Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 25.06.2012

# 10. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“ Lösung

**Aufgabe 1:** In einem Gefäß wird eine bestimmte Krebsart gezüchtet, die sich von Bakterien ernährt. Zur Fütterung wird pro Sekunde eine gewisse Menge $a > 0$ an Bakterien in das Gefäß gegeben. Die Krebse fressen die Bakterien mit einer Rate, die proportional zum Quadrat der momentan vorhandenen Bakterienanzahl $x(t)$ ist.

a) Modellieren Sie die Entwicklung der Bakterienanzahl $x(t)$ mit Hilfe einer Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der aufgestellten DGl.

c) Bestimmen Sie das Langzeitverhalten $\lim_{t\to\infty} x(t)$ der Bakterien.

Lösung:

a) Gehen wir davon aus, dass in einem hinreichend kleinen Zeitintervall die Länge $\tau$ die Änderung der Bakterienpopulation annähernd linear verläuft, erhalten wir als Differenzengleichung

$$x(t+\tau) - x(t) = -\tau a x(t)^2 + \tau b$$

mit dem Proportionalitätsfaktor $a \in \mathbb{R}^+$ und der konstanten Zuwachsrate $b \in \mathbb{R}^+$. Umstellen und Grenzübergang liefert

$$x'(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0} -ax(t)^2 + b = -ax(t)^2 + b$$

$\boxed{1}$

b) Wir setzen $\mu := \sqrt{\frac{b}{a}}$. Dann erkennen wir zunächst einmal, dass $x(t) = \mu$ wegen $-a\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + b = 0$ eine Lösung der DGL ist. Nun ist die rechte Seite der DGL $-ax(t)^2 + b$ sowohl in $t$ und in $x$ stetig, als auch in $y$ Lipschitz-stetig, somit ist nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine Lösung durch einen beliebigen Punkt $(t_0, x(t_0))$ eindeutig, was für die Lösungen, die nicht die konstante Lösung $x(t) = \mu$ sind, entweder $x(t) > \mu$ oder $x(t) < \mu$ für alle $t$ impliziert (Gleiches gilt für $x(t) = -\mu$).

Dies werden im Folgendem aufgreifen. Wir bestimmen nun die weiteren Lösungen der DGL (also die für $y(t_0) \neq \pm\mu$).

Wir haben eine DGL, die sich mit der Methode der Trennung der Variablen lösen lässt. Es ist $x'(t) = \varphi(x(t)) \cdot \psi(t)$ mit z. B. $\varphi(x(t)) = x(t)^2 - \frac{b}{a}$ und $\psi(t) = -a$. So können wir (für den Fall $\varphi(x(t)) \neq 0$) lösen mit der Umformung $x'(t) = \varphi(x(t)) \cdot \psi(t) \Leftrightarrow \int \frac{1}{\varphi(z)} \,\mathrm{d}z = \int \psi(t) \,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned} & x'(t) = \left(x^2 - \frac{b}{a}\right) \cdot (-a) \\ \Leftrightarrow \quad & x'(t) = \left(x(t)^2 - y^2\right) \cdot (-a) \\ \underset{x(t)\neq\pm\mu}{\Leftrightarrow} \quad & \int^t \frac{x(\tau)}{x(t)^2 - \mu^2} \,\mathrm{d}\tau = \int^t -a \,\mathrm{d}\tau \\ \Leftrightarrow \quad & \int^{x(t)} \frac{1}{z^2 - \mu^2} \,\mathrm{d}z = \int^t -a \,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

An dieer Stelle erhalten wir Lösungen der DGL, wenn wir das Integral über $\frac{1}{z^2-\mu^2}$ bestimmen. Hierfür führen wir eine Partialbruchzerlegung durch. Es ist

$$\frac{1}{z^2 - \mu^2} = \frac{1}{(z-\mu)(z+\mu)} = \frac{A}{z-\mu} + \frac{B}{z+\mu} = \frac{A(z+\mu) + B(z-\mu)}{(z-\mu)(z+\mu)} \,.$$

