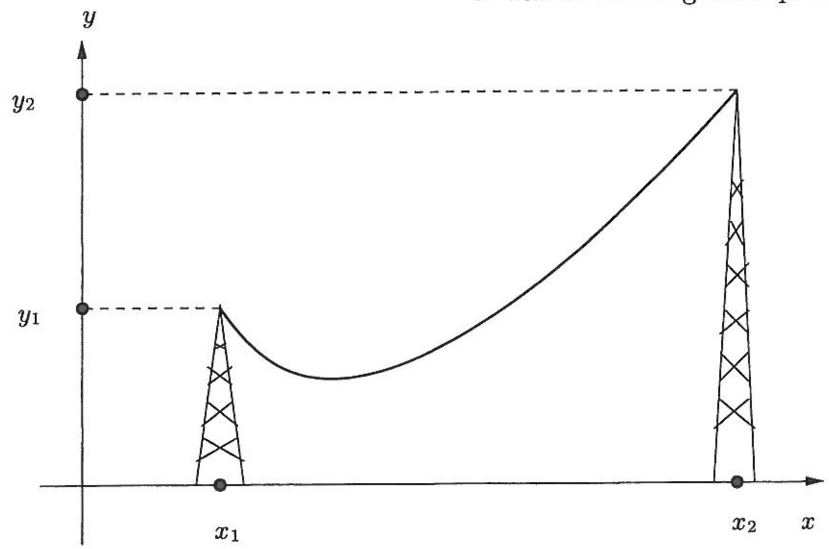
a) $y(0) = 0,\ y(1) = 1$, genau eine Lösung: $c_1 = 0$, $c_2 = \dfrac{1}{\sin 1}$,
b) $y(0) = 1,\ y(\pi) = -1$, unendlich viele Lösungen: $c_1 = 1$, $c_2 \in \mathbb{R}$,
c) $y(0) = 1,\ y(\pi) = 0$, keine Lösung.

(2) **Berechnung der Kettenlinie.**

Gesucht ist die Kurve $y(x)$, die ein an zwei Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2) befestigtes durchhängendes Seil bildet. Wird das Seil als homogen und ideal biegsam vorausgesetzt, dann lautet das zugehörige Randwertproblem

$$y'' = a \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\ , \quad y(x_1) = y_1\ ,\ y(x_2) = y_2\ .$$

Hierbei ist $a > 0$ eine von der Länge und den Materialeigenschaften des Seiles abhängige Konstante.



Mit der Substitution $z(x) = y'(x)$ (vgl. Kapitel 4, I) und anschließender Integration erhält man

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 + z^2}} = \operatorname{arsinh} z = a \cdot (x + c_1)\ , \quad c_1 \in \mathbb{R}\ .$$

Auflösen nach $z(x)$ und nochmalige Integration liefert die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = \frac{1}{a} \cdot \cosh\big(a \cdot (x + c_1)\big) + c_2\ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Die Konstanten c_1, c_2 sind durch die beiden Randbedingungen festgelegt; man erhält das Gleichungssystem

$$\frac{1}{a} \cosh\big(a(x_i + c_1)\big) + c_2 = y_i\ , \quad i = 1, 2\ ,$$

das im Allgemeinen numerisch gelöst werden muss. Sind allerdings die beiden Aufhängepunkte gleich hoch ($y_1 = y_2$), dann ergibt eine Rechnung

$$c_1 = -\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad c_2 = y_2 - \frac{1}{a} \cdot \cosh\big(a \cdot \frac{x_2 - x_1}{2}\big)\ .$$

Es werden nun lineare Randwertprobleme betrachtet, bei denen sich die Frage nach ihrer Lösbarkeit relativ leicht entscheiden lässt.

Definition 9.1
Seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$. Ein Randwertproblem mit einer linearen Differentialgleichung

$$L(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x) \cdot y^{(\nu)} = q(x)$$

der Ordnung n und n linearen Randbedingungen

$$R_\mu(y(a)) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{\nu\mu} \cdot y^{(\nu)}(a) = \alpha_\mu \ , \quad \mu = 1, \dots, s \ ,$$

$$R_\mu(y(b)) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{\nu\mu} \cdot y^{(\nu)}(b) = \beta_\mu \ , \quad \mu = s+1, \dots, n$$

heißt ein **lineares Randwertproblem der Ordnung** *n.*

Dabei sind die stetigen Funktionen $p_\nu(x)$, $q(x)$ sowie die Zahlen $\alpha_{\nu\mu}$, $\beta_{\nu\mu}$, α_μ, β_μ gegeben. Das lineare Randwertproblem heißt

a) **vollhomogen,** *falls $q(x) \equiv 0$* **und** *$\alpha_\mu = 0$, $\beta_\mu = 0$ für alle μ gilt,*

b) **halbhomogen,** *falls* **entweder** *$q(x) \equiv 0$* **oder** *alle α_μ, $\beta_\mu = 0$ sind,*

c) **inhomogen** *sonst.*

Jedes inhomogene lineare Randwertproblem lässt sich folgendermaßen in ein halbhomogenes Randwertproblem umformen:

a) Sei $\psi(x)$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Es gilt also $L(\psi) = q(x)$. Mit dem **Ansatz** $y(x) = \psi(x) + z(x)$ ergeben sich für z die homogene Differentialgleichung

$$L(z) = 0$$

und die neuen Randbedingungen

$$R_\mu(z(a)) = \tilde{\alpha}_\mu \ , \quad \mu = 1, \dots, s \ ,$$
$$R_\mu(z(b)) = \tilde{\beta}_\mu \ , \quad \mu = s+1, \dots, n \ ,$$

mit $\tilde{\alpha}_\mu := \alpha_\mu - R_\mu(\psi(a))$ und $\tilde{\beta}_\mu := \beta_\mu - R_\mu(\psi(b))$.

b) Sei $\psi^*(x)$ eine Funktion, die die folgenden Randbedingungen erfüllt:

$$R_\mu(\psi^*(a)) = \alpha_\mu \ , \quad 1 \le \mu \le s; \quad R_\mu(\psi^*(b)) = \beta_\mu \ , \quad s+1 \le \mu \le n \ .$$

Mit dem Ansatz $y(x) = \psi^*(x) + w(x)$ ergibt sich für w die lineare Differentialgleichung

$$L(w) = \tilde{q}(x) \quad \text{mit} \quad \tilde{q}(x) = q(x) - L(\psi^*)$$

und die homogenen Randbedingungen

$$R_\mu(w(a)) = 0, \ \mu = 1, \dots, s \ ,$$
$$R_\mu(w(b)) = 0, \ \mu = s+1, \dots, n \ .$$

In beiden Fällen ist ein halbhomogenes Randwertproblem entstanden.

Beispiel:

(3) Durch $y'' + y = 1 \ , \quad y(0) = 1 \ , \ y(1) = 2$

ist ein lineares, inhomogenes Randwertproblem zweiter Ordnung gegeben.

a) Die Funktion $\psi(x) \equiv 1$ löst die Differentialgleichung. Mit dem Ansatz: $y(x) = 1 + z(x)$ ergibt sich für z das halbhomogene Randwertproblem

$$z'' + z = 0 \quad , \quad z(0) = 0 \ , \ z(1) = 1 \ .$$

b) Die Funktion $\psi^*(x) = 1 + x$ befriedigt die Randbedingungen. Mit dem Ansatz $y(x) = 1 + x + w(x)$ ergibt sich für w das halbhomogene Randwertproblem

$$w'' + w = -x \quad , \quad w(0) = 0 \ , \ w(1) = 0 \ .$$

Zur Untersuchung der Lösbarkeit linearer Randwertprobleme können wir also ohne Einschränkung stets von einem halbhomogenen Randwerproblem mit einer homogenen Differentialgleichung ausgehen. Es gilt

Satz 9.1 (Alternativsatz) *Ausgangspunkt sei das Randwertproblem aus Definition 9.1 mit $q(x) \equiv 0$. Es sei $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$, und es sei ferner*

$$\Delta := \det R := \det \begin{pmatrix} R_1(y_1(a)) & \cdots\cdots & R_1(y_n(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_s(y_1(a)) & \cdots\cdots & R_s(y_n(a)) \\ R_{s+1}(y_1(b)) & \cdots\cdots & R_{s+1}(y_n(b)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_n(y_1(b)) & \cdots\cdots & R_n(y_n(b)) \end{pmatrix},$$

sowie $\gamma := (\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n)^T$.

Es gibt drei Alternativen:

a) Ist $\Delta \neq 0$, dann ist das Randwertproblem eindeutig lösbar.

b) Ist $\Delta = 0$ und gilt $rg\ R = rg\ (R, \gamma)$, dann hat das Randwertproblem unendlich viele Lösungen.

c) Ist $\Delta = 0$ und gilt $rgR < rg(R, \gamma)$, dann ist das Randwertproblem unlösbar.

Bemerkungen und Ergänzungen:

(4) Wir erinnern an den Begriff des **Ranges** einer Matrix M, der in der Linearen Algebra (Band I, Kapitel 10) eingeführt wird: rg M (der Rang von M) ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (oder Zeilen) der Matrix M. Ist a ein Spaltenvektor mit genauso viel Komponenten, wie M Zeilen besitzt, dann ist (M, a) die Matrix, die aus M durch Hinzufügen der Spalte a entsteht.

(5) In der Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme (vgl. Band I, Kapitel 12) existiert ein zu Satz 9.1 analoges Resultat.

(6) Aus Satz 9.1 folgt: Ist das Randwertproblem vollhomogen, dann existiert bei Alternative a) nur die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$. Die Alternative c) tritt nicht auf.

Beispiel:

(7) Gegeben sei die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung

$$L(y) \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0 .$$

Man erhält mit Hilfe des charakteristischen Polynoms das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^x , \quad y_2(x) = x \cdot e^x , \quad y_3(x) = e^{2x} .$$

Wir benötigen noch die Ableitungen bis zur Ordnung zwei:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= e^x , & y_2'(x) &= (x+1) \cdot e^x , & y_3'(x) &= 2 \cdot e^{2x} , \\ y_1''(x) &= e^x , & y_2''(x) &= (x+2) \cdot e^x , & y_3''(x) &= 4 \cdot e^{2x} . \end{aligned}$$

Nun seien zu dieser Differentialgleichung die folgenden drei Sätze von Randbedingungen betrachtet:

a) $y(0) = \alpha_1 , \quad y'(0) = \alpha_2 , \quad y(1) = \beta_1 .$

Die Matrix R aus Satz 9.1 berechnet sich zu:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ e & e & e^2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \Delta = e \cdot (e-2) \neq 0 .$$

Wir haben die Alternative a); dieses Randwertproblem ist für jeden reellen Vektor $\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)^T$ **eindeutig lösbar**.

b) $y(0) - y'(0) = -1 , \quad y'(0) - y''(0) = -1 , \quad y(1) - y'(1) = -e .$

Für die Matrix R und den Vektor γ erhält man

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -e & -e^2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -e \end{pmatrix} .$$

Es folgt

$$\Delta = 0 , \quad \mathrm{rg}\, R = \mathrm{rg}\, (R, \gamma) = 2 .$$

Somit trifft die Alternative b) in Satz 9.1 zu, das Problem hat **unendlich viele Lösungen**.

c) $y(0) - y'(0) = 0 , \quad y'(0) - y''(0) = 0 , \quad y(1) - y'(1) = 1 .$

Die Matrix R ist hier die gleiche, wie im Falle b).

Für γ erhält man den Vektor $\gamma = (0, 0, 1)^T$. Es folgt

$$\Delta = 0 , \quad \mathrm{rg}\, R = 2 , \quad \mathrm{rg}\, (R, \gamma) = 3 .$$

Wir haben also die Alternative c) von Satz 9.1, das Randwertproblem besitzt **keine Lösung**.

Wir fassen die Schritte zur Lösung eines linearen Randwertproblems zusammen:

Lösungsverfahren:
Vorgelegt sei ein Randwertproblem nach Definition 9.1.

1. Man bestimme eine spezielle Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung $L(y) = q(x)$ und forme das Randwertproblem in ein halbhomogenes Randwertproblem mit homogener Differentialgleichung um.
2. Man berechne ein Fundamentalsystem aus Lösungen $\{z_1(x), \dots, z_n(x)\}$ von $L(z) = 0$, bilde gemäß Satz 9.1 die Matrix R und den Vektor $\gamma = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s, \tilde{\beta}_{s+1}, \dots, \tilde{\beta}_n)^T$.
3. Im Falle der Lösbarkeit (Alternative a) oder b) in Satz 9.1) löse man das lineare Gleichungssystem $R \cdot c = \gamma$ nach $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ auf.
4. Die gesuchte Lösung des Randwertproblems lautet nun

$$y(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot z_k(x) .$$

Beispiele:

(8) $L(y) \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2 , \; y(0) = 3 , \quad y'(0) = 6 , \quad y(1) = 3e^2 - 1 .$

1. Die Funktion $\psi(x) \equiv -1$ ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: $L(\psi) = 2$. Mit $z(x) = 1 + y(x)$ erhält man das halbhomogene Randwertproblem

$$L(z) = 0 , \quad z(0) = 4 , \quad z'(0) = 6 , \quad z(1) = 3e^2 .$$

2. Die drei Funktionen

$$z_1(x) = e^x , \quad z_2(x) = x \cdot e^x , \quad z_3(x) = e^{2x}$$

bilden ein Fundamentalsystem aus Lösungen von $L(z) = 0$. Die Matrix R (vgl. Beispiel (7), a)) und der Vektor γ lauten:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ e & e & e^2 \end{pmatrix} , \quad \gamma = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3e^2 \end{pmatrix} .$$

3. Das lineare Gleichungssystem

$$R \cdot c = \gamma , \qquad c = (c_1, c_2, c_3)^T ,$$

ist wegen $\Delta = \det R \neq 0$ eindeutig lösbar; man erhält die Lösung $c = (1, -1, 3)^T$.

4. Das Randwertproblem hat also die Lösung

$$y(x) = (1 - x) \cdot e^x + 3 \cdot e^{2x} - 1 .$$

(9) $L(y) \equiv y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x - 1 ,$

$$y(0) - y'(0) = y'(0) - y''(0) = -2 , \quad y(1) - y'(1) = -(e + 2) .$$

1. Durch einen Ansatz vom Typ der Störfunktion errechnet man, dass $\psi(x) = -(x + 2)$ eine spezielle Lösung von $L(y) = 2x - 1$ ist.
Also befriedigt $z(x) = y(x) + (x + 2)$ das halbhomogene Randwertproblem

$$L(z) = 0 , \quad z(0) - z'(0) = z'(0) - z''(0) = -1 , \; z(1) - z'(1) = -e .$$

2. Die homogene Differentialgleichung $L(z) = 0$ und die zugehörigen Randbedingungen sind identisch mit denen in Beispiel (7), b), man erhält also die gleiche Matrix R und den gleichen Vektor γ.
3. Zu lösen ist jetzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -e & -e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -e \end{pmatrix}$$

mit den Lösungen $c = (c_1, 1, 0)^T , \; c_1 \in \mathbb{R}$.

4. Das Randwertproblem hat also die Lösungen

$$y(x) = (c_1 + x) \cdot e^x - (x + 2) , \quad c_1 \in \mathbb{R} .$$

Ist ein lineares Randwertproblem, wie es in Definition 9.1 formuliert ist, vollhomogen, dann existiert entweder nur die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$ (Alternative a)), oder es gibt unendlich viele Lösungen (Alternative b)).