Damit $A(z+\mu) + B(z-\mu) = (A+B)z + \mu(A-B) = 1$ für alle $z$ ist, muss

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \mu(A - B) = 1 \end{cases}$$

erfüllt sein, also $B = -A$ und $\mu 2A = 1$ gelten, somit $A = \frac{1}{2\mu}$ und $B = -\frac{2}{2\mu}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int^{x(t)} \frac{1}{z^2 - \mu^2} \,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\mu} \int^{x(t)} \frac{1}{z-\mu} - \frac{1}{z+\mu} \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\mu} \left(\log|x(t) - \mu| - \log|x(t) + \mu|\right) + \hat{c} \\ &= \frac{1}{2\mu} \log\left|\frac{x(t) - \mu}{x(t) + \mu}\right| + \hat{c} \,. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} & x'(t) = -ax(t)^2 + b \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2\mu} \log\left|\frac{x(t) - \mu}{x(t) + \mu}\right| = -at + \tilde{c} \\ \Leftrightarrow \quad & \left|\frac{x(t) - \mu}{x(t) + \mu}\right| = \mathrm{e}^{-2(\mu a t + c)} \end{aligned}$$

Da nun für eine Lösung stets $x(t) > \mu$ oder $x(t) < \mu$ gilt, ist nun entweder $\left|\frac{x(t)-\mu}{x(t)+\mu}\right| = \mathrm{e}^{-2(\mu a t+c)}$ oder $\left|\frac{x(t)-\mu}{x(t)+\mu}\right| = -\mathrm{e}^{-2(\mu a t+c)}$ für eine Lösung erfüllt. Setzen wir $\eta := \mathrm{e}^{-2(\mu a t+c)}$, dann können wir leicht weiter umformen zu

$$\begin{aligned} & \frac{x(t)-\mu}{x(t)+\mu} = \pm\eta \\ \Leftrightarrow\quad & x(t)-\mu = \pm(x(t)+\mu) \\ \Leftrightarrow\quad & (1\mp\eta)x(t) = (1\pm\eta)\mu \\ \Leftrightarrow\quad & x(t) = \frac{1\pm\eta}{1\mp\eta}\cdot\mu\,. \end{aligned}$$

Also sind

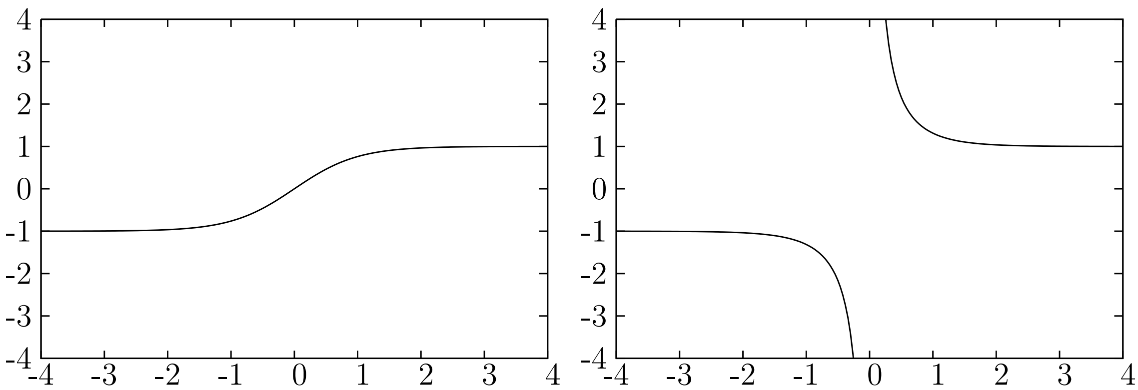
$$x(t) = \frac{1+\mathrm{e}^{-2(\mu a t+c)}}{1-\mathrm{e}^{-2(\mu a t+c)}}\cdot\mu \qquad \text{und} \qquad x(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2(\mu a t+c)}}{1+\mathrm{e}^{-2(\mu a t+c)}}\cdot\mu$$

Lösungen der DGL. Mit $\tanh(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ und $\coth(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}-1}$ folgt schließlich

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \\ x(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\tanh(\sqrt{ab}t+c) & \text{mit } x(t) < \frac{b}{a} \text{ für alle } t \\ x(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\coth(\sqrt{ab}t+c) & \text{mit } x(t) > \frac{b}{a} \text{ für alle } t \end{cases}$$

als Lösungsmenge der DGL.

Die Graphen von Tangens Hyperbolicus (links) und Areatangens Hyperbolicus (rechts) verlaufen, wie folgend zu sehen:




$\boxed{1}$

c) Die Bakterien befinden sich entweder schon im Gleichgewicht $\sqrt{\frac{a}{b}}$ oder sie streben diesem für $x(0) > \sqrt{\frac{a}{b}}$ von oben, für $x(t) < \sqrt{\frac{a}{b}}$ von unten zu:

Es ist $\lim_{x\to\infty}\tanh(x) = 1$ und mit $\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$ folgt insgesamt $\lim_{t\to\infty} x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}}$. $\boxed{1}$

**Aufgabe 2:** Sie kennen das Phänomen, dass eine Kette, die zu weit von einem Tisch herunterhängt anfängt zu rutschen und mit wachsender Geschwindigkeit vom Tisch herunterrutscht. Dieses Herunterrutschen soll modelliert werden. Wir treffen dazu folgende Annahmen:
Die Kette hat die Länge $L > 0$. Die Masse der Kette verteilt sich gleichmäßig über die gesamte Kette, dabei gibt $\rho > 0$ die Masse der Kette pro Längeneinheit an.
Auf die Kette wirken zwei Kräfte: Die *Gewichtskraft* des herunter hängenden Teils der Kette zieht die Kette in Richtung Tischkante und die *Reibungskraft* des auf dem Tisch liegenden Teils der Kette zieht die Kette in die andere Richtung.
Die Gewichtskraft wird modelliert durch $F_G = Mg$, wobei $M$ die Masse des Teil der Kette ist, das schon vom Tisch herunterhängt. Mit $g$ bezeichnen wir die Erdbeschleunigung.
Die Reibungskraft soll mit dem Modell der Gleitreibung modelliert werden, d.h. $F_R = -\mu_R \bar{M} g$, dabei ist $\mu_R$ der Gleitreibungskoeffizient, der nur von den Materialeigenschaften des Tischs und der Kette abhängt und $\bar{M}$ die Masse des Teils der Kette, der noch auf dem Tisch liegt. Das Vorzeichen berücksichtigt die Richtung der Kraft.
Diese Modellierung lässt sich anwenden, wenn sich die Kette bewegt, bzw. sich gerade in Bewegung setzt.

a) Modellieren Sie ausgehend vom 2. Newtonschen Axiom $F = ma$ diesen Sachverhalt mit Hilfe einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Erläutern Sie die Wahl ihres Koordinatensystems mit Hilfe einer Zeichnung.

b) Lösen Sie die entstandene Differentialgleichung.

Lösung:

a) Sei $x(t)$ die Entfernung der herunterhängenden Kettenspitze zur Tischkante zum Zeitpunkt $t$. Wir haben es mit drei verschiedenen Massen in der Modellierung zu tun:

   $M = x(t) \cdot \rho$, der Masse des herunterhängenden Teils der Kette,
   $\bar{M} = (L - x(t)) \cdot \rho$, der Masse des noch auf dem Tisch befindlichen Teils der Kette,
   $M + \bar{M} = L \cdot \rho$ der Gesamtmasse der Kette.