In den Anwendungen tritt nun oft ein solches vollhomogenes lineares Randwertproblem noch in Verbindung mit einem (unbekannten, freien) **Parameter** λ auf, also etwa in folgender Form:

$$\begin{aligned} L(y) - \lambda \cdot y \equiv \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x) \cdot y^{(\nu)} - \lambda \cdot y = 0 , \\ R_\mu(y(a)) = 0 , \quad \mu = 1, \dots, s , \\ R_\mu(y(b)) = 0 , \quad \mu = s + 1, \dots, n . \end{aligned}$$

Man nennt solche vollhomogenen Randwertprobleme mit einem Parameter λ **Eigenwertprobleme**. Von λ wird es abhängen, ob das Randwertproblem nur die triviale Lösung besitzt, oder ob es nichttriviale Lösungen gibt. Alle diejenigen

Parameter λ , für die der letztere Fall vorliegt, heißen **Eigenwerte** der Randwertaufgabe, und die zugehörigen nichttrivialen Lösungen heißen **Eigenfunktionen** zu dem Eigenwert λ. Zu einem Eigenwert gibt es unendlich viele Eigenfunktionen, denn mit $y(x)$ ist auch jedes skalare Vielfache $a \cdot y(x)$, $a \in \mathbb{R}$ eine Eigenfunktion.

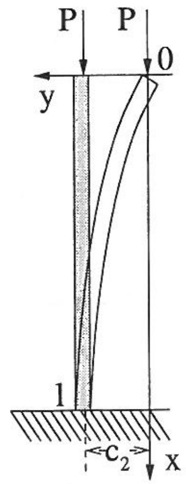
Beispiele:

(10) Berechnung der **Eulerschen Knicklast**.

Ein senkrechter, unten vertikal eingespannter elastischer Stab der Länge l wird in Richtung seiner Längsachse durch die Kraft P belastet. Gefragt ist nach der kleinsten Last P_1, bei welcher der Stab aus seiner Anfangslage seitlich ausweicht.
Wir legen das in der Skizze angedeutete Koordinatensystem zugrunde.
Für **kleine Durchbiegungen** wird die Auslenkung $y(x)$ für $0 \leq x \leq l$ durch die Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{P}{E \cdot J} \cdot y$$

beschrieben.



Dabei ist $P \cdot y(x)$ ist das Biegemoment an der Stelle x, die Konstanten E und J sind der Elastizitätsmodul und das axiale Flächenträgheitsmoment des Stabes. Wir führen die positive Größe

$$\lambda = \frac{P}{E \cdot J}$$

ein und erhalten das Eigenwertproblem

$$y'' = -\lambda \cdot y \quad , \quad y(0) = y'(l) = 0 \, .$$

Gesucht sind die positiven Eigenwerte λ mit den zugehörigen Eigenfunktionen $y(x)$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(x) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, ,$$

mit der Ableitung

$$y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda} \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x) + c_2\sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x) \, .$$

Die erste Randbedingung $y(0) = 0$ liefert $c_1 = 0$, und aus der zweiten $y'(l) = 0$ erhält man

$$c_2\sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot l) = 0 \, .$$

Nichttriviale Lösungen dieser Gleichung gibt es nur, falls für den Parameter λ eine der Gleichungen

$$\sqrt{\lambda} \cdot l = \pm\frac{\pi}{2} \cdot (2k-1) \, , \; k \in \mathbb{N} \, .$$

erfüllt ist. Damit erhält man schließlich die Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$\lambda_k = \frac{\pi^2}{4l^2} \cdot (2k-1)^2 \quad \text{und} \quad y_k(x) = c_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2l} \cdot (2k-1) \cdot x\right)$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $c_2 \in \mathbb{R}$. Zum ersten Eigenwert λ_1 gehört die **Eulersche Knicklast**

$$P_1 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{4l^2} \, .$$

Es ist die kleinste Belastung, unter der nichttriviale Lösungen existieren, also ein Abknicken des Stabes möglich ist. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen für $k > 1$ sind nur von geringer praktischer Bedeutung.

(11) Bei der Lösung der **Wärmeleitungsgleichung** (vgl. Kapitel 10, Beispiel (4)) und Kapitel 11, Teil III) wird man folgendermaßen auf ein Eigenwertproblem geführt:

Wir betrachten für $u = u(x,t)$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit den Zusatzbedingungen

$$u(x,0) = F(x) \, , \; 0 \leq x \leq L \quad \text{und} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \, , \; t > 0 \, .$$

Dabei sind a und L gegebene Konstanten und $F(x)$ eine gegebene Funktion.

Zur Lösung der Differentialgleichung beginnt man mit dem **Bernoullischen Produktansatz**

$$u(x,t) = \varphi(x) \cdot \psi(t) \, .$$

Wir bezeichnen die partielle Ableitung nach x bzw. t mit einem Strich bzw. einem Punkt und erhalten durch Differentiation und Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\varphi(x) \cdot \dot{\psi}(x) = a^2 \cdot \varphi''(x) \cdot \psi(x) \, ,$$

oder

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\dot{\psi}(t)}{a^2 \cdot \psi(t)} \, . \qquad (*)$$

Diese **Trennung der Veränderlichen** erlaubt nun den Schluss, dass jede Seite dieser Gleichung mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ übereinstimmen muss. Unter Ausnutzung der Randbedingungen $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, erhält man für $\varphi(x)$ das Eigenwertproblem

$$\varphi'' = \lambda \cdot \varphi \quad , \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \, .$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$\varphi(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}\cdot x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}\cdot x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} ,$$

im Falle $\lambda > 0$,

$$\varphi(x) = c_1 \cdot \cos\sqrt{|\lambda|} \cdot x + c_2 \cdot \sin\sqrt{|\lambda|} \cdot x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} ,$$

im Falle $\lambda < 0$ und

$$\varphi(x) = c_1 + c_2 \cdot x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} ,$$

im Falle $\lambda = 0$.

Die Randbedingungen $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ lassen sich nichttrivial nur im Falle $\lambda < 0$ befriedigen. Man erhält für $n \in \mathbb{N}$ die Eigenwerte

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$\varphi_n(x) = a_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) \quad , \quad a_n \in \mathbb{R} .$$

Wir kehren zur Gleichung (*) zurück, setzen die rechte Seite dieser Gleichung gleich λ_n und erhalten

$$\dot{\psi}_n = -\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \cdot \psi_n .$$

Die Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichung lauten

$$\psi_n(t) = b_n \cdot e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 \cdot t} , \quad b_n \in \mathbb{R} ,$$

sodass man für die Wärmeleitungsgleichung die Lösungen

$$u_n(x,t) = c_n \cdot e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) , \quad c_n \in \mathbb{R} , \ n \in \mathbb{N} .$$

erhält. Diese Funktionen befriedigen auch noch die Zusatzbedingungen

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 , \ t \in \mathbb{R} .$$

Dies gilt auch für alle Linearkombinationen der Funktionen $u_n(x,t)$. Unter diesen findet man unter gewissen Voraussetzungen auch eine Lösung, die zusätzlich noch der Anfangsbedingung $u(x,0) = F(x)$, $0 \leq x \leq L$, genügt. Die Details sind in Kapitel 11 ausgeführt.

ÜBUNGEN

Ü9.1: Für welche Zahlen $r \in \mathbb{R}$ besitzt das Randwertproblem

$$4y'' + y = r \cdot \sin\tfrac{x}{2} ,$$
$$y(0) = 0 , \quad y(2\pi) = 1$$

reelle Lösungen? Geben Sie für diese r alle reellen Lösungen an.

Ü9.2: Gegeben ist für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x} \cdot y' + \frac{2}{x^2} \cdot y = 0$$

mit den linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = x , \quad y_2(x) = x^2 .$$

Untersuchen Sie die Randwertprobleme, die sich bei folgenden Randbedingungen ergeben, auf Lösbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Lösungen:

a) $y(1) = 5 , \quad y(2) = 16 ,$

b) $y'(1) = 2 , \quad y(2) = 2 ,$

c) $2 \cdot y(\frac{1}{2}) - y'(\frac{1}{2}) = 2 , \quad y(2) - 2 \cdot y'(2) = 16 .$

Ü9.3: Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$y''' - y'' + 4 \cdot y' - 4 \cdot y = 0 ,$$
$$y(0) = \alpha_1 , \quad y'(0) = \alpha_2 , \quad y(1) = \beta_1$$

für alle $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.

Ü9.4: Berechnen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$y'' - 4y' + 5y = 25x + 8 \cdot \cos x ,$$
$$y(0) = 5 , \quad 2y(\pi) - y'(\pi) = 8\pi$$

nach dem vor Beispiel (8) angegebenen Lösungsverfahren.

Ü9.5: Bestimmen Sie sämtliche reellen Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenfunktionen des Eigenwertproblems

$$y'' + \lambda \cdot y = 0 ,$$
$$y(0) - y'(0) = y(\pi) - y'(\pi) = 0 .$$

Anleitung:
Machen Sie die drei Fallunterscheidungen: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ und beachten Sie, dass die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$ **keine** Eigenfunktion ist.

Ü9.6: Vorgelegt sei das Eigenwertproblem

$$y'' + \frac{1}{x} \cdot y' + \frac{\lambda}{x^2} \cdot y = 0 \, ,$$
$$y'(1) = y'(e^{2\pi}) = 0 \, .$$

Ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung für positive λ ist durch die Funktionen

$$y_1(x) = \cos(\sqrt{\lambda} \cdot \ln x) \; , \quad y_2(x) = \sin(\sqrt{\lambda} \cdot \ln x)$$

gegeben. Ermitteln Sie sämtliche positiven Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenfunktionen des Problems.

10 Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung

Viele Sachverhalte in Naturwissenschaft und Technik lassen sich nicht durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben. Dieses leuchtet unmittelbar ein, da hierbei oft Funktionen eine Rolle spielen, die von mehreren Ortsvariablen und unter Umständen auch noch von der Zeit abhängen. So wird z.B. die Temperatur in einem Zimmer im allgemeinen von den drei Ortsvariablen x, y, z sowie von der Zeitvariablen t abhängig sein. Zur Beschreibung solcher Sachverhalte dienen **partielle Differentialgleichungen.**

In diesem und in dem folgenden Kapitel wollen wir uns mit einer besonders wichtigen Klasse partieller Differentialgleichungen, nämlich denen der Ordnung zwei, befassen.

Wir betrachten partielle Differentialgleichungen der Form

$$\boxed{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f \, ,} \tag{1}$$

wobei die Koeffizienten a_{ik} (mit $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, \ldots, n$) und die rechte Seite f gegebene Funktionen von $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ sowie von u und seinen partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, sind. Im Folgenden nehmen wir stets

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \quad \text{für alle} \quad i, k = 1, \ldots, n$$

an. Gesucht ist eine zweimal partiell differenzierbare Funktion

$$u = u(x) = u(x_1, \ldots, x_n),$$

für die die Gleichung (1) erfüllt ist.

Definition 10.1 *Eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung der Form (1) heißt*

a) **quasilinear,** *wenn die Koeffizientenfunktionen a_{ik} und f von $x, u, \mathrm{grad}\, u$, nicht jedoch von noch höheren Ableitungen der Funktion u abhängen,*

b) **halblinear,** *wenn die Koeffizientenfunktionen a_{ik} höchstens von x abhängen,*

c) **linear,** *wenn zusätzlich zu der Bedingung in b) die rechte Seite f wenn überhaupt dann linear von u und $\mathrm{grad}\, u$ abhängt.*

Die linke Seite von (1) ist durch die Koeffizientenfunktionen

$$a_{ik}(z) = a_{ki}(z) \quad \text{mit} \quad z := (x, u, \operatorname{grad} u)^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

gegeben. Für jedes z ist

$$A(z) = (a_{ik}(z)) \in \mathbb{R}^{n,n} \tag{2}$$

eine symmetrische Matrix.

Definition 10.2
Die partielle Differentialgleichung (1) heißt im Punkte $z \in \mathbb{R}^{2n+1}$

a) **elliptisch,** *wenn $A(z)$ positiv oder negativ definit ist,*

b) **hyperbolisch,** *wenn $\det A(z) \neq 0$ ist und genau $n-1$ Eigenwerte von $A(z)$ gleiches Vorzeichen haben,*

c) **parabolisch,** *wenn $\det A(z) = 0$ ist,*

d) **ultrahyperbolisch** *sonst. (Dies kann nur für $n \geq 4$ vorkommen.)*

Bemerkungen und Ergänzungen:

(1) Da der Typ d) für die Anwendungen nur von untergeordneter Bedeutung ist, werden wir uns im Folgenden nur mit den drei Typen a), b), c) beschäftigen. Diese beschreiben, physikalisch gesehen, drei wesentlich verschiedene Sachverhalte: Elliptische Gleichungen beschreiben **Gleichgewichtszustände** (etwa stationäre Temperaturverteilungen oder elektrische Potentiale). Hyperbolische Gleichungen sind Modelle für **Ausbreitungsvorgänge** (etwa Schwingungen oder Wellen). Durch parabolische Gleichungen schließlich werden **Diffusionsvorgänge** (etwa Wärmeleitung oder Konzentration in Flüssigkeiten) beschrieben. Die beiden letzten Typen beschreiben **zeitabhängige** Vorgänge, weshalb hier auch stets die Zeitvariable t auftreten wird. In den elliptischen Gleichungen treten nur Ortsvariable auf.

Beispiele:

(2) **Das Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung**

Eine dünne Platte G liege in der (x, y)-Ebene und sei durch eine geschlossene Kurve ∂G berandet. Gesucht ist die **stationäre** (d.h. zeitunabhängige) **Temperaturverteilung** $u(x, y)$ auf der Platte, wenn eine (stationäre) Temperaturverteilung $g(x, y) : \partial G \to \mathbb{R}$ auf dem Rande vorgegeben ist. Die obere und untere Plattenfläche seien völlig wärmeisoliert. Ferner sollen in der Platte **Wärmequellen,** die

durch eine Quellfunktion $f(x, y) : G \to \mathbb{R}$ beschrieben sind, vorhanden sein. Man leitet dann folgendes **Randwertproblem** her

$$\left.\begin{aligned} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f(x, y), \quad (x, y) \in G \\ u(x, y) &= g(x, y), \quad (x, y) \in \partial G \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Unter gewissen Glattheitsvoraussetzungen an $f(x, y)$, $g(x, y)$ und ∂G besitzt dieses Randwertproblem eine eindeutig bestimmte Lösung $u(x, y)$. Man prüft sofort nach, dass es sich bei (3) um eine lineare, elliptische Differentialgleichung handelt. Sie heißt **Poisson-Gleichung** und wird für den Fall $f(x, y) \equiv 0$ **Laplace-Gleichung** (oder **Potentialgleichung**) genannt. Der Differentialoperator

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{4}$$

heißt **Laplace-** oder **Potentialoperator**. Er ist in vielen Bereichen der Mathematik und Physik von zentraler Bedeutung.

In vielen Anwendungen treten auch dreidimensionale Randwertprobleme von der Gestalt (3) auf.

(3) **Das Anfangs-Randwertproblem der Wellengleichung**

Eine (in der x-Achse befindliche) gespannte Saite der Länge L werde in Schwingungen versetzt. Gesucht ist die (von Ort x und Zeit t abhängige) **vertikale Auslenkung** $u(x, t)$ aus der Ruhelage der Saite. Es wird angenommen, dass die Auslenkungen klein sind gegenüber der Länge L. Ferner soll angenommen werden, dass noch gewisse **äußere vertikale Kräfte** $m \cdot q(x, t)$ (m = Masse des Drahtes) auf die Saite einwirken. Durch die Forderung, dass die Saite an den Enden $x = 0$ und $x = L$ fest eingespannt ist, erhält man zwei homogene Randbedingungen. Ferner ist es physikalisch sinnvoll, zur Zeit $t = 0$ die vertikale Auslenkung, sowie die vertikale Momentangeschwindigkeit vorzugeben. Dies sind Anfangsbedingungen. Man leitet folgendes **Anfangs-Randwertproblem** her:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, t), && x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), && x \in [0, L] \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, && t > 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Der Koeffizient $c > 0$ ist konstant. Er hat die physikalische Dimension einer Geschwindigkeit und misst die Geschwindigkeit, mit der sich eine angeregte Schwingung entlang des Drahtes fortpflanzt. Das Problem (5) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung. Bei der Differentialgleichung, die auch **Schwingungsgleichung** genannt wird, handelt es sich um eine lineare hyperbolische Differentialgleichung. Bei Wellenausbreitungsvorgängen im 2- oder 3-dimensionalen Raum erhält man natürlich Gleichungen in zwei bzw. drei Raumvariablen. Dazu kommt die Zeitvariable t.