   Nun können wir das Szenario so modellieren, dass wir die Kette als einen Massenpunkt an der Stelle $0 \leq x(t) \leq L$ ansehen, auf die in Bewegungsrichtung zwei Kräfte einwirken, die Gewichtskraft und die Reibungskraft. Die Gewichtskraft, welche die Kette vom Tisch zieht wirkt ja ohnehin schon in Bewegungsrichtung. Die Reibungskraft, welche die Kette auf dem Tisch hält wirkt zwar quer zur Bewegungsrichtung, wir können aber von einer verlustfreien Umlenkung in Bewegungsrichtung ausgehen. Da diese Kraft nun der Gewichtskraft entgegen wirkt, hat ihr Wert in Bewegungsrichtung umgekehrtes Vorzeichen. Für die Gewichtskraft gilt nun

   $$F_G = Mg = x(t)\rho g \,,$$

   für die Reibungskraft

   $$F_R = -\mu_R \bar{M} g = -\mu_R (L - x(t))\rho g = \mu_R \rho g \, x(t) - \mu_R L \rho g \,.$$

Die Kraft, die insgesamt auf die Kette einwirkt ist somit die Summe der beiden einwirkenden Kräfte

$$F = F_G + F_R\,.$$

Wirkt auf die Kette nun eine Kraft ein, wird diese proportional dazu über den Zusammenhang „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung" beeinflusst. So erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} & F = F_G + F_R \\ \Leftrightarrow\quad & (M + \bar{M})x''(t) = x(t)\rho g + \mu_R\,\rho g\,x(t) - \mu_R\,L\rho g \\ \Leftrightarrow\quad & L\rho\,x''(t) = \rho g(1+\mu_r)x(t) - \mu_R\,L\rho g \\ \Leftrightarrow\quad & x''(t) = \frac{1+\mu_R}{L}\cdot g\,x(t) - \mu_R\,g\,, \end{aligned}$$

eine inhomogene DGL zweiter Ordnung. Aus dem Sachzusammehang ist es wichtig zu erwähnen, dass Lösungen der DGL das Szenario der herunterrutschenden Kette nur dann korrekt modellieren, solange unsere Grundannahmen erfüllt sind:

$0 \le x(t) < L\ \forall t$, die Kette ist noch nicht vom Tisch gefallen.

$x'(t) > 0\ \forall t$, die Kette ist noch in Bewegung und nicht zum Stillstand gekommen (Sonst wäre $F_R$ nicht mehr korrekt modelliert!).

So erhalten wir das AWP

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{1+\mu_R}{L}\cdot g\,x(t) - \mu_R\,g \\ x'(0) = v(0) = v_0 > 0, x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

dessen Lösung für $t \in [0,\tilde{t})$ und $\tilde{t} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ mit $x(\tilde{t}) = L$ (die Kette ist vom Tisch gefallen) oder $x'(\tilde{t}) = 0$ (die Kette ist zum Erliegen gekommen) gegeben sind. $\boxed{2}$

b) Wir lösen nun das AWP:
Die DGL ist linear in $x(t)$, so bestimmen wir zunächst die Lösungsmenge des homogenen Problems

$$x_h''(t) = \frac{1+\mu_R}{L}\cdot g\,x_h(t)\,.$$

Der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ liefert nach zweimaligem Ableiten und Einsetzen in die DGL

$$\lambda^2 = \frac{1+\mu_R}{L}\,,$$

also $\lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_R)}$. So gilt

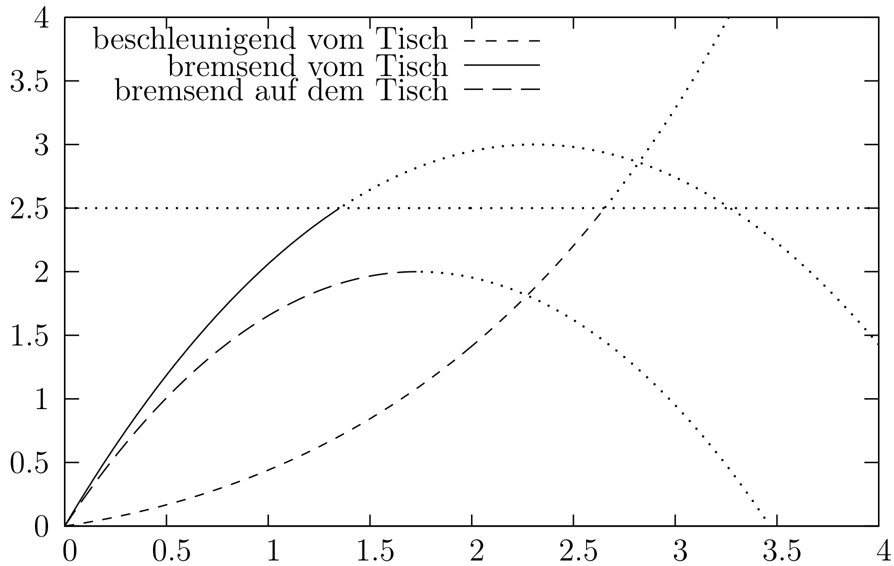
$$x_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_R)}\cdot t} + c_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_R)}\cdot t} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