(4) **Das Anfangs-Randwertproblem der Wärmeleitungsgleichung**

Von einem dünnen, homogenen Stab der Länge L mit konstantem Querschnitt wird die von Ort und Zeit abhängige **Temperatur** $u(x,t)$ gesucht. Die Oberfläche des Stabes sei völlig wärmeisoliert, jedoch sollen im Stabe (von Ort und Zeit abhängige) **Wärmequellen** vorhanden sein, die durch eine Quellfunktion $f(x,t)$ beschrieben werden. Zur Zeit $t=0$ wird die **Anfangstemperaturverteilung** $F(x)$ im Stabe vorgegeben. Ferner sollen an den beiden Stabenden die Temperaturen $g(t)$ und $h(t)$ als **Randbedingungen** hinzukommen. Man kann dann das folgende Anfangs-Randwertproblem, das ebenfalls eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, herleiten:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & x \in (0,L),\ t>0 \\ u(x,0) = F(x), & x \in [0,L] \\ u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = h(t),\ t>0 & \end{array}\right\} \tag{6}$$

Der konstante Koeffizient $a^2 > 0$ heißt **Wärmeleitkoeffizient** (oder **Diffusionskoeffizient**) und misst die Geschwindigkeit der Wärmeausbreitung. So hat z.B. gut leitendes Material (Kupfer) einen hohen Diffusionskoeffizienten. Bei Baumaterial (Mauern oder Wände) wird ein kleines a^2 angestrebt. Wie man sofort nachprüft, ist die Wärmeleitungsgleichung (6) eine lineare parabolische Differentialgleichung.

Bemerkungen und Ergänzungen:

(5) Die eben aufgeführten drei Beispiele sind sehr einfache Rand- bzw. Anfangs-Randwertprobleme und beschreiben die physikalischen Vorgänge nur unvollkommen. Will man diese genauer modellieren, kommt man auf quasilineare Probleme, deren Lösung mit erheblich mehr Schwierigkeiten verbunden ist und bei denen man oft auf numerische Lösungsmethoden angewiesen ist.

(6) Im folgenden Kapitel werden wir uns mit Methoden zur Lösung der Probleme (3), (5), (6) befassen.

ÜBUNGEN

Ü10.1: Überzeugen Sie sich davon, dass die drei Differentialgleichungen (3), (5), (6) alle linear sind und geben Sie die zugehörigen symmetrischen Matrizen $A(z)$ (vgl. Formel (2)) an.

Ü10.2: Entscheiden Sie bei folgenden Differentialgleichungen, ob sie quasilinear, halblinear oder linear sind:

a) $(x^2+y^2)\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^3 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$,

b) $u^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$,

c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + x^2 + y^3$.

Ü10.3: Entscheiden Sie bei folgenden Differentialoperatoren, von welchem Typ sie im Sinne von Definition 10.2 sind:

a) $L_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

b) $L_2 \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

c) $L_3 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 20\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$,

d) $L_4 u \equiv y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Ü10.4: Der 2-dimensionale Laplace-Operator $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ soll in Polarkoordinaten umgeschrieben werden; dazu setzen Sie:

$F(r,\varphi) \equiv u(x,y)$ mit $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$ für $r>0$ und $0 \le \varphi < 2\pi$.

Sodann bilden Sie nach der Kettenregel (vgl. Band I, Kapitel 30) die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial r},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2},\quad \frac{\partial F}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

und zeigen Sie schließlich die Beziehung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

11 Lösungsmethoden bei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung

In diesem Kapitel sollen nun Lösungsmethoden vorgestellt werden, mit denen die im vorigen Kapitel behandelten Probleme (10.3), (10.5) und (10.6) gelöst werden können.

I. Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein ebenes Gebiet mit dem Rand ∂G. Wir sehen zunächst von den Randbedingungen ab und betrachten die Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f(x,y) \quad \text{in } G, \tag{1}$$

sowie die zugehörige homogene Gleichung, die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } G. \tag{2}$$

Satz 11.1
Sei $u_0(x,y)$ eine (beliebige) spezielle Lösung von (1) und $u_h(x,y)$ die allgemeine Lösung von (2). Dann wird die allgemeine Lösung $u(x,y)$ von (1) gegeben durch

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_h(x,y).$$

Um das Randwertproblem (10.3) zu lösen, kann man prinzipiell so vorgehen:

a) Man bestimmt eine partikuläre Lösung $u_0(x,y)$ von (1), notfalls durch Erraten.

b) Man bestimmt eine Lösung $u_h(x,y)$ von (2), die gleichzeitig folgende Randbedingung erfüllt:

$$u_h(x,y) = g(x,y) - u_0(x,y) \quad \text{für alle } (x,y) \in \partial G. \tag{3}$$

c) Die Funktion $u(x,y) = u_0(x,y) + u_h(x,y)$ ist dann die gesuchte Lösung von (10.3).

Die Hauptaufgabe besteht also im Schritt b), und dies wollen wir jetzt für den Spezialfall tun, dass das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis um 0 vom Radius ϱ ist:

$$G = K_\varrho := \{(x,y) : \; x^2 + y^2 < \varrho^2\}. \tag{4}$$

Bemerkung:

(1) Hat man das Dirichletproblem der Potentialgleichung auf einem Kreis gelöst, ist man schon ein gutes Stück vorangekommen. Man kann nämlich mit funktionentheoretischen Methoden (vgl. Kapitel 16) die Untersuchungen vom Kreis auf allgemeinere, einfach zusammenhängende Gebiete $G \subset \mathbb{R}^2$ übertragen. Wir werden aber anschließend noch auf rechteckige Gebiete $G \subset \mathbb{R}^2$ eingehen.

Wegen der speziellen Gestalt von G ist es zweckmäßig, das Problem von kartesischen auf Polarkoordinaten umzuschreiben. Wir setzen

$$\left.\begin{array}{l} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad 0 \le r \le \varrho, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{5}$$

sowie

$$F(r,\varphi) := u(x,y), \quad \gamma(\varphi) := g(x,y). \tag{6}$$

Die Umrechnung des Potentialoperators in Polarkoordinaten ist in Ü10.4 zu finden. Somit erhalten wir das folgende Randwertproblem

$$\left.\begin{array}{rl} \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0 & \text{für } (r,\varphi) \in K_\varrho \\ F(\varrho,\varphi) = \gamma(\varphi) & \text{für } 0 \le \varphi < 2\pi. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Zur Lösung von (7) machen wir den sogenannten **Separationsansatz** (oder **Produktansatz**) von Bernoulli:

$$F(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi). \tag{8}$$

Durch Differentiation, Einsetzen in (7) und Trennung der Größen nach den Variablen r, φ ergibt sich

$$\frac{r^2 \cdot R''(r) + r \cdot R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = K, \tag{9}$$

wobei K eine Konstante ist. Da nämlich der linke Quotient nur von r und der rechte Quotient nur von φ abhängt, müssen diese Größen jede für sich gleich derselben Konstanten K sein. Die Gleichungen (9) liefern uns zwei Scharen gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung, deren Lösungen nun angegeben werden sollen.

a) $\Phi'' + K \cdot \Phi = 0,$

wobei wegen unserer Aufgabenstellung die Funktion $\Phi(\varphi)$ reell und periodisch in 2π sein muss. Dies ergibt

$$K = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

sowie die Lösungsschar

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0(\varphi) &= \tfrac{1}{2}\tilde{a}_0 \\ \Phi_n(\varphi) &= \tilde{a}_n \cdot \cos n\varphi + \tilde{b}_n \cdot \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

mit $\tilde{a}_\nu, \tilde{b}_\nu \in \mathbb{R}$.

b) $r^2 \cdot R'' + r \cdot R' - n^2 \cdot R = 0,$

wobei für K gleich die durch (10) gegebenen Werte n^2 eingesetzt sind.

Wegen der in der Aufgabenstellung geforderten Stetigkeit der Funktion $R(r)$ bei $r = 0$ erhält man als Lösungen dieser Eulerschen Differentialgleichungen

$$R_n(r) = c_n \cdot r^n, \quad c_n \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Unser Produktansatz (8) hat uns also die folgenden speziellen Lösungen geliefert

$$\left.\begin{aligned} F_0(r,\varphi) &= \tfrac{1}{2}a_0 \\ F_n(r,\varphi) &= r^n \cdot (a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dabei wurde $a_n := c_n \cdot \tilde{a}_n$, $b_n := c_n \cdot \tilde{b}_n$ gesetzt.

Da (7) eine lineare, homogene Differentialgleichung ist, sind beliebige Summen der Lösungen (13) wieder Lösungen; insbesondere ist die Reihe

$$F(r,\varphi) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu \cdot (a_\nu \cdot \cos \nu\varphi + b_\nu \cdot \sin \nu\varphi) \tag{14}$$

eine Lösung der Potentialgleichung (7), wenn sie auf G konvergiert und dort gliedweise differenziert werden darf.

Nun betrachten wir die Randbedingung in (7). Die Funktion $\gamma(\varphi)$ sei als stetig, stückweise glatt und 2π-periodisch vorausgesetzt. Dann besitzt $\gamma(\varphi)$ eine gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe. Setzt man in (14) $r = \varrho$, so ergibt sich wegen $F(\varrho,\varphi) = \gamma(\varphi)$ schließlich (vgl. Band I, Kapitel 28):

Satz 11.2
Die Lösung des Dirichlet-Problems (7) ist gegeben durch die Reihe

$$F(r,\varphi) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu \cdot (a_\nu \cdot \cos \nu\varphi + b_\nu \cdot \sin \nu\varphi)$$

mit

$$a_\nu = \frac{1}{\pi \cdot \varrho^\nu} \cdot \int_0^{2\pi} \gamma(\alpha) \cdot \cos \nu\alpha \, d\alpha \quad \textit{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_\nu = \frac{1}{\pi \cdot \varrho^\nu} \cdot \int_0^{2\pi} \gamma(\alpha) \cdot \sin \nu\alpha \, d\alpha \quad \textit{für } \nu = 1, 2, \ldots \quad .$$

Beispiele:

(2) Gesucht ist die Lösung $u(x,y)$ der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ auf dem Einheitskreis K_1 mit der vorgegebenen Funktion $g(x,y) = 2x^2$ auf dem Rande ∂K_1.

a) Wegen $x = r \cdot \cos \varphi$ und $r = \varrho = 1$ folgt

$$\gamma(\varphi) = F(1,\varphi) = 2 \cdot \cos^2 \varphi \, .$$

Nun muss $\gamma(\varphi)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt werden. Wegen $2 \cdot \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi$ gilt

$$\gamma(\varphi) = F(1,\varphi) = 1 + \cos 2\varphi.$$

b) Dies ergibt wegen Satz 11.2

$$F(r,\varphi) = 1 + r^2 \cdot \cos 2\varphi.$$

c) Dies schreiben wir wieder in x, y um und erhalten

$$F(r,\varphi) = 1 + r^2 \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 1 + x^2 - y^2.$$

Also ist $u(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ die gesuchte Lösung.

(3) Gesucht ist die Lösung $u(x,y)$ von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1 \quad \text{auf } K_1 \, , \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial K_1 \, . \end{aligned}$$

a) Wir erraten die spezielle inhomogene Lösung

$$u_0(x,y) = \tfrac{1}{2}x^2.$$

b) Wir lösen nun das Randwertproblem

$$\Delta u_h = 0 \quad \text{auf } K_1 \,, \qquad u_h = -\tfrac{1}{2}x^2 \quad \text{auf } \partial K_1 \,.$$

Es ist

$$\gamma(\varphi) = F(1,\varphi) = -\tfrac{1}{2}\cos^2\varphi = -\tfrac{1}{4}\cdot(1+\cos 2\varphi) \,.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} F(r,\varphi) &= -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}r^2 \cdot \cos 2\varphi \\ &= -\tfrac{1}{4}\cdot(1 + r^2\cdot\cos^2\varphi - r^2\cdot\sin^2\varphi) \\ &= \tfrac{1}{4}(y^2 - x^2 - 1) = u_h(x,y) \,. \end{aligned}$$

c) Die gesuchte Lösung ist $u(x,y) = u_0(x,y) + u_h(x,y)$ (vgl. Satz 11.1), also

$$u(x,y) = \tfrac{1}{4}\cdot(x^2+y^2-1) \,.$$

(4) Das folgende Beispiel zeigt, dass der Produktansatz auch bei anderen Gebieten zum Ziele führen kann. Gesucht ist die Lösung $u(x,y)$ von

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = (2-x^2)\cdot\cos y \text{ für } (x,y)\in(0,2)\times(0,\pi) \,, & \\ u(0,y) = 0, & u(2,y) = \sin y + \sin 2y + 4\cos y \,, \\ u(x,0) = x^2, & u(x,\pi) = -x^2 \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Hier ist also G ein achsenparalleles Rechteck.

a) Wir erraten die spezielle Lösung $u_0(x,y) = x^2\cdot\cos y$.

b) Wir lösen das Randwertproblem

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u_h = 0 \ \text{ in } G \,, \\ u_h(0,y) = 0,\ u_h(2,y) = \sin y + \sin 2y \,, \\ u_h(x,0) = 0,\ u_h(x,\pi) = 0 \,. \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Der **Produktansatz** $u_h(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$ ergibt

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K \,,$$

also die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$X''(x) - K\cdot X(x) = 0, \qquad Y''(y) + K\cdot Y(y) = 0.$$

Schließt man hier die trivialen Lösungen von vornherein aus, dann erhält man wegen der drei homogenen Randbedingungen für K die Werte $K = n^2$, $n = 1,2,3,\ldots$, und folglich die Schar der folgenden Lösungen

$$X_n(x) = \alpha_n\cdot\sinh(nx), \qquad Y_n(x) = \beta_n\cdot\sin(nx), \qquad \alpha_n,\beta_n\in\mathbb{R}\,.$$

Somit erhalten wir als allgemeine Lösung der Potentialgleichung in (16)

$$u_h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot\sinh(nx)\cdot\sin(ny) \,,$$

wobei die vierte, inhomogene Randbedingung in (16) **noch nicht** benutzt wurde. Dies geschieht nun, indem wir oben $x = 2$ einsetzen und Koeffizientenvergleich durchführen.

Es folgt für die Koeffizienten:

$$c_1 = \frac{1}{\sinh 2}, \quad c_2 = \frac{1}{\sinh 4}, \quad c_n = 0 \ \text{ für } n \geq 3.$$

c) Schließlich erhalten wir die Lösung $u(x,y)$ von (15) nach Satz 11.1:

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_h(x,y) = x^2\cdot\cos y + \frac{\sinh x}{\sinh 2}\cdot\sin y + \frac{\sinh 2x}{\sinh 4}\cdot\sin 2y.$$

Bemerkung:

(5) Bei allgemeineren Gebieten G ist eine analytische Lösung der Dirichlet-Probleme meist nicht mehr möglich. Hier müssen numerische Methoden mit Finiten Elementen eingesetzt werden. Man vergleiche hierzu Kapitel 30.

II. Lösung der Wellengleichung

Der zweite wichtige Grundtyp von partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung wird durch die Wellengleichung repräsentiert, mit deren Lösung wir uns jetzt beschäftigen wollen. Um einen Einblick in den Charakter der Lösungen zu bekommen, soll zunächst von den Randbedingungen abgesehen und das **reine Anfangswertproblem der Wellengleichung** betrachtet werden (man denke dabei z.B. an eine schwingende Saite von "unendlicher Länge")

Gesucht ist $u = u(x,t)$ mit

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c>0 \text{ fest}, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Mit der Koordinatentransformation

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct$$

und mit $\Phi(\xi,\eta) := u(x,t) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)$ erhält die Wellengleichung die ganz einfache Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

Die Lösungen sind

$$\Phi(\xi,\eta) = \alpha(\xi) + \beta(\eta) = \alpha(x+ct) + \beta(x-ct) = u(x,t).$$

Hierbei sind α, β beliebige, hinreichend oft differenzierbare Funktionen.