In Anbetracht des konstanten Störterms in der DGL $x''(t) = \frac{1+\mu_R}{L}\cdot g\,x(t) - \mu_R\,g$ erwarten wir es, eine konstante partikuläre Lösung zu finden. Setzen wir $x_p(t) = k$ an, erfüllt dieses $k$ die DGL genau dann, wenn $0 = \frac{1+\mu_R}{L}\cdot k - \mu_R\,g$ gilt, also für $x_p(t) = k = Lg\cdot\frac{\mu_R}{1+\mu_R}$.

Erfüllt $x_h$ die homogene DGL $x''(t) = \frac{1+\mu_R}{L} \cdot g\,x(t)$ und $x_p$ erfüllt die DGL $x''(t) = \frac{1+\mu_R}{L} \cdot g\,x(t) - \mu_R\,g$, so erfüllt wegen der Linearität auch die allgemeine Lösung $x_{all}(t) = x_h(t) + x_p(t)$ die DGL und wir erhalten für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die gesamte Lösungsmenge

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_R)}\cdot t} + c_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu_R)}\cdot t} + Lg \cdot \frac{\mu_R}{1+\mu_R}\,.$$

In Abhängigkeit der Parameter $L, \mu_R$ und der Startwerte $v_0, x_0$ ergeben sich nun Lösungen des AWP für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Bei positivem $c_1$ wird die Kette stets weiter beschleunigend vom Tisch rutschen, bei negativem $c_1$ ist die Reibungskraft stets größer als die Gewichtskraft, die Anfangsgeschwindigkeit wird abgebaut, entweder bevor die Kette vom Tisch gerutscht ist, dann bleibt diese dort liegen, oder die Kette fällt vom Tisch, noch bevor dies passiert. Typische Verläufe wären somit:




$\boxed{1}$

**Aufgabe 3:** Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(at + by + c)\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{mit } b \neq 0\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $z(t) = at + by(t) + c$ eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen erfüllt.

b) Lösen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe a) die Differentialgleichungen

   i) $y' = (t + y)^2$,

   ii) $y' = (t - y)^2$ in dem Streifen $-1 < t - y < 1$. Skizzieren Sie den angegebenen Bereich.

Lösung:

a) Wir setzen $z(t) = at + by(t) + c$ an, wobei $y(t)$ die (bis dato unbekannte) Lösung der DGL $y'(t) = f(at + by(t) + c)$ ist. Nun leiten wir $z$ nach $t$ zu $z'(t) = t + by'(t)$ ab. Da $y$ die DGL löst, können wir für $y'$ die rechte Seite der DGL einsetzen und erhalten

$$z'(t) = t + bf(at + by(t) + c) = t + b(f(t)\,.$$

Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen. Diese können wir lösen, erhalten so $z(t)$ und damit wegen $y(t) = \frac{1}{b}(z(t) - at - c)$ auch die Lösung der DGL $y'(t) = f(at + by(t) + c)$. $\boxed{2}$

b) i) Wir substituieren $z(t) := t + y(t)$. Über die Ableitung $z'(t) = 1 + y'(t) = 1 + (t + y(t))^2 = 1 + z(t)^2$ führt dies auf

$$\frac{z'(t)}{1 + z(t)^2} = 1$$

und damit auf

$$\int^{z(t)} \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \int^{t} \mathrm{d}\tau$$

also

$$\arctan z(t) = t + c$$

und wir erhalten

$$t + y(t) = z(t) = \tan(t + c)$$

ferner

$$y(t) = \tan(t + c) - t \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

$\boxed{1}$

ii) Wir substituieren $z(t) := t - y(t)$. Über die Ableitung $z'(t) = 1 - y'(t) = 1 - (t - y(t))^2 = 1 - z(t)^2$ führt dies auf

$$\frac{z'(t)}{1 - z(t)^2} = 1$$

und damit auf

$$\int^{z(t)} \frac{1}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int^{t} \mathrm{d}\tau\,.$$

Hier können wir entweder wissen (oder nachschlagen), dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{artanh}(x) = \frac{1}{1-x^2} + c$ für $|x| < 1$ gilt, oder wir berechnen über den Umweg einer Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2} &= \frac{A}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{1-x^2} \\ &= \frac{(A+B) + (A-B)x}{1-x^2} \underset{A=B=\frac{1}{2}}{=} \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\end{aligned}$$

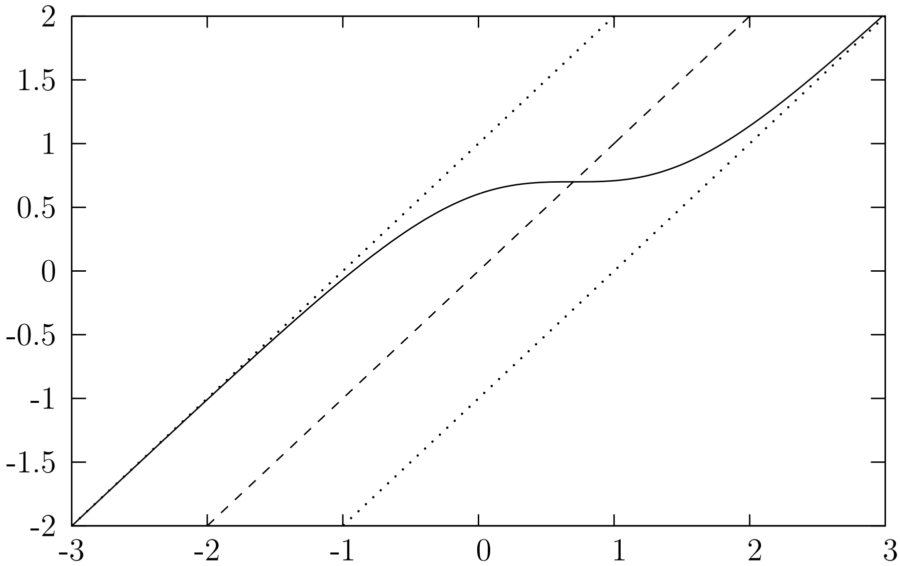
damit das Integral

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\left(-\log|1-x| + \log|1+x|\right) + c \\ &= \frac{1}{2}\cdot\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \underset{x\in(-1,1)}{+} c = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + c\,.\end{aligned}$$

Spätestens hier ist es dann günstig, die Identität $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ zu kennen, damit können wir unsere DGL einfach lösen zu

$$\begin{aligned}& z'(t) = 1 - y'(t) \\ \Leftrightarrow\quad & \int^{z(t)} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int^{t} \mathrm{d}\tau \\ \Leftrightarrow\quad & \operatorname{artan}(z(t)) = t + c \\ \Leftrightarrow\quad & z(t) = t - y(t) = \tanh(t+c) \\ \Leftrightarrow\quad & y(t) = t - \tanh(t+c)\,,\end{aligned}$$

wobei wir für obige Umformung angenommen haben, dass $-1 < z(t) < 1$ also $-1 < t - y(t) < 1$ für alle $t$ gilt. Nun ist $(t, y) \mapsto (t-y)^2$ stetig in $t$ und $y$, auf jedem kompakten Intervall Lipschitz-stetig in $y$, nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist die ermittelte Lösung eindeutig. Gilt nun für den Anfangswert $-1 < t_0 - y_0 < 1$, so können wir aus $t - y(t) = \tanh(t+c)$ wegen $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ersehen, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ dann auch $-1 < t - y(t) < 1$ gilt, der Graph von $y$ somit im Streifen der Höhe 2 um die Identität herum „lebt“.