Durch Verwendung der beiden Anfangsbedingungen in (17) lassen sich die Funktionen $\alpha(x+ct)$, $\beta(x-ct)$ eindeutig bestimmen (Übung). Es folgt

Satz 11.3
Die Lösung des Anfangswertproblems (17) lautet

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\cdot[f(x+ct) + f(x-ct)] + \tfrac{1}{2c}\cdot \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Bemerkungen und Ergänzungen:

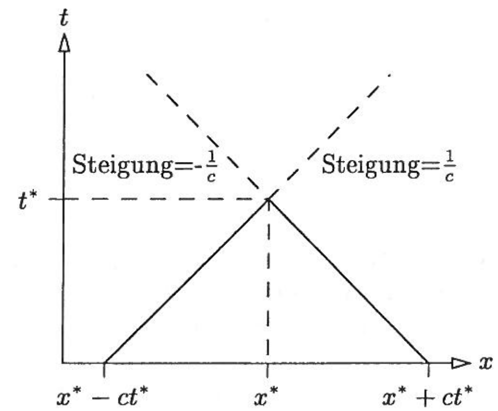
(6) Aus der Form der Lösung lässt sich der folgende physikalische Sachverhalt ablesen:

$u(x,t)$ besteht aus zwei Anteilen, deren Niveau-Linien jeweils eine Schar paralleler Geraden sind, nämlich die Geradenscharen

$$t = -\tfrac{1}{c}\cdot x + \text{const} \quad \text{und} \quad t = +\tfrac{1}{c}\cdot x + \text{const}\,. \tag{18}$$

Sie heißen die **Charakteristiken** der Wellengleichung (10.17) und sind zu interpretieren als **Informationsträger**, entlang denen sich physikalische Ausbreitungsvorgänge vollziehen. Die Lösungsanteile $\alpha(x+ct)$ bzw. $\beta(x-ct)$ sind Signale, die sich mit der Geschwindigkeit $-c$ bzw. $+c$ fortpflanzen.

(7) Sei (x^*,t^*) mit $t^* > 0$ ein beliebiger Punkt der (x,t)-Ebene.



Zeichnet man durch diesen Punkt die beiden Charakteristiken, dann schneiden diese aus der x-Achse das Intervall

$$I = [x^* - ct^*, x^* + ct^*]$$

aus. Aus der Darstellung der Lösung in Satz 11.3 ist ersichtlich, dass der Wert der Lösung $u(x,t)$ im Punkte (x^*,t^*) von den Anfangsfunktionen im Intervall I abhängt. Darum heißt I das zu dem Punkt (x^*,t^*) gehörige **Abhängigkeitsintervall**.

Beispiel:

(8) Gesucht ist die Lösung von (17) mit den Anfangsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = 0.$$

Mit Satz 11.3 erhält man sofort

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+(x+ct)^2} + \frac{1}{1+(x-ct)^2}\right), \qquad x\in\mathbb{R},\ t\geq 0.$$

Skizziert man $u(x,t)$ für verschiedene Zeitpunkte t, dann erkennt man sehr schön die Wellennatur der Lösung: Es handelt sich um zwei "Signale", von denen eines nach links und eines nach rechts läuft. Je größer c ist, desto schneller laufen die beiden Wellen.

Wir kommen nun zu dem **Anfangs-Randwertproblem der Wellengleichung** (vgl. Formeln (10.5))

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & c>0 \text{ fest}, & x\in(0,L),\ t>0\,, \\ u(x,0) = f(x), & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & x\in(0,L)\,, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & & t>0\,, \end{array}\right\} \tag{19}$$

wobei jetzt die äußere Kraft $q(x,t) \equiv 0$ vorausgesetzt wird und auch die Randbedingungen homogen sein sollen. Andernfalls würde das Lösen von (19) wesentlich mehr Schwierigkeiten bereiten.

Wir gehen jetzt genauso, wie im Falle der Poisson-Gleichung von einem Produktansatz

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$$

aus, der uns (ähnlich wie oben) zwei Rand- bzw. Eigenwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung liefert. Ohne jetzt das weitere Vorgehen im einzelnen zu beschreiben (vgl. Übungsaufgabe Ü11.4), geben wir die Lösung, die wieder die Form einer Fourier-Reihe hat, gleich an. Dazu denken wir uns die Anfangsfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ auf das Intervall $[-L,0]$ **ungerade** fortgesetzt. Sie können dann als $2L$-periodische Funktionen aufgefasst werden, deren Fourier-Entwicklungen reine Sinus-Reihen sind. Es gilt

Satz 11.4
Die Lösung des Anfangs-Randwertproblems (19) lautet

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{j\pi x}{L}\Big) \cdot \Big[a_j \cos\Big(\frac{j\pi ct}{L}\Big) + b_j \sin\Big(\frac{j\pi ct}{L}\Big)\Big],$$

wobei die Koeffizienten durch

$$\left.\begin{aligned} a_j &= \tfrac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin\Big(\frac{j\pi x}{L}\Big)\, dx, \\ b_j &= \tfrac{2}{j\pi c} \cdot \int_0^L g(x) \cdot \sin\Big(\frac{j\pi x}{L}\Big)\, dx, \end{aligned}\right. \qquad j = 1,2,3,\ldots\ .$$

gegeben sind.

Bemerkung:

(9) Differenziert man die Fourier-Reihe für $u(x,t)$ partiell nach t und bildet $u(x,0)$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$, dann erhält man wegen der Anfangsbedingungen in (19)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin\Big(\frac{j\pi x}{L}\Big) \quad \text{bzw.} \quad g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(b_j \frac{j\pi c}{L}\Big) \cdot \sin\Big(\frac{j\pi x}{L}\Big).$$

Hieraus ergeben sich die Ausdrücke für die Fourier-Koeffizienten a_j, b_j (vgl. Band I, Kapitel 28).

Beispiel:

(10) Gesucht ist die Lösung $u(x,t)$ von (19) mit

$$L = \pi, \quad c = 1, \quad f(x) = \tfrac{1}{10} \cdot \sin 3x, \quad g(x) \equiv 0.$$

Es folgt aus Satz 11.4 und Bemerkung (9)

$$a_3 = \tfrac{1}{10}, \quad a_j = 0 \quad \text{für} \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \neq 3, \quad b_j = 0 \text{ für } j \in \mathbb{N}.$$

Damit ergibt sich als Lösung

$$u(x,t) = \tfrac{1}{10} \cdot \sin 3x \cdot \cos 3t = \tfrac{1}{20} \cdot \Big(\sin 3(x+t) + \sin 3(x-t)\Big).$$

Die letzte Darstellung von $u(x,t)$ zeigt wieder deutlich die Zusammensetzung von zwei Schwingungsanteilen, die die Charakteristiken als Niveau-Linien haben. Der Leser veranschauliche sich den Schwingungsvorgang durch Skizzen für verschiedene Zeitpunkte t.

III. Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Wir kommen schließlich zum dritten Grundtyp von Gleichungen 2. Ordnung, der Wärmeleitungsgleichung, die wir auch bereits aus Kapitel 10 kennen (vgl. (10.6)): Gesucht ist die Lösung $u(x,t)$ des folgenden Problems

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad a > 0 \text{ fest}, \ x \in (0,L),\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= F(x), \qquad x \in (0,L)\,, \\ u(0,t) &= g(t), \quad u(L,t) = h(t), \qquad t > 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Als erstes wollen wir (20) auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen transformieren; wir setzen

$$\left.\begin{aligned} u_0(x,t) &:= \tfrac{1}{L}\Big((L-x)\cdot g(t) + x \cdot h(t)\Big), \\ \tilde{u}(x,t) &:= u(x,t) - u_0(x,t), \\ \tilde{f}(x,t) &:= f(x,t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}(x,t), \\ \tilde{F}(x) &:= F(x) - u_0(x,0), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

sodass $\tilde{u}(x,t)$ nun die Lösung von

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= a^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{f}(x,t),\ x \in (0,L),\ t > 0\,, \\ \tilde{u}(x,0) &= \tilde{F}(x), \qquad x \in (0,L)\,, \\ \tilde{u}(0,t) &= \tilde{u}(L,t) = 0, \qquad t > 0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ist. Als Nächstes denken wir uns die Funktionen $\tilde{f}(x,t)$, $\tilde{F}(x)$ (für jedes feste $t > 0$) nach $[-L, 0]$ ungerade fortgesetzt und entwickeln diese sodann in Sinus-Fourier-Reihen:

$$\tilde{f}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(t) \cdot \sin(\tfrac{n\pi}{L}x), \quad \tilde{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \cdot \sin(\tfrac{n\pi}{L}x). \tag{23}$$

Nun wird die gesuchte Lösung ebenfalls als Sinus-Reihe angesetzt:

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) \cdot \sin(\tfrac{n\pi}{L}x). \tag{24}$$

Differentiation von (24), Einsetzen in (22) und Koeffizientenvergleich in den entstandenen Sinus-Reihen ergibt für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die folgende Schar linearer gewöhnlicher Anfangswertprobleme 1. Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{u}}_n &= -\left(\tfrac{n\pi a}{L}\right)^2 \cdot \tilde{u}_n + \tilde{f}_n(t), \quad t > 0 \\ \tilde{u}_n(0) &= \tilde{c}_n, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

die durch Variation der Konstanten zu lösen sind (vgl. Kapitel 2); die Lösungen werden gleich explizit angegeben. Damit folgt

Satz 11.5
Die Funktionen $u_0(x,t), \tilde{u}(x,t), \tilde{f}(x,t)$ und $\tilde{F}(x)$ seien durch (21) definiert. Dann lautet die Lösung des Anfangs-Randwertproblems (20)

(i) $u(x,t) = u_0(x,t) + \tilde{u}(x,t)$,
wobei $\tilde{u}(x,t)$ durch die Sinusreihe

(ii) $\tilde{u}(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) \cdot \sin(\tfrac{n\pi}{L}x)$

mit

(iii) $\tilde{u}_n(t) = e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 \cdot t} \cdot \left[\int\limits_0^t e^{(\frac{n\pi a}{L})^2 \cdot \tau} \cdot \tilde{f}_n(\tau)\, d\tau + \tilde{c}_n\right], \quad n \in \mathbb{N}$

gegeben ist. Hierbei sind die Funktionen $\tilde{f}_n(t)$ und die Zahlen $\tilde{c}_n$ die durch (23) gegebenen Fourier-Koeffizienten von $\tilde{f}(x,t)$ bzw. $\tilde{F}(x)$.

Beispiele:

(11) In (20) sei

$$a^2 = 1, \quad L = \pi, \quad f(x,t) = 0, \quad g(t) = h(t) = 0$$

sowie

$$F(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{für } \frac{\pi}{2} \le x < \pi. \end{cases}$$

Es folgt $u_0(x,t) = 0$, $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$, $\tilde{f}_n(t) = 0$,

$$\tilde{u}_n(t) = e^{-n^2 \cdot t} \cdot \tilde{c}_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Koeffizienten $\tilde{c}_n$ sind wegen (23) die Fourier-Koeffizienten der Reihe

$$F(x) = \tilde{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \cdot \sin(\tfrac{n\pi}{L}x).$$

Dies ergibt (vgl. Band I, Kapitel 28)

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \tilde{F}(x) \cdot \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(nx)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \cdot \sin(nx)\, dx\right] \\ &= \frac{4}{n^2 \cdot \pi} \cdot \sin(\tfrac{n\pi}{2}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \dfrac{4}{n^2 \cdot \pi} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

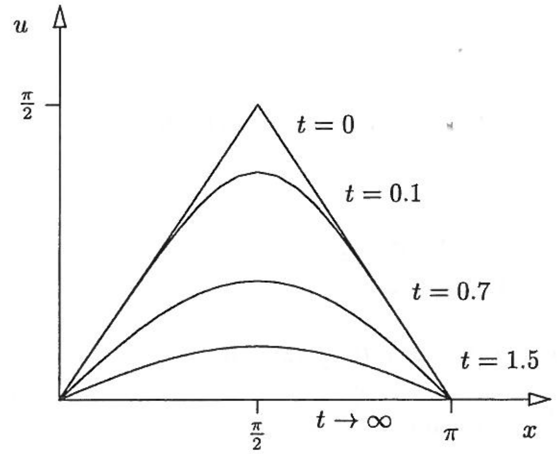
sodass wir

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot e^{-(2\nu-1)^2 \cdot t} \cdot \frac{\sin(2\nu-1)x}{(2\nu-1)^2}.$$

erhalten. In der folgenden Skizze sind die Lösungskurven für einige feste t-Werte gezeichnet.

Wir wollen noch das asymptotische Verhalten von $u(x,t)$ für $t \to \infty$ untersuchen. Eine einfache Abschätzung ergibt für alle $x \in [0, \pi]$:

$$|u(x,t)| \le \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu t} = \frac{4}{\pi} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{1 - e^{-t}} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$



(12) Im Anfangsrandwertproblem (20) sei

$$a^2 = 1, \quad L = \pi, \quad f(x,t) = 0, \quad F(x) = 1, \quad g(t) = 1, \quad h(t) = 0.$$

Mit (21) erhält man

$$u_0(x,t) = 1 - \frac{x}{\pi}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t}(x,t) = 0, \quad u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + 1 - \frac{x}{\pi},$$

$$\tilde{f}(x,t) = 0, \quad \tilde{F}(x) = \frac{x}{\pi}\,.$$

Die zu $\tilde{F}(x)$ gehörige Sinus-Reihe lautet (Übung)

$$\tilde{F}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\,,$$

sodass man mit Satz 11.5 erhält ($\tilde{f}_n(\tau) = 0$):

$$\tilde{u}_n(t) = e^{-n^2 \cdot t} \cdot \tilde{c}_n = e^{-n^2 \cdot t} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n \cdot \pi}\,,$$

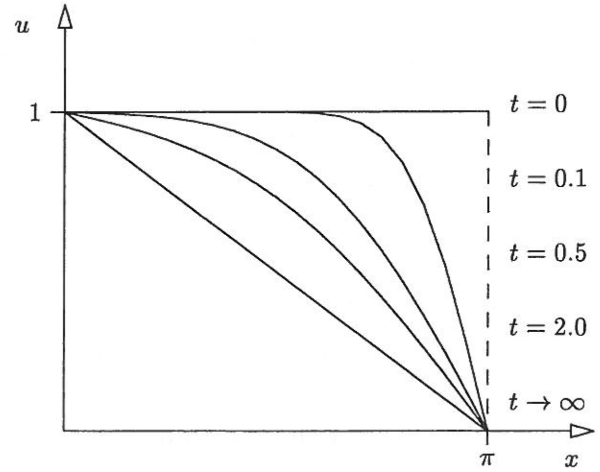
also

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot e^{-n^2 \cdot t} \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\,.$$

Dies ergibt schließlich

$$u(x,t) = 1 - \frac{x}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot e^{-n^2 \cdot t} \cdot \sin(nx)\,.$$

Die folgende Skizze zeigt Lösungskurven für einige feste t-Werte. Für $t \to \infty$ nähert sich die Lösung der linearen Funktion $\hat{u}(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$.



ÜBUNGEN

Ü11.1: Sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ der Einheitskreis. Lösen Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 6xy && \text{für } (x,y) \in G, \\ u(x,y) &= xy && \text{für } (x,y) \in \partial G. \end{aligned}$$

Hinweis: $\sin 2\varphi = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$, $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$.

Ü11.2: Lösen Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{array}{lll} \Delta u = 0 & & \text{für } x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\ u(0,y) = 0, & u(1,y) = \sin(2\pi y) & \text{für } y \in (0,1), \\ u(x,0) = 0, & u(x,1) = 0 & \text{für } x \in (0,1) \end{array}$$

mit Hilfe eines Produktansatzes.

Ü11.3: Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0\,,$$

$$u(x,0) = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ü11.4: Zeigen Sie, dass die Lösung $u(x,t)$ des Anfangs-Randwertproblems (19) die allgemeine Fourier-Reihendarstellung von Satz 11.4 besitzt. Hierzu gehe man von dem Produktansatz $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ aus, löse zunächst das für $v(x)$ entstehende Eigenwertproblem, bestimme anschließend die allgemeine Lösung für $w(t)$ und kombiniere schließlich beide Anteile durch Bildung der Fourier-Reihe.

Ü11.5: Berechnen Sie die Lösung des folgenden Anfangs-Randwertproblems der Wellengleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{für } x \in (0, 2\pi),\ t > 0, \\ &u(x,0) = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin x \cdot \cos x && \text{für } x \in (0, 2\pi), \\ &u(0,t) = 0, \quad u(2\pi, t) = 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Ü11.6: Lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{für } x \in (0,1),\ t > 0, \\ &u(x,0) = \sin 3\pi x && \text{für } x \in (0,1), \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 \text{ für } t > 0. \end{aligned}$$

Ü11.7: Lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2 \cdot e^t \cdot \sin x \cdot \cos x && \text{für } x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ &u(x,0) = 4 \sin^3 x, && \text{für } x \in (0,\pi), \\ &u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \pi \cdot t && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Hinweis: $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x, \quad 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$

12 Die Laplace-Transformation

In diesem Kapitel führen wir eine weitere Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen ein, die insbesondere bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten einsetzbar ist. So wie man durch Logarithmieren positiver reeller Zahlen die Rechenoperationen Multiplizieren und Potenzieren sowie die Umkehroperationen Dividieren und Wurzelziehen in die einfacheren Operationen Addieren und Multiplizieren sowie Subtrahieren und Dividieren umwandeln kann, erlaubt die Laplace-Transformation (LPT) reeller Funktionen die Operationen Differenzieren und Integrieren durch einfache algebraische Operationen zu ersetzen. Dadurch kann eine Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung verwandelt werden, die mitunter leichter zu lösen ist. Der Lösungsprozess für ein Anfangswertproblem verläuft dann formal in drei Schritten:

Anfangswert-Problem	$\xrightarrow{LPT}$	Algebraische Gleichung	$\xrightarrow{Lösung}$	LPT der Lösung	$\xrightarrow{Rücktr.}$	Lösung des AWP

Definition 12.1 *Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ definierte reellwertige Funktion. Dann heißt die Funktion*

$$F = \mathcal{L}\{ f \},$$

die durch

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

definiert ist, die **Laplace-Transformierte** *von f. Der Definitionsbereich der Funktion $\mathcal{L}\{ f \}$ ist die Menge der Zahlen $s \in \mathbb{R}$, für die das uneigentliche Integral existiert.*

Bemerkungen und Ergänzungen:

(1) Existiert für ein $s = s_0$ das uneigentliche Integral, so existiert es auch für alle $s > s_0$. Daraus folgt, dass der Definitionsbereich der Laplace-Transformierten immer ein Intervall $[a,\infty)$ oder (a,∞) ist, es sei denn, das Integral existiert für keine einzige Zahl s. In letzterem Fall nennen wir die Funktion f **nicht L-transformierbar**. Ist der Definitionsbereich von $F = \mathcal{L}\{ f \}$ nicht leer, so heißt f **L-transformierbar** und die Zahl a die **Konvergenzabszisse**.

(2) In allen Formeln dieses Kapitels, in denen Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{ f \}$ vorkommen, wird immer stillschweigend vorausgesetzt, dass die Originalfunktion f L-transformierbar ist. Wir beschränken uns dabei auf Funktionen f, die entweder stetig oder zumindest stückweise und rechtsseitig stetig auf $[0, \infty)$ sind.

(3) Ändert man die Funktion f an endlich vielen Stellen ab, so besitzt die modifizierte Funktion die gleiche Laplace-Transformierte wie f selbst. Zu einer gegebenen Laplace-Transformierten F gibt es also unendlich viele Funktionen f mit $\mathcal{L}\{ f \} = F$. Allerdings gibt es höchstens eine stetige Funktion f oder höchstens eine stückweise und rechtsseitig stetige Funktion f, die die Laplace-Transformierte F besitzt. Mit der in (2) gemachten Einschränkung ist also die Zuordnung $f \to \mathcal{L}\{ f \} = F$ einer L-transformierbaren Funktion zu ihrer Laplace-Transformierten F umkehrbar eindeutig. Wir nennen f die zu F gehörende **Originalfunktion** und bezeichnen den Übergang von F zu f als **Rücktransformation**

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{ F \} .$$

(4) Zur besseren Übersichtlichkeit werden wir in diesem Kapitel die unabhängige Variable der Originalfunktion f mit t und die der Transformierten F mit s bezeichnen. Dies schlägt sich in der Schreibweise

$$F(s) = \mathcal{L}\{ f(t) \} ,$$

nieder, die häufig in unterschiedlichen Variationen verwendet wird.

Beispiele:

(5) Die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) = 1$, $t \geq 0$, ist

$$\mathcal{L}\{ 1 \} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \, dt = \frac{1}{s} , \; s > 0 .$$

Die Konvergenzabszisse ist $a = 0$.

(6) Für

$$f(t) = e^{\lambda t} , \; t > 0 ,$$

gilt

$$\mathcal{L}\{ e^{\lambda t} \} = \int_0^\infty e^{-st} e^{\lambda t} \, dt = \frac{1}{s - \lambda} , \; s > \lambda .$$

Die Konvergenzabszisse ist $a = \lambda$.

(7) In (14) werden wir zeigen:

$$\mathcal{L}\{ \sin t \} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{ \cos t \} = \frac{s}{s^2 + 1} , \; s > 0 .$$

(8) Die Funktion

$$f(t) = e^{t^2} , \; t \geq 0$$

ist nicht L-transformierbar, denn das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} \, dt = \int_0^\infty e^{t(t-s)} \, dt$$

existiert für kein $s \in \mathbb{R}$.

Wir werden nun eine Reihe von Rechenregeln kennenlernen, die es erlauben, Laplace-Transformierte zu berechnen, ohne Definition 12.1 mit dem uneigentlichen Integral anwenden zu müssen.

Satz 12.1 *Linearität und Streckung*

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{L}\{ af + bg \} = a \, \mathcal{L}\{ f \} + b \, \mathcal{L}\{ g \}$$

sowie für $c > 0$ und $F(s) = \mathcal{L}\{ f(t) \}$

$$\mathcal{L}\{ f(ct) \} = \frac{1}{c} F(\frac{1}{c} s) .$$

Beispiele:

(9) Die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ \cosh t \} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{ e^t \} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{ e^{-t} \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} = \frac{s}{s^2 - 1} . \end{aligned}$$

(10) Die Funktion

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1}$$

ist die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} = \sinh t .$$

(11) Die Funktion $f(t) = \cos \omega t$ hat nach Satz 12.1 und (7) die Laplace-Transformierte

$$F(s) = \frac{1}{\omega} \frac{s/\omega}{(s/\omega)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} .$$

Für

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + \omega^2} = \frac{a}{\omega} \frac{1}{\omega} \frac{1}{(s/\omega)^2 + 1}$$

gilt umgekehrt

$$\mathcal{L}^{-1}\{ \frac{a}{s^2 + \omega^2} \} = \frac{a}{\omega} \sin \omega t .$$

Satz 12.2 *Differentiation und Integration*

Die Funktion $f(t)$ sei Laplace-transformierbar mit der Laplace-Transformierten $F(s)$.

(i) *Ist f differenzierbar auf $(0, \infty)$ und rechtsseitig stetig im Nullpunkt, so gilt*

$$\mathcal{L}\{ f'(t) \} = s\, F(s) - f(0)$$

mit $F = \mathcal{L}\{ f \}$.

(ii) *Die Funktion $tf(t)$ ist ebenfalls Laplace-transformierbar, und es gilt*

$$\mathcal{L}\{ tf(t) \} = -F'(s)$$

(iii) *Ist f sogar n-mal differenzierbar mit im Nullpunkt rechtsseitig stetigen Ableitungen, so gilt*

$$\mathcal{L}\{ f^{(n)}(t) \} = s^n\, F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) .$$

(iv) *Die Stammfunktion*

$$g(t) = \int_0^t f(u)\, du$$

besitzt die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}\{ g(t) \} = \frac{1}{s} F(s) .$$

Beispiele:

(12) Die Funktion $f(t) = t^n$ hat die n-te Ableitung $f^{(n)}(t) = n!$ mit der Laplace-Transformierten

$$\mathcal{L}\{ f^{(n)}(t) \} = \frac{n!}{s} .$$

Mit Satz 12.2 folgt daraus für $F(s) = \mathcal{L}\{ t^n \}$

$$\frac{n!}{s} = s^n\, F(s) \quad \text{also} \quad F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} .$$

(13) Für ein Polynom

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

ergibt sich die Laplace-Transformierte

$$F(s) = \frac{a_n n!}{s^{n+1}} + \frac{a_{n-1}(n-1)!}{s^n} + \ldots + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s} .$$

(14) Aus $(\sin t)'' = -\sin t$ folgt

$$s^2 \cdot \mathcal{L}\{ \sin t \} - 1 = -\mathcal{L}\{ \sin t \} \quad \text{also} \quad \mathcal{L}\{ \sin t \} = \frac{1}{1 + s^2} ,$$

und aus

$$\cos t = (\sin t)' \quad \text{folgt} \quad \mathcal{L}\{ \cos t \} = \frac{s}{1 + s^2} .$$

(15) Die Funktion $f(t) = \cos^2 t$ hat die Ableitung

$$f'(t) = -2 \cos t \sin t = -\sin 2t$$

mit der Laplace-Transformierten (siehe (11))

$$\mathcal{L}\{ f'(t) \} = \frac{-2}{s^2 + 4} .$$

Daraus ergibt sich wegen

$$f(t) - f(0) = \cos^2 t - 1 = \int_0^t f'(u)\, du$$

die Laplace-Transformierte

$$F(s) = \mathcal{L}\{ f(t) \} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \left(\frac{-2}{s^2 + 4} \right) = \frac{s^2 + 2}{s\,(s^2 + 4)} .$$

(16) Die allgemeine Potenzfunktion

$$f(t) = t^\alpha$$

mit einem Exponenten $\alpha \geq 0$ hat die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}\{ t^\alpha \} = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha \, dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \frac{1}{s} \, du$$
$$= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \, du \, .$$

Dieses uneigentliche Integral hängt eng mit einer wichtigen Funktion zusammen, der **Eulerschen Gammafunktion**:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} \, du \, , \; x > 0 \, .$$

Mit dieser Funktion erhält man

$$\mathcal{L}\{ t^\alpha \} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \, .$$

Ein Vergleich mit Beispiel (12) ergibt

$$\Gamma(n+1) = n! \, .$$

Die Gammafunktion interpoliert also die Fakultät-Funktion, die nur für ganzzahlige Argumente definiert ist.

Aus

$$\frac{d}{dt} t^\alpha = \alpha \cdot t^{\alpha-1}$$

folgt mit Satz 12.2

$$\mathcal{L}\{ \alpha t^{\alpha-1} \} = \alpha \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}$$
$$= s \, \mathcal{L}\{ t^\alpha \} = s \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \, ,$$

also die Gleichung

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \quad \text{für} \quad \alpha > 0 \, .$$

Diese Gleichung ermöglicht es, die Werte der Gamma-Funktion an allen Stellen $\alpha + k$, $k = 1, 2, \ldots$, zu berechnen, wenn man $\Gamma(\alpha)$ kennt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 1/2$ mit Hilfe von Band I, Kapitel 36 (46)

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} \, du = \int_0^\infty e^{-v^2} \frac{1}{v} 2v \, dv = \sqrt{\pi} \, .$$

Damit ergibt sich

$$\mathcal{L}\{ \sqrt{t} \} = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{3/2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}} \, .$$

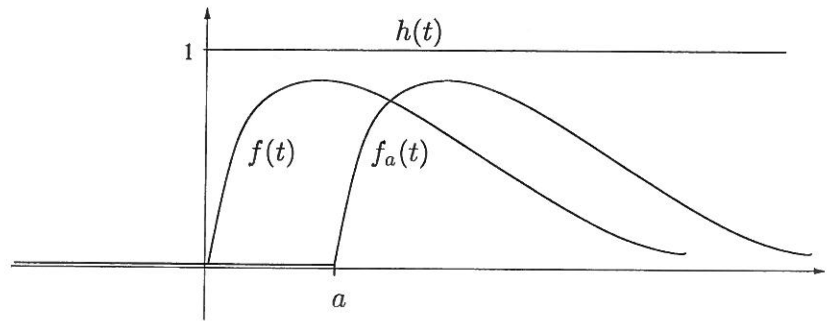
Satz 12.3 *Dämpfungs- und Verschiebungssatz*

Sei $\mathcal{L}\{ f \} = F$. *Dann gilt für* $a \in \mathbb{R}$

(i) $$\mathcal{L}\{ e^{-at} f(t) \} = F(s+a)$$

(ii) *Die Laplace-Transformierte der um* $a > 0$ *verschobenen Funktion*

$$f_a(t) := \begin{cases} f(t-a) & \textit{für} \;\; t \geq a \\ 0 & \textit{für} \;\; t < a \end{cases} \quad \textit{ist} \quad \mathcal{L}\{ f_a(t) \} = e^{-as} F(s) \, .$$



Bemerkungen und Ergänzungen:

(17) Die "Verschiebung" $f_a(t)$ einer Funktion $f(t)$ kann man mit der **Heaviside-Funktion** darstellen. Dies ist die Sprungfunktion

$$h(t) := \begin{cases} 1 & \text{für} \;\; t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \;\; t < 0 \end{cases} \, .$$

Die verschobene Funktion hat die Darstellung

$$f_a(t) = f(t-a) \cdot h(t-a) \quad \text{für} \quad t \geq 0 \, .$$

Beispiele:

(18) Die Funktion

$$f(t) = h(t) - h(t-a) \quad \text{(Rechteckimpuls)}$$

hat die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}\{ h(t) - h(t-a) \} = \frac{1}{s} - e^{-as} \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-as}}{s} \, .$$

(19) Wegen

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

ist mit Satz 12.3

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\} = e^{-a\,t}\cos\omega t\,.$$

Die Originalfunktion ist also eine gedämpfte Kosinus-Schwingung.