$\boxed{1}$

**Aufgabe 4:** (Satz von Picard-Lindelöf)

a) Betrachten Sie das AWP

$$\begin{cases} y' = t \cdot y \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Wir hatten im Beweis zum Satz von Picard-Lindelöf gesehen; sind die notwendigen Bedingungen des Satzes erfüllt, konvergiert jede Funkton $\varphi$ in einem Rechteck um $t_0$, $y_0$ gegen die Lösung $y$ des AWP, die dann lokal eindeutig ist.

i) Lösen Sie das AWP.

ii) Argumentieren Sie dann mit dem Satz, für welche $t$ die Lösung $y(t)$ eindeutig ist.

iii) Dann starten Sie mit der Funtion $y^0(t) = 1$ und bilden Sie diese mit der Kontraktion $\Phi$ (wie in der Vorlesung definiert) auf die Funktion $y^1$ ab. Iterieren Sie dieses Vorgehen, um $y^2$ und $y^3$ zu erhalten. Sie erhalten eine Approximation der exakten Lösung. Vergleichen Sie Approximation und Lösung.

b) Betrachten Sie das AWP

$$\begin{cases} y' = \sin\left(\sqrt{3t - t^2 - 2}\right) \cdot y^2 \\ y(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}\,. \end{cases}$$

Für welche $b$ (Bezeichner wie im Beweis des Satzes) erhalten wir Rechtecke $[1, 2] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, sodass $a = \alpha$ gilt? Auf welchem Intervall ist dann die Lösung des AWP nach einmaliger Argumentation mittels des Banachschen Fixpunktsatzes eindeutig? Existiert die Lösung auf ganz $[1, 2]$ und ist dort eindeutig?

Lösung:

a) i) Unter Trennung der Variablen erhalten wir $\log|y(t)| = \frac{1}{2}t^2 + c$ und somit $|y(t)| = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2 + c}$ und mit $y(t) = 1$ dann $c = 0$, also $|y(t)| = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}$. Da $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} \neq 0\ \forall t$ und wir nur stetige Lösungen erwarten, kann nur $y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}$ als Lösung der DGL gelten.

ii) Weiterhin ist die rechte Seite $t \cdot y$ der Differentialgleichung stetig in $t$ und in $y$, als auch wegen

$$\begin{aligned} & |t \cdot y - t \cdot \tilde{y}| \leq L \cdot |y - \tilde{y}| \\ \Leftrightarrow\quad & |t| \cdot |y - \tilde{y}| \leq L \cdot |y - \tilde{y}| \\ \Leftrightarrow\quad & |t| \leq L \vee y = \tilde{y} \end{aligned}$$

für alle $t \in [-L, L]$ Lipschitz-stetig in $y$ mit der Lipschitz-Kontanten $L$. Aus diesem Grund ist die Lösung in jedem Intervall $[-L, L]$ mit $L \in \mathbb{R}$ existierend und eindeutig, ergo existiert sie eindeutig auf ganz $\mathbb{R}$.

iii) Wir bilden mit der Kontraktion $\Phi$ die Funktion $y$ auf die Funktion $\Phi(y)$ ab. Fuhren wir dies iterativ durch, erhalten wir stets $y^k \mapsto \Phi(y^i) =: y^{k+1}$ und wissen wegen des Satzes, dass $y^k$ für $k \to \infty$ gegen die eindeutige Lösung konvergiert, jedes $y^k$ somit eine Approximation an die Grenzfunktion ist. Verwenden wir die Abbildungsvorschrift von $\Phi$ wie im Satz definiert, können wir mit

$$y^{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^k(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

bei $y^0$ beginnend, sukzessive alle $y^k$ bestimmen. Dieses Vorgehen mittels $\Phi$ die Lösung zu approximieren nennt sich Picard-Iteration.