(20) Der um $k \cdot a$ verschobene Rechteckimpuls aus Beispiel (18) hat die Laplace-Transformierte

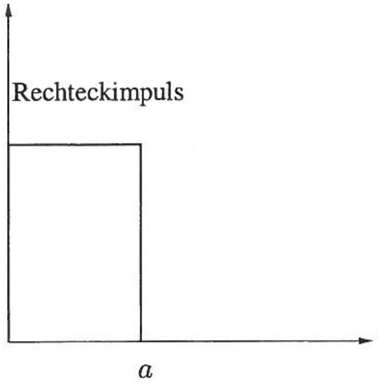
$$\mathcal{L}\{h(t-k\cdot a) - h(t-(k+1)\cdot a)\} = e^{-kas}\,\frac{1-e^{-as}}{s}\,.$$

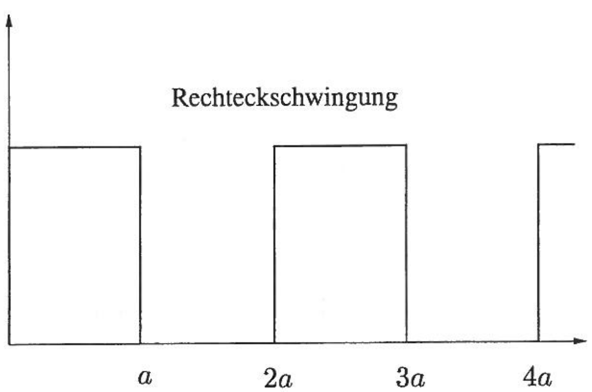
Daraus ergibt sich für die Rechteckschwingung

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(t-2k\cdot a) - h(t-(2k+1)\cdot a)$$

die Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kas}\frac{1-e^{-as}}{s}\\ &= \frac{1-e^{-as}}{s(1-e^{-2as})} = \frac{1}{s(1+e^{-as})}\,.\end{aligned}$$





Satz 12.4 *Faltungssatz*

Sei $\mathcal{L}\{f\} = F$ und $\mathcal{L}\{g\} = G$. Dann ist

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = \int_0^t f(t-u)\cdot g(u)\,du\,.$$

Bemerkungen und Ergänzungen:

(21) Die Funktion

$$f * g(t) := \int_0^t f(t-u)\cdot g(u)\,du\,,\ t \geq 0\,,$$

heißt die **Faltung** der Funktionen f und g.

Beispiele:

(22) In Beispiel (16) wurde die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}$$

bestimmt. Daraus folgt mit dem Faltungssatz

$$\mathcal{L}\{\sqrt{t} * \sqrt{t}\} = \frac{\pi}{4s^3}\,.$$

Wegen

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\pi}{4s^3}\} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{t^2}{2}$$

(siehe Beispiel (12)) folgt hieraus

$$\int_0^t \sqrt{u(t-u)}\,du = \frac{\pi}{8}\,t^2 \text{ für } t \geq 0\,.$$

(23) Die Faltung des Rechteckimpulses aus Beispiel (18) mit sich selbst ergibt die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ 2a-t & \text{für } a \leq t \leq 2a \\ 0 & \text{für } t \geq 2a\,. \end{cases}$$

Die Laplace-Transformierte dieser „Dreiecksfunktion" ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left(\frac{1-e^{-as}}{s}\right)^2\,.$$

Eine der wichtigsten Anwendungen von Laplace-Transformierten ist die in der Einführung dieses Kapitels beschriebene Methode, lineare Anfangswertprobleme zu lösen. Wir demonstrieren dies an linearen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sowie an linearen Systemen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Da wir in diesem Kapitel die unabhängige

Variable der Originalfunktionen mit t bezeichnen, verwenden wir die Schreibweise $\dot{y}(t)$ für die Ableitung der Funktion $y(t)$.

Das Anfangswertproblem

$$\dot{y} + p\,y = f\ ,\ y(0) = y_0$$

wird mit Hilfe der Laplace-Transformation auf die algebraische Gleichung

$$s\,\mathcal{L}\{\,y\,\} - y_0 + p\,\mathcal{L}\{\,y\,\} = \mathcal{L}\{\,f\,\}$$

transformiert. Die Lösung y des Anfangswertproblems hat also die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}\{\,y\,\} = \frac{\mathcal{L}\{\,f\,\} + y_0}{s+p}\ ,$$

und damit ist die Lösung

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{\,\frac{\mathcal{L}\{\,f\,\} + y_0}{s+p}\,\}\ .$$

Beispiele:

(24) Das Anfangswertproblem

$$\dot{y} + 3\,y = \cos 5t\ ,\ y(0) = 1$$

hat die Lösung

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{\,\frac{\frac{s}{s^2+25} + 1}{s+3}\,\} = \mathcal{L}^{-1}\{\,\frac{s^2+s+25}{(s+3)(s^2+25)}\,\}\ .$$

Um die Originalfunktion zu bestimmen, führen wir eine Partialbruchzerlegung durch

$$\frac{s^2+s+25}{(s+3)(s^2+25)} = \frac{1}{34}\left(\frac{31}{s+3} + \frac{25+3s}{s^2+25}\right)\ ,$$

aus der wir

$$y(t) = \frac{1}{34}(31e^{-3t} + 5\sin 5t + 3\cos 5t)$$

erhalten.

Das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$\ddot{y} + p\,\dot{y} + q\,y = f(t)\ ,\ y(0) = y_0\ ,\ \dot{y}(0) = y_1$$

ergibt nach der Transformation die Gleichung

$$s^2\mathcal{L}\{\,y\,\} - s\,y_0 - y_1 + p\,(s\,\mathcal{L}\{\,y\,\} - y_0) + q\,\mathcal{L}\{\,y\,\} = \mathcal{L}\{\,f\,\}\ .$$

Also lautet die Laplace-Transformierte der Lösung

$$\mathcal{L}\{\,y\,\} = \frac{\mathcal{L}\{\,f\,\} + (s+p)y_0 + y_1}{s^2+ps+q}$$

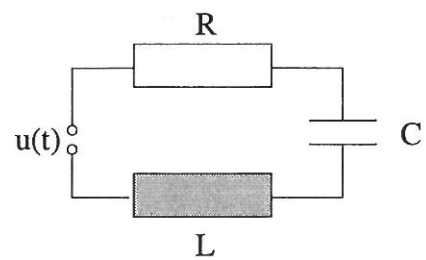
und die Lösung selbst

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{\,\frac{\mathcal{L}\{\,f\,\} + (s+p)y_0 + y_1}{s^2+ps+q}\,\}\ .$$

Beispiele:

(25) Erzwungene Schwingungen in einem elektrischen Schwingkreis

Einem elektrischen Schwingkreis mit einer Kapazität C, einer Induktivität L und einem Ohmschen Widerstand R wird eine Spannung $u(t)$ zugeführt. Bezeichnen wir mit $I(t)$ die im Kreis gemessene Stromstärke, so befriedigt die Funktion I die lineare Differentialgleichung



$$L\,\ddot{I} + R\,\dot{I} + \frac{1}{C}\,I = \dot{u}(t)\ .$$

Mit den Anfangsbedingungen $I(0) = r_0$, $\dot{I}(0) = r_1$ erhält man die Laplace-Transformierte der Lösung

$$\mathcal{L}\{\,I(t)\,\} = \frac{\mathcal{L}\{\,\dot{u}(t)\,\} + L\,r_0\,s + L\,r_1 + R\,r_0}{L\,s^2 + R\,s + 1/C}\ .$$

Ist speziell $R = 120\,\Omega$, $L = 0.01$ mH, $C = 10^{-6}$ F, $r_0 = 10^{-5}$, $r_1 = 0$ und $\dot{u}(t) = 0$ (freie Schwingung) , so erhält man

$$\mathcal{L}\{\,I\,\} = \frac{10^{-7}s + 1.2\cdot 10^{-3}}{10^{-2}s^2 + 120s + 10^6} = \frac{10^{-5}((s+6000) + 0.75\cdot 8000)}{(s+6000)^2 + 8000^2}\ .$$

Mit Hilfe von (11), (19) und wegen $\mathcal{L}^{-1}\{\,\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\,\} = e^{-at}\cdot\sin\omega t$ ergibt sich hieraus die Lösung des Anfangswertproblems zu

$$I(t) = 10^{-5}e^{-6000t}\cdot(\cos 8000t + 0.75\sin 8000t)\ ,\ t \geq 0\ ,$$

also eine gedämpfte harmonische Schwingung. Ist dagegen $\dot{u}(t) \neq 0$, so entsteht eine erzwungene Schwingung. Im Falle $r_0 = r_1 = 0$ erhält man als Laplace-Transformierte der Lösung

$$\mathcal{L}\{I\} = \frac{\mathcal{L}\{\dot{u}\}}{L s^2 + R s + 1/C} = \mathcal{L}\{\dot{u}\} \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{8000}{(s+6000)^2 + 8000^2} .$$

Die Lösung selbst ist daher die Faltung der zu $\mathcal{L}\{\dot{u}\}$ gehörenden Originalfunktion mit der gedämpften Sinusschwingung

$$I_0(t) := \frac{1}{80} e^{-6000t} \cdot \sin 8000t .$$

Ist zum Beispiel $\dot{u}(t)$ der in (18) definierte Rechteckimpuls mit $a = 1$, so ergibt sich

$$I(t) = h * I_0(t) = \int_0^t h(t-u) I_0(u)\, du = \int_{\max(0,t-1)}^t I_0(u)\, du .$$

Mit der Stammfunktion

$$J_0(t) = -\frac{1}{80}\, 10^{-8} e^{-6000\,t} \cdot (6000 \sin 8000\,t + 8000 \cos 8000\,t)$$

von I_0 erhält man schließlich

$$I(t) = J_0(t) - J_0(0) \quad \text{für } 0 \le t \le 1 \text{ und } \quad I(t) = J_0(t) - J_0(t-1) \quad \text{für } t > 1 .$$

(26) Das lineare System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 3\,y_1 + 2\,y_2 + 1 \\ \dot{y}_2 &= -2\,y_1 - y_2 - e^{-t} \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = y_2(0) = 0$ geht mit Hilfe der Laplace-Transformation in das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} s \cdot Y_1(s) &= 3\,Y_1(s) + 2\,Y_2(s) + \frac{1}{s} \\ s \cdot Y_2(s) &= -2\,Y_1(s) - Y_2(s) - \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

über, dessen Lösungen die Funktionen

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{s^2+1}{s \cdot (s+1) \cdot (s-1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2} \\ Y_2(s) &= \frac{-s^2+s-2}{s \cdot (s+1) \cdot (s-1)^2} = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

sind. Die zugehörigen Originalfunktionen sind:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{t} + t\,e^{t} \\ y_2(t) &= -2 + e^{-t} + e^{t} - t\,e^{t} \end{aligned}$$

TESTS

T12.1: Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{f\}$ einer L-transformierbaren Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion

( ) mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$

( ) mit Definitionsbereich $[0,\infty)$

( ) mit einem von f abhängigen Definitionsbereich

( ) mit einem Definitionsbereich der Form $[a,\infty)$ oder (a,∞) .

T12.2: Die Funktion $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$ ist die Laplace-Transformierte von

( ) $f(t) = 2t + 3t^2$

( ) $f(t) = 2/t - 3/t^2$

( ) $f(t) = 2 + 3t$

( ) $f(t) = 2e^{-t} + 3e^{-2t}$.

T12.3: Seien $f(t)$ und $g(t)$ Funktionen mit den Laplace-Transformierten $F(s)$ und $G(s)$.

( ) Die Laplace-Transformierte von $f(t) + g(t)$ ist $F(s) + G(s)$

( ) Die Laplace-Transformierte von $f(t) \cdot g(t)$ ist $F(s) \cdot G(s)$

( ) Die Originalfunktion zu $F(s) \cdot G(s)$ ist $(f * g)(t)$

( ) Die Laplace-Transformierte von $\dfrac{f(t)}{g(t)}$ ist $\dfrac{F(s) - G(s)}{G^2(s)}$.

T12.4: Die Funktion f ist differenzierbar mit der Ableitung $f' = g$. Sei h die Stammfunktion von f mit $h(0) = 0$. Die drei Funktionen f, g und h haben die Laplace-Transformierten F, G und H. Es gilt

( ) $G(s) = s\,F(s) - f(0)$

( ) $H(s) = F(s)/s$

( ) $G'(s) = F(s)$

( ) $H(s) = \int_0^s F(u)\, du$.

ÜBUNGEN

Ü12.1: Man berechne die Laplace-Transformierten folgender Funktionen:

a) $f(t) = \sinh t - \sin t$ (Linearitätssatz),

b) $f(t) = (t-1)^2\, e^{-2t}$ (Dämpfungs- und Verschiebungssatz),

c) $f(t) = t\, \sin t$ (Differentiationssatz),

d) die mit der Periode 6 periodische Funktion f mit

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } \ 0 \leq t < 3 \\ -2 & \text{für } \ 3 \leq t < 6\,. \end{cases}$$

Ü12.2: Bestimmen Sie jeweils die Originalfunktion zu den folgenden Laplace-Transformierten:

a) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2+s-6}$ (Partialbruchzerlegung),

b) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ (Faltungssatz),

c) $F(s) = \dfrac{1}{s\,(1-e^{-s})}$,

d) $F(s) = \ln \frac{s+1}{s-1}$ (Differentiationssatz).

Ü12.3: Lösen Sie die folgenden linearen Anfangswertprobleme:

a) $\ddot{y} + 4\dot{y} - 5y = 0\ ,\ y(0) = 1\ ,\ \dot{y}(0) = 0\ ,$

b) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = e^t\ ,\ y(0) = 1\ ,\ \dot{y}(0) = 0\ .$

Ü12.4: Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit einem System erster Ordnung mit den Anfangswerten $y_1(0) = -1$ und $y_2(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + y_1 + 2\dot{y}_2 + 3y_2 &= e^{-t} \\ 3\dot{y}_1 - y_1 + 4\dot{y}_2 + y_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Ü12.5: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$t\,\ddot{y} + 2(t-1)\,\dot{y} + (t-2)\,y = 0\,.$$

Hinweis: Wenden Sie Satz 12.2 (i) und (ii) an, um die Differentialgleichung zu transformieren; dadurch erhalten Sie eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für $Y(s) = \mathcal{L}\{\,y(t)\,\}$, die noch zu lösen ist.

Funktionentheorie

In der Funktionentheorie geht es um komplex-wertige Funktionen mit komplexen Variablen. Sie werden differenziert und integriert. Dabei erhält man überraschende Einsichten in die Eigenschaften reellwertiger Funktionen von einer und mehreren reellen Variablen. Die komplex-wertigen Funktionen sind von großer Wichtigkeit für die mathematische Modellierung von Problemen aus der Theoretischen Physik und der Elektrotechnik.

Die Zufallsvariablen X_{ij} mit $j = 1, 2, \ldots, n_i$ und $i = 1, 2, 3, 4$ werden als unabhängig vorausgesetzt. Es kann von einer gleichen unbekannten Varianz σ^2 ausgegangen werden. Ferner gilt immer:

$$(n_i - 1) \cdot s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \ .$$

Testen Sie nun mit einem geeigneten Verfahren zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese $H_0 : \ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$. Muss aufgrund dieses Ergebnisses eine Neueinstellung der Anlage vorgenommen werden?

Lösungen

Es bedeuten: (r) richtige Aussage, (f) falsche Aussage

Kapitel 1

Ü1.1:

gewöhnlich	partiell	linear	nichtlinear	Ordnung
×		×		3
×			×	2
	×	×		2
	×		×	1
	×	×		3
×			×	2

Ü1.2:

Differentiation der Funktionen und Einsetzen in die jeweiligen Differentialgleichungen zeigt, dass diese befriedigt werden.

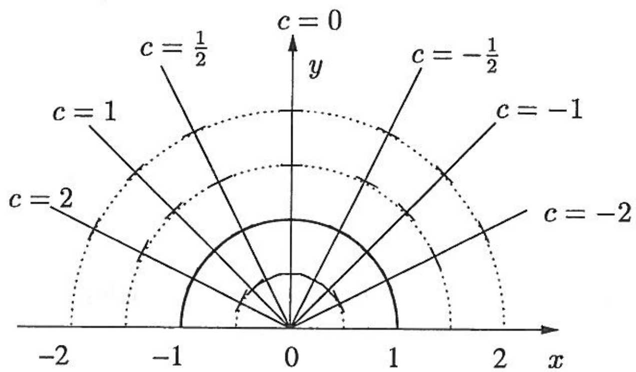
Ü1.3:

a) Differenzieren und Einsetzen

b) $x(t) = 2 \cdot \cos 3t$

Ü1.4:

a) Bestimmung der Isoklinen:



$$f(x,y) = -\frac{x}{y} = c \implies \begin{cases} y = -\frac{1}{c} \cdot x & \text{für } c \neq 0 \\ x = 0 & \text{für } c = 0 \ . \end{cases}$$

Das Richtungsfeld ist orthogonal zu den Isoklinen.

b) Aus der Skizze liest man ab:

$$\hat{y}(x) = \sqrt{1-x^2}\ .$$

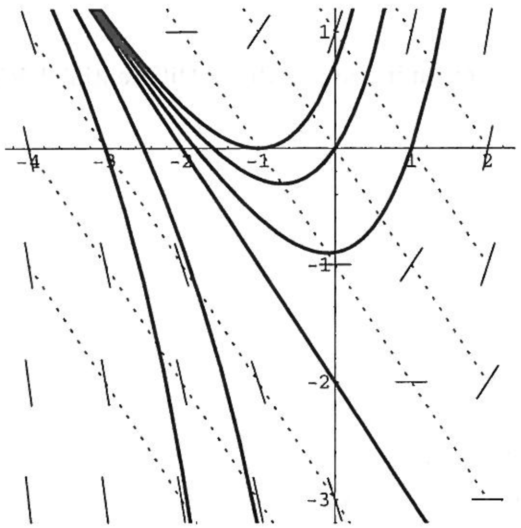
Probe:

$$\hat{y}'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\hat{y}(x)}\ , \quad \hat{y}(0) = 1\ .$$

Ü1.5:

a) Isoklinen: $y = -x - 1 + c\ , \quad c \in \mathbb{R}\ .$

b)



c) Der Skizze entnimmt man: $\hat{y}(x) = -x - 2$ ist die Lösung des vorgegebenen Anfangswertproblems.

Probe: $\hat{y}'(x) = -1 = 1 + x + \hat{y}(x)\ .$

Man sieht ferner: Diese Lösungskurve ist **gleichzeitig** eine Isokline.

Kapitel 2

Ü 2.1:

a) $y(x) = 2 \cdot \arctan 2x$

b) Für $1 + \cos z(x) \equiv 0$ erhält man die Lösungen

$$y(x) = (2n+1) \cdot \pi - x\ , \quad n \in \mathbb{Z}\ ,$$

für $1 + \cos z(x) \not\equiv 0$ erhält man die Lösungen

$$y(x) = 2 \cdot \arctan(x + c) - x\ , \quad c \in \mathbb{R}\ .$$

Ü 2.2: $y(x) = x \cdot \ln(\ln|x| + c)\ , \quad |x| > e^{-c}\ , \quad c \in \mathbb{R}\ .$

Ü 2.3:

a) Homogene Lösung: $y_h(x) = c \cdot e^{-2\cdot\sin x}\ , \quad c \in \mathbb{R}\ .$

Der Ansatz $y(x) = c(x) \cdot e^{-2\cdot\sin x}$ führt zu $c'(x) = \cos x \cdot e^{2\cdot\sin x}$, also $c(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2\cdot\sin x} + \gamma,\ \gamma \in \mathbb{R}\ .$
Daraus folgt $y(x) = \frac{1}{2} + \gamma \cdot e^{-2\cdot\sin x}\ , \quad \gamma \in \mathbb{R}\ .$

b) Rate die spezielle Lösung $y_0(x) \equiv \frac{1}{2}\ .$

Mit der in a) berechneten allgemeinen homogenen Lösung $y_h(x)$ und mit Satz 2.2 erhält man

$$y(x) = \tfrac{1}{2} + c \cdot e^{-2\cdot\sin x}\ , \quad c \in \mathbb{R}\ .$$

Ü 2.4: Mit $x_0 = x_1 = 0$ erhält man $(\cos x > 0)$:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int_0^x \tan\xi d\xi} \cdot \left[c - 2 \cdot \int_0^x \sin\eta \cdot e^{-\int_0^\eta \tan\xi d\xi} d\eta\right] \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \left[c - 2 \cdot \int_0^x \sin\eta \cdot \cos\eta d\eta\right] \\ &= \cos x + \frac{\gamma}{\cos x}\ , \quad \gamma \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Ü 2.5: $y(x) = 3x(1+x)^2\ .$

Ü 2.6:

a) Mit $z(x) = y^{-4}(x)$ folgt: $z' = -\frac{2}{x} \cdot z - 24x^2\ .$

b) $y(x) \equiv 0$ ist die triviale Lösung. Die allgemeine nichttriviale Lösung lautet

$$y(x) = \frac{1}{(c \cdot x^{-2} - 4.8 \cdot x^3)^{\frac{1}{4}}} \quad \text{mit } c \cdot x^{-2} - 4.8 \cdot x^3 > 0\ , \quad c \in \mathbb{R}\ .$$

Ü 2.7: $y(x) = \dfrac{x^2}{1+cx}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,, \quad x \neq -\dfrac{1}{c}\,.$

Ü 2.8:

a) Die Lösungen lauten

$$y(x) = 4x + 1 \quad \text{oder} \quad y(x) = 4x + 1 + \frac{3x^4}{c - x^3}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,,\; x^3 \neq c\,.$$

b) $y(1) = 6 \Rightarrow y(x) = 4x + 1 + \dfrac{3x^4}{4 - x^3}\,.$

Ü 2.9: $f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = 0$ mit

$$f(x,y) = 2x \cdot y^4 + \sin y\,, \quad g(x,y) = 4x^2 \cdot y^3 + x \cdot \cos y\,.$$

Wegen $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 8xy^3 + \cos y$ ist die Differentialgleichung exakt.
Mit Satz 2.5 für $x_0 = y_0 = 0$ folgt $u(x,y) = x^2 \cdot y^4 + x \cdot \sin y$.
Die Lösungen lauten also in impliziter Form:

$$x^2 \cdot y^4 + x \cdot \sin y = c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ü 2.10: $f(x,y) = xy^2 - y^3, \quad g(x,y) = 1 - xy^2$. Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = 2 \cdot xy - 2 \cdot y^2 \not\equiv 0$$

ist die Differentialgleichung nicht exakt. Es folgt wegen $\frac{\partial \mu}{\partial x} \equiv 0$:
$\mu'(y) = -\frac{2}{y} \cdot \mu(y)$. Eine Lösung ist $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$.
Nun ist die Differentialgleichung

$$(x - y)\mathrm{d}x + (y^{-2} - x)\mathrm{d}y = 0 \quad \text{exakt.}$$

Die Lösungen lauten nach Satz 2.5:

$$\tfrac{1}{2}x^2 - xy - y^{-1} = c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,,\; y \neq 0\,.$$

Ü 2.11: Für die Umkehrfunktion erhält man die Gleichung $x'(y) = \frac{1}{y} \cdot x(y) + \frac{1}{y^2}$;
deren Lösungen lauten: $x(y) = c \cdot y - \frac{1}{2y}$, $\quad c \in \mathbb{R}$, also $y = -\frac{1}{2x}$
oder $y = \frac{1}{2c} \cdot \left(x \pm \sqrt{x^2 + 2c}\right)$, $\quad c \neq 0$.

Kapitel 3

Ü3.1:

a) f_1 ist Lipschitz-stetig auf R mit $L = 1$,

b) f_2 ist Lipschitz-stetig auf R mit $L = 3$,

c) f_3 ist nicht Lipschitz-stetig auf S ,

d) f_4 ist Lipschitz-stetig auf S mit $L = 2$.

Ü3.2: $a = 3\,, \quad b = 4\,, \quad M = 4$, also $\alpha = 1$.
$x_0 = 1$, also $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] = [0, 2]$.

Ü3.3: Wegen $3x - x^2 - 2 = (x-1) \cdot (2-x) \geq 0$ für $x \in J$ ist $\sin\left(\sqrt{3x - x^2 - 2}\,\right)$ auf J definiert.

a) Wir wählen den Streifen $S = \{1 \leq x \leq 2,\; y \in \mathbb{R}\}$.

Wegen $|\sin\varphi| \leq 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ liegt Lipschitz-Stetigkeit auf S vor mit $L = 1$. Mit Satz 3.3 und Bemerkung (2) folgt die Behauptung.

b) Wir wählen das Rechteck $R = \{1 \leq x \leq 2\,,\; -\frac{3}{4} \leq y \leq \frac{5}{4}\}$.

Es liegt Lipschitz-Stetigkeit auf R vor mit $L = \frac{5}{2}$.
Ferner ist: $x_0 = \frac{3}{2}\,, \; a = \frac{1}{2}\,, \; b = 1\,, \; M = \frac{25}{16}$, also $\alpha = \frac{1}{2}$.
Mit Satz 3.3 folgt die Behauptung.

Ü3.4: $u_0(x) = 1\,, \quad u_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2\,, \quad u_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4$,
$u_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6$.
Die Näherungen sind Partialsummen der Potenzreihen-Entwicklung der exakten Lösung $y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$.

Kapitel 4

Ü4.1:

a) Berechnung nach Methode I:

$y_0(x) \equiv 0$ ist eine Lösung. Unter der Annahme $y(x) \not\equiv 0$ erhält man

$$y(x) = \tfrac{1}{36}x^4 + \tfrac{4}{15}c \cdot x^{\frac{5}{2}} + c^2 \cdot x + \hat{c}\,, \quad c, \hat{c} \in \mathbb{R}\,.$$

b) $y_0(x) \equiv 0\,, \quad \hat{y}(x) = \frac{1}{36}x^4$.

Ü4.2:

a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - e^{-x} + 3$,
b) $y(x) = \ln x + c \cdot x^2 + \hat{c}$, $c, \hat{c} \in \mathbb{R}$.

Ü4.3: $x(y) = \frac{1}{3}y^3 + c_1 y + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $y^2 + c_1 > 0$.

Ü4.4: Berechnung erfolgt nach Methode II:
Mit $z(y) = x'(y)$ erhält man $z'(y) = -(y+1) \cdot z^2(y)$.
Lösung: $z(y) = \frac{1}{\frac{1}{2}y^2+y+c}$. Wegen $z(1) = x'(1) = \frac{1}{2}$ hat man $c = \frac{1}{2}$. Weiter: $x(y) = \int z(y)\mathrm{d}y + \tilde{c} = \frac{-2}{y+1} + \tilde{c}$. Wegen $x(1) = 1$ hat man $\tilde{c} = 2$. Übergang zur Umkehrfunktion liefert $y(x) = \frac{2}{2-x} - 1$.

Ü4.5: Berechnung nach Methode III:

a) $y(x) = -2 \cdot \ln(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x)$, $x < \sqrt{2}$,
b) $y(x) = \sqrt{2x-1}$, $x \geq \frac{1}{2}$.

Ü4.6:

a) $y(x) = c \cdot e^x + \hat{c} \cdot (x+1)$, $c, \hat{c} \in \mathbb{R}$,
b) $\hat{y}(x) = x + 1$.

Ü4.7: Berechnung nach Methode IV:

$$\hat{y}(x) = 2 \cdot \sin^2 x + \sqrt{2} \cdot \sin x \ .$$

Kapitel 5

Ü5.1:

a) $\det W(x) = e^x \cdot \left[(2-x) \cdot \sin x - x \cdot \cos x\right]$.
Da $\det W(x)$ nicht identisch null ist, ist das System linear unabhängig.
b) Das System ist linear abhängig wegen

$$y_3(x) = 3 \cdot y_1(x) - \frac{1}{2} \cdot y_2(x) \ .$$

Ü5.2:

a) $\det W(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also können die Funktionen ein Fundamentalsystem bilden.
b) $\det W(x) = 12 \cdot x^5$. Die Funktionen können ein Fundamentalsystem bilden nur dann, wenn das Intervall I die Null nicht enthält.
c) $\det W(x) = -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also können die Funktionen ein Fundamentalsystem bilden.
d) $y_3(x) = 3 \cdot y_1(x) + \frac{3}{2} \cdot y_2(x)$. Also können die Funktionen niemals ein Fundamentalsystem bilden, da sie linear abhängig sind.
e) $\det W(x) = e^{2x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also können die Funktionen ein Fundamentalsystem bilden.

Ü5.3:

a) Man zeigt durch Einsetzen, dass $y_1(x)$, $y_2(x)$ die homogene Gleichung lösen. Für die Wronski-Determinante gilt: $\det W(x) = 2x(x+1) > 0$ für $x > 0$. Also liegt ein Fundamentalsystem vor.
b) Das Gleichungssystem und seine Lösung lauten:

$$\begin{pmatrix} (x+1)^2 & x^2 \\ 2(x+1) & 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} v_1'(x) = -1 + \dfrac{1}{x+1} , \\ v_2'(x) = 1 + \frac{1}{x} . \end{cases}$$

Integration ergibt

$$v_1 = -x + \ln(x+1) + c_1 \ ; \quad v_2 = x + \ln(x) + c_2 \ ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Also lautet die allgemeine inhomogene Lösung

$$y(x) = (-x + \ln(x+1) + c_1) \cdot (x+1)^2 + (x + \ln(x) + c_2) \cdot x^2 \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Ü5.4:

a) $y_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ sind Lösungen, wie man durch Einsetzen feststellt. Ferner ist $\det W(x) = -9 \neq 0$. Also liegt ein Fundamentalsystem vor.
b) Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & x^3 & \ln x \\ 0 & 3x^2 & x^{-1} \\ 0 & 6x & -x^{-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^{-3} \cdot \ln x \end{pmatrix} .$$

Lösen dieses Systems und anschließendes Integrieren ergibt

$$v_1(x) = \tfrac{1}{9} \cdot (\ln x)^3 - \tfrac{1}{18} \cdot (\ln x)^2 \,,$$
$$v_2(x) = -\frac{3 \cdot \ln x + 1}{81x^3} \,,$$
$$v_3(x) = -\tfrac{1}{6} \cdot (\ln x)^2 \,.$$

Einsetzen in den Ansatz für die Variation der Konstanten liefert eine partikuläre Lösung

$$y^*(x) = -\tfrac{1}{18} \cdot \left[(\ln x)^2 + (\ln x)^3\right] - \tfrac{1}{81} \cdot \left[3 \cdot \ln x + 1\right] \,.$$

Mit Satz 5.6 erhält man schließlich die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 + c_2 \cdot x^3 + c_3 \cdot \ln x - \tfrac{1}{18} \cdot \left[(\ln x)^2 + (\ln x)^3\right] \,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \,.$$

Ü5.5: Die Funktion $y_3(x)$ ist keine Lösung der Differentialgleichung, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_4(x)$ dagegen sind Lösungen.

a) $\det W(x) = -3x^2 \cdot e^x \neq 0$ in I, also liegt ein Fundamentalsystem vor.

b) Es liegt kein Fundamentalsystem vor.

c) $\det W(x) = -2x^2 \cdot e^x \neq 0$ in I, also liegt ein Fundamentalsystem vor.
Die Lösung des Anfangswertproblems ist $y_4(x)$.

Kapitel 6

Ü6.1:

a) $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$,

b) $\{1, x, e^x, x \cdot e^x\}$,

c) $\{e^x, e^{-x}, \cos 2x, \sin 2x\}$,

d) $\{1,\ e^{2x},\ e^x \cdot \cos 2x,\ e^x \cdot \sin 2x\}$.

Ü6.2:

a) $y(x) = 4 \cdot e^x - 2 \cdot e^{2x}$,

b) $y(x) = x \cdot e^{-2x}$,

c) $y(x) = \tfrac{1}{2} \cdot \sin 2x$.

Ü6.3: Die Lösung der homogenen Gleichung ist

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} \,.$$

a) $y(x) = y_h(x) - \tfrac{1}{2}x^2 \cdot e^x$,

b) $y(x) = y_h(x) - \tfrac{1}{100} \cdot (\cos 2x - 7 \sin 2x)$,

c) $y(x) = y_h(x) - \tfrac{1}{2}x^2 \cdot e^x - \tfrac{1}{100} \cdot (\cos 2x - 7 \sin 2x)$.