Für alle Schritte sind $y_0 = 1$, $t_0 = 0$, $f(t,y) = t \cdot y$. Starten wir nun mit $y^0(t) = 1$,

Es ist

$$\begin{aligned}
y^1(t) = \Phi(y^0)(t) &= 1 + \int_0^t \tau \cdot 1\,\mathrm{d}\tau = 1 + \frac{1}{2}t^2\,, \\
y^2(t) = \Phi(y^1)(t) &= 1 + \int_0^t \tau\left(1 + \frac{1}{2}\tau^2\right)\mathrm{d}\tau \\
&= 1 + \int_0^t \tau + \frac{1}{2}\tau^3\,\mathrm{d}\tau \\
&= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4\,, \\
y^3(t) = \Phi(y^2)(t) &= 1 + \int_0^t \tau\left(1 + \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{8}\tau^4\right)\mathrm{d}\tau \\
&= 1 + \int_0^t \tau + \frac{1}{2}\tau^3 + \frac{1}{8}\tau^5\,\mathrm{d}\tau \\
&= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{48}t^6\,,
\end{aligned}$$

und mit dieser Rechnung liegt der Schluss nahe, dass

$$y^k(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\left(\frac{1}{2}t^2\right)^i}{i!}$$

gilt. $y^k$ besteht somit aus den ersten $k$ Summanden der Reihenentwicklung von $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}$ mit $y^k(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y(t)$, der exakten Lösung der DGL.

$\boxed{2}$

b) Zunächst einmal stellen wir fest, dass wegen $3t - t^2 - 2 \geq 0$ für $t \in [1,2]$ somit $y'(t) = \sin(\sqrt{3t - t^2 - 2}) \cdot y(t)^2$ wohldefiniert ist.

Nun suchen wir nach einer möglichst kleinen oberen Schranke für $y'$ für alle $t, y$ auf dem Rechteck $[1,2] \times [\frac{3}{2} - b, \frac{3}{2} + b] = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ mit $t_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{2}$. Wir können $|\sin(\sqrt{3t - t^2 - 2})|$ durch Eins abschätzen, so bleibt $|y'(t)| \leq y(t)^2$ und nun können wir als obere Schranke

$$M := (y_0 + b)^2 = \left(\frac{1}{4} + b\right)^2$$

ansetzen. Ist nun $M$ zu groß, verschmälert sich die Breite des Rechtecks auf $R := [t_0 - \frac{b}{M}, t_0 + \frac{b}{M}]$ für dessen Elemente $t = t_0 + \tau \in R$ wir mit

$$y_0 - \tau \cdot M < y(t) = y(t_0 + \tau) < y_0 + \tau \cdot M$$

die Lösung abzuschätzen imstande sind.

Damit also $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = a = \frac{1}{2}$ gilt, unsere Abschätzung für $t \in [1,2]$ gilt, muss $\frac{b}{M} \geq a$ somit $2b \geq M$ sein. Wir formen um

$$\begin{aligned} & 2b \geq \left(\frac{1}{4} + b\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & b^2 + \frac{1}{2}b - 2b + \frac{1}{16} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & b^2 - \frac{3}{2}b + \frac{1}{16} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & b \in \left[\frac{3 - \sqrt{8}}{4}, \frac{3 + \sqrt{8}}{4}\right] \end{aligned}$$

und können somit aus $b \in \left[\frac{3-\sqrt{8}}{4}, \frac{3+\sqrt{8}}{4}\right]$, also z. B. für $b = 1$, somit $M = \left(\frac{1}{4} + 1\right)^2 = \frac{25}{16}$ eine Abschätzung der Lösung auf $[1,2]$ angeben mit

$$\frac{1}{4} - \tau \cdot \frac{25}{16} = \frac{1}{4} - \tau \cdot M \leq y(t) = y\left(\frac{3}{2} + \tau\right) \leq \frac{1}{4} + \tau \cdot M = \frac{1}{4} + \tau \cdot \frac{25}{16}.$$

$\boxed{2}$