Ü6.4:

a) Fundamentalsystem: $\{1, x, e^{-x}, \cos x, \sin x\}$.
Ansatz: $y^*(x) = Ax^2 + Be^{2x}$.
Man erhält hieraus $y^*(x) = x^2 + \tfrac{1}{60} \cdot e^{2x}$.

b) Ansatz: $y^*(x) = (A + Bx) \cdot x \cdot e^{-x} + x \cdot (C \cos x + D \sin x)$.

Ü6.5: Fundamentalsystem: $\{e^x, e^{3x}\}$.
Ansatz: $y^*(x) = e^{3x} \cdot (A \cos x + B \sin x)$.
Lösung des Anfangswertproblems:

$$\hat{y}(x) = -\tfrac{1}{10}e^x + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{5}\cos x - \tfrac{1}{5}\sin x\right) \cdot e^{3x} \,.$$

Kapitel 7

Ü7.1: $n = 2:\ \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 + \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$

$(n-1) \to n$:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} + \lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ \vdots & & * & \ddots & \\ 0 & & & & -1 \\ a_0 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$
$$= \lambda \cdot \left[\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1\right] + (-1)^n \cdot (-1)^{n-2} \cdot a_0$$
$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \,.$$

Ü7.2:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^{2x} \cdot \left[c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}\right] \,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Ü7.3:

a) $\vec{y}(x) = c_1 \cdot e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{6x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Auflösen der ersten Gleichung nach $y_2(x)$ und ableiten:

$$y_2 = \tfrac{1}{3}y_1' - y_1 \ , \quad y_2' = \tfrac{1}{3}y_1'' - y_1' \ .$$

Elimination von y_2 aus der zweiten Gleichung ergibt:

$$y_1'' - 8y_1' + 12y_1 = 0 \ .$$

Die allgemeine Lösung: $y_1(x) = c_3 \cdot e^{2x} + c_4 \cdot e^{6x}$.

Berechnung von y_2:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \tfrac{1}{3}(2c_3 \cdot e^{2x} + 6c_4 \cdot e^{6x}) - c_3 \cdot e^{2x} - c_4 \cdot e^{6x} \\ &= -\tfrac{1}{3}c_3 \cdot e^{2x} + c_4 \cdot e^{6x} \ . \end{aligned}$$

Die Lösung ist mit der in a) berechneten identisch.

Ü7.4:

a) $\vec{y}(x) = c_1 e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 e^{8x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{y}_0(x) = e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{8x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ü7.5:

$$\text{Eigenwerte:} \quad \lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = 1 + 2i \ , \quad \lambda_3 = 1 - 2i \ ,$$

$$\text{Eigenvektoren: } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} , \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Hieraus erhält man (vgl. den Text vor Beispiel (9)) mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$\vec{y}(x) = e^x \cdot \left[c_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix} \right] .$$

Ü7.6: Mit dem im Text beschriebenen Eliminationsverfahren erhält man

$$x_1^{(4)} - 14x_1^{(2)} + 45x_1 = 0 \ .$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda_{1,2} = \pm 3 \ , \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{5} \ .$$

Also: $x_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} + c_3 e^{\sqrt{5}t} + c_4 e^{-\sqrt{5}t}$.

Einsetzen liefert

$$x_2(t) = 2 \cdot \left(c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} - c_3 e^{\sqrt{5}t} - c_4 e^{-\sqrt{5}t} \right) .$$

Kapitel 8

Ü8.1:

a) $y(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{240}x^6 + \frac{1}{1680}x^7 + \cdots$

b) $y(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{105}x^7 + \cdots$

Ü8.2: Man erhält $a_n = 1$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
Vermutung: $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $|x| < 1$ gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.
Die Probe ergibt, dass $y(x) = \dfrac{1}{1-x}$ das Anfangswertproblem löst.

Ü8.3: $P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{8} \cdot x^4 - \frac{1}{15} \cdot x^5$, $\quad y(x) = e^{\sin x}$.
Man erhält: $P_5(\frac{1}{2}) = 1.615104 \cdots$, $y(\frac{1}{2}) = 1.615146 \cdots$.

Ü8.4: Das Näherungspolynom 5. Grades lautet

$$P_5(x) = x^2 + \tfrac{1}{12} \cdot x^4 - \tfrac{3}{20} \cdot x^5 \ .$$

Ü8.5: Das Näherungspolynom 6. Grades lautet

$$P_6(x) = 1 + 2(x-1)^2 + \tfrac{1}{12}(x-1)^4 + \tfrac{1}{15}(x-1)^6 \ .$$

Kapitel 9

Ü9.1: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = (c_1 - \tfrac{1}{4}r \cdot x) \cdot \cos\tfrac{x}{2} + c_2 \cdot \sin\tfrac{x}{2}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Die Randbedingungen ergeben: $c_1 = 0,\ r = \frac{2}{\pi},\ c_2 \in \mathbb{R}$.
Also lauten die gesuchten Lösungen:

$$y(x) = -\frac{1}{2\pi}x \cdot \cos\frac{x}{2} + c \cdot \sin\frac{x}{2}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ü9.2:

a) eindeutig lösbar: $y(x) = 2x + 3x^2$,

b) unlösbar,

c) vieldeutig lösbar: $y(x) = cx - 4x^2,\ c \in \mathbb{R}$.

Ü9.3:

$$\det R = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ e & \cos 2 & \sin 2 \end{pmatrix} = 2e - 2\cos 2 - \sin 2 > 0\,.$$

Ü9.4: $y(x) = 4 + 5x - \sin x + \cos x - 2\pi \cdot e^{2(x-\pi)} \cdot \sin x$.

Ü9.5:

$$\begin{aligned} &\lambda > 0: \ \lambda_k = k^2,\ y_k(x) = b(k\cos kx + \sin kx)\,, \quad b \in \mathbb{R}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \\ &\lambda = 0: \ \text{keine Eigenfunktionen}, \\ &\lambda < 0: \ \lambda_0 = -1,\ y_0(x) = b \cdot e^x\,, \quad b \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Ü9.6:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_k &= \tfrac{k^2}{4} \\ y_k(x) &= c \cdot \cos\big(\tfrac{k}{2} \cdot \ln x\big)\,, \ c \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \ k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Kapitel 10

Ü10.1: Alle drei Differentialgleichungen sind linear im Sinne von Definition 10.1.

(3): $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist definit (elliptisch),

(5): $A = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist indefinit (hyperbolisch),

(6): $A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist singulär (parabolisch).

Ü10.2:

a) halblinear,

b) quasilinear,

c) linear.

Ü10.3:

a) elliptisch,

b) parabolisch,

c) hyperbolisch, da $\det A = -98 < 0$ und Spur $A = 4 > 0$ ist,

d) elliptisch für $y > 0$, parabolisch für $y = 0$, hyperbolisch für $y < 0$.

Ü10.4:

Mit der Kettenregel für zwei Variablen erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\varphi, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \cos^2\varphi + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \sin^2\varphi, \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= -r \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \sin\varphi + r \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\varphi, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} &= r^2 \cdot \Big[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \sin^2\varphi - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \cos^2\varphi\Big] \\ &\quad -r \cdot \Big[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\varphi\Big]. \end{aligned}$$

Damit folgt unmittelbar die behauptete Beziehung.

Kapitel 11

Ü11.1:

a) Spezielle Lösung: $u_0(x,y) = x^3 \cdot y$.

b) Zu lösen ist: $\Delta u_h = 0$ mit $u_h(x,y) = xy \cdot (1-x^2)$ auf ∂G.

$$\gamma(\varphi) = \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot (1-\cos^2\varphi) = \tfrac{1}{4} \cdot \sin 2\varphi - \tfrac{1}{8} \cdot \sin 4\varphi.$$

Dies ist bereits die Fourier-Reihe für $\gamma(\varphi)$. Es folgt

$$\begin{aligned} F(r,\varphi) &= \frac{r^2}{4} \cdot \sin 2\varphi - \frac{r^4}{8} \cdot \sin 4\varphi \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot [1 - r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi] . \end{aligned}$$

Also gilt: $u_h(x,y) = \frac{1}{2}x \cdot y \cdot [1 - x^2 + y^2]$. Es folgt

c) $u(x,y) = u_0(x,y) + u_h(x,y) = \frac{1}{2}xy \cdot [1 + x^2 + y^2]$.

Ü11.2: Produktansatz $u(x,y) = F(x) \cdot G(y)$ führt zu

$$F''(x) - K \cdot F(x) = 0, \quad G''(y) + K \cdot G(y) = 0$$

mit $F(0) = G(0) = G(1) = 0$. Die Lösungen lauten:

$$F_n(x) = a_n \cdot \sinh(n\pi x), \quad G_n(y) = b_n \cdot \sin(n\pi y), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Allgemeine Lösung:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sinh(n\pi x) \cdot \sin(n\pi y).$$

Die letzte Randbedingung $u(1,y) = \sin(2\pi y)$ liefert durch Koeffizientenvergleich: $c_2 = (\sinh(2\pi))^{-1}$, $c_n = 0$ sonst.

Lösung:

$$u(x,y) = \frac{\sinh(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)}{\sinh(2\pi)} .$$

Ü11.3: Mit Satz 11.3 folgt: $u(x,t) = x^2 + c^2 \cdot t^2 + x \cdot t$.

Ü11.4: Man erhält mit $\lambda := -c^{-2} \cdot K \neq 0$

a) $-v'' = \lambda \cdot v$, $x \in [0,L]$ mit $v(0) = v(L) = 0$.

Dies ergibt für $j \in \mathbb{N}$: $\lambda_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2$, $v_j(x) = C_j \cdot \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$, $C_j \in \mathbb{R}$.

b) $\ddot{w} = K \cdot w = -\left(\frac{j\pi c}{L}\right)^2 \cdot w$.

Dies ergibt für $j \in \mathbb{N}$: $w_j(t) = A_j \cdot \cos\left(\frac{j\pi ct}{L}\right) + B_j \cdot \sin\left(\frac{j\pi ct}{L}\right)$, $A_j, B_j \in \mathbb{R}$.
Mit $a_j := C_j \cdot A_j$, $b_j := C_j \cdot B_j$ und mit dem Produktansatz erhält man als Lösungen

$$u_j(x,t) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \cdot \left[a_j \cdot \cos\left(\frac{j\pi ct}{L}\right) + b_j \cdot \sin\left(\frac{j\pi ct}{L}\right)\right], \quad j \in \mathbb{N}.$$

Dies ergibt als allgemeine Lösung die Reihe von Satz 11.4, falls diese konvergiert.

Ü11.5: Aus Satz 11.4 folgt mit $c = 2$, $L = 2\pi$

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sin\frac{jx}{2} \cdot \Big(a_j \cdot \cos(jt) + b_j \cdot \sin(jt)\Big),$$

sowie

$$u(x,0) = \sin x = \sum_j a_j \sin\frac{jx}{2}, \qquad \text{also } a_2 = 1,\ a_j = 0 \text{ sonst},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \tfrac{1}{2} \cdot \sin(2x) = \sum_j j b_j \sin\frac{jx}{2}, \qquad \text{also } b_4 = \tfrac{1}{8},\ b_j = 0 \text{ sonst.}$$

Also lautet die Lösung $u(x,t) = \sin x \cdot \cos(2t) + \frac{1}{8}\sin(2x) \cdot \sin(4t)$.

Ü11.6: Mit $a^2 = 2$, $L = 1$, $f(x,t) = 0$, $g(t) = h(t) = 0$ und $F(x) = \sin(3\pi x)$ ergibt sich mit Hilfe von (21), (23) und Satz 11.5 als Lösung

$$u(x,t) = e^{-18\pi^2 \cdot t} \cdot \sin(3\pi x).$$

Ü11.7: Mit $a^2 = 4$, $L = \pi$, $f(x,t) = x + e^t \cdot \sin 2x$, $g(t) = 0$, $h(t) = \pi t$ und $F(x) = 3\sin x - \sin 3x$ ergibt sich mit Hilfe von (21), (23) und Satz 11.5

$$u(x,t) = x \cdot t + 3 \cdot e^{-4t} \cdot \sin x + \frac{e^t - e^{-16t}}{17} \cdot \sin(2x) - e^{-36t} \cdot \sin(3x).$$

Kapitel 12

T12.1		T12.2		T12.3		T12.4	
	(f)		(f)		(r)		(r)
	(f)		(f)		(f)		(r)
	(r)		(r)		(r)		(f)
	(r)		(f)		(f)		(f)

Ü12.1: a) $F(s) = \frac{2}{s^4-1}$, $s > 1$,

b) $F(s) = \frac{2}{(s+2)^3} - \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}$, $s > -2$,

c) $F(s) = (-\frac{1}{1+s^2})' = \frac{2s}{(1+s^2)^2}$, $s > 0$,

d) $F(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{1-e^{-3s}}{1+e^{-3s}}$, $s > 0$.

Ü12.2: a) $f(t) = \frac{2}{5}e^{-3t} + \frac{3}{5}e^{2t}$,

b) $f(t) = \frac{\sin t - t\cos t}{2}$,

c) $f(t) = h(t) + h(t-1) + h(t-2) + \ldots$ (Treppenfunktion),

d) $F'(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}\} - \mathcal{L}\{e^{t}\}$ also $f(t) = \frac{2}{t}\,\sinh t$.

Ü12.3: a) $y(t) = \frac{1}{6}\,e^{-5t} + \frac{5}{6}\,e^{t}$,

b) $y(t) = \frac{1}{6}\,e^{t} + \frac{3}{2}\,e^{-t} - \frac{2}{3}\,e^{-2t}$.

Ü12.4:

$$y_1(t) = -\frac{3}{4}\,e^{-t} + \frac{11}{6}\,e^{-2t} - \frac{25}{12}\,e^{t} ,$$

$$y_2(t) = e^{-t} - \frac{11}{6}\,e^{-2t} + \frac{5}{6}\,e^{t} .$$

Ü12.5: Nach der Transformation ergibt sich die Differentialgleichung

$$Y'(s)(s^2+2s+1) + Y(s)(4s+4) = 3c_1 ,$$

mit der Lösung $Y(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^4}$. Daraus folgt

$$y(t) = c_1\,e^{-t} + \frac{c_2}{6}\,t^3\,e^{-t} .$$

Kapitel 13

T13.1		T13.2		T13.3		T13.4	
	(f)		(r)		(r)		(r)
	(f)		(f)		(r)		(f)
	(r)		(r)		(f)		(f)
	(r)		(f)		(f)		(r)
			(r)				

Ü13.1: a) Winkelraum im ersten Quadranten zwischen der Winkelhalbierenden und der imaginären Achse,

b) Kreisring mit Mittelpunkt $z_0 = i$ und Radien 3 und 4 einschließlich der Kreislinien,

c) imaginäre Achse,

d) die komplexe Ebene, aus der die abgeschlossene Kreisscheibe um $z_0 = -1 + i$ mit Radius $\sqrt{2}$ herausgenommen wurde.

Ü13.2: $z(t) = 1 + i + e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$,
$z(\pi/4)$ hat den maximalen Abstand $\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

Ü13.3: Schnittpunkte: $s_1 = -1$, $s_2 = i$,
Schnittwinkel: $\varphi_1 = \frac{3}{\pi}$, $\varphi_2 = \frac{5}{\pi} - \arctan\frac{1}{2}$.

Ü13.4: a) divergent,

b) konvergent gegen 0,

c) konvergent gegen 1,

d) konvergent gegen i.

Ü13.5: a) divergent,

b) konvergent gegen $-i$,

c) für $\mathrm{Re}\, z < 0$ konvergent gegen $\frac{1-z}{2}$,

d) für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent gegen e^{-z^2} ,

e) für $|z| > 1$ konvergent gegen $\dfrac{4+3i}{5z-(4+3i)}$,

f) für $|z| < 2$ konvergent.

Kapitel 14

T14.1		T14.2		T14.3		T14.4		T14.5	
	(f)		(r)		(f)		(r)		(f)
	(f)		(f)		(r)		(f)		(r)
	(r)		(r)		(f)		(f)		(r)
	(r)		(r)		(f)		(r)		