Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 02.07.2012

11. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“ Lösung

Aufgabe 1: Eine Flüssigkeit in einem großen Becken hat eine Temperatur von 100 Grad Celsius, während die Außenluft eine Temperatur von 20 Grad Celsius hat. Durch die naürliche Abkühlung sinkt die Temperatur im Becken pro Minute um 1 Prozent der Differenz zwischen Becken- und Außentemperatur. Durch eine Kühlanlage sinkt die Temperatur im Becken pro Minute zusätzlich um 2 Grad Celsius. Für $t \geq 0$ gebe $u(t)$ die Temperatur im Becken in Grad Celsius nach t Minuten an.

a) Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenz $u(t+\tau)-u(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $u(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u näherungsweise die Differentialgleichung $u'(t) = -\frac{1}{100}u(t) - \frac{9}{5}$, $t \geq 0$, erfüllt.

b) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, indem Sie die Differentialgleichung aus Teil a) lösen.

c) Skizzieren und beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur im Becken. Wie lange dauert es, bis die Temperatur im Becken 40 Grad Celsius betägt?

Lösung:

a) Unter der vereinfachten Annahme, dass der Temperaturverlauf in kleinen Zeitintervallen ist, erhalten wir

$$u(t+1) - u(t) = -\frac{1}{100} \cdot (u(t) - 20) - 2\,.$$

Für kleinere Zeitintervalle der Länge τ ergibt sich anteilig

$$u(t+\tau) - \tau \cdot \left(-\frac{1}{100}\right) \cdot (u(t) - 20) - \tau \cdot 2\,,$$

wobei nun mit keiner werdendem τ der mit der Vereinfachung gemachte Fehler immer kleiner wird, bis er im Grenzübergang $\tau \to \infty$ ganz verschwindet. So ergibt sich

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \lim_{\tau\to\infty} \frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau} \\
&= -\frac{1}{100}\cdot u(t) + \frac{1}{5} - 2 \\
&= -\frac{1}{100}\cdot u(t) - \frac{9}{5} \\
&= -\frac{1}{100}\cdot (u(t)+180)\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{1}$

b) Für das homogene Problem $u_h'(t) = -\frac{1}{100}\cdot u(t)$ sind die Lösungen durch

$$u_h(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{100}t}\ .$$

gegeben. Wenn wir nun $u'(t) = -\frac{1}{100}\cdot(u(t)+180)$ betrachten, können wir leicht sehen, dass $u_p(t) = -180$ eine partikuläre Lösung ist, denn es gilt sowohl $u_p''(t) = 0$ als auch $-\frac{1}{100}\cdot(-180+180) = 0$. Somit erhalten wir als allgemeine Lösung

$$u_{all}(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{100}\cdot t} - 180\,,$$

unter Berücksichtigung des Anfangswertes $u(0) = 100$ folgt so, dass

$$\begin{aligned}
u(t) &= (100+180)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{100}t} - 180 \\
&= 280\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{100}t} - 180
\end{aligned}$$

das AWP

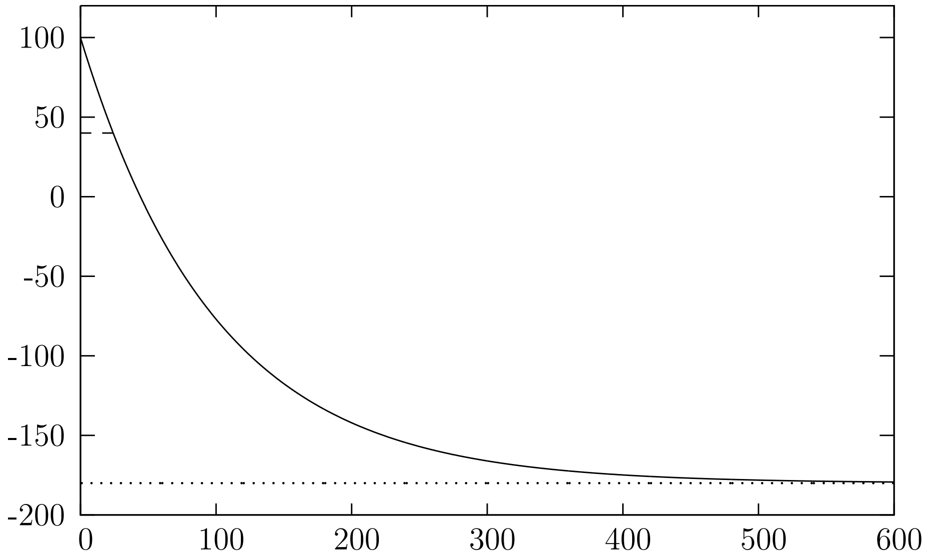
$$\begin{cases} u'(t) = -\frac{1}{100}\cdot u(t) - \frac{9}{5} \\ u(0) = 100 \end{cases}$$

löst. $\boxed{1}$

c) Aus

$$\begin{aligned}
40 = u(t) \quad &\Leftrightarrow \quad 220 = 280\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{100}t} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{14}{11} = \mathrm{e}^{\frac{1}{100}t} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{100}\cdot t = \log\left(\frac{14}{11}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad t = 100\cdot\log\left(\frac{14}{11}\right) \approx 24{,}12
\end{aligned}$$

können wir nun sagen, dass die Temperatur der Flüssigkeit nach etwas über 24 Minuten auf 40 Grad Celsius gefallen ist.



$\boxed{1}$

Aufgabe 2: Es sei bekannt, dass sich eine Population y von Bakterien näherungsweise gemäß der Differentialgleichung $y' = 3 \cdot y - a \cdot y^2$ entwickelt, wobei $y(t)$ die Anzahl der Individuen der Population zur Zeit $t \geq 0$, gemessen in Stunden, angibt. Die Konstante $a > 0$ sei zunächst nicht bekannt. An einem Tag wurde festgestellt, dass die Population um 13 Uhr aus 200 Individuen und um 14 Uhr aus 250 Individuen bestand.

a) Interpretieren Sie die beiden Terme $3 \cdot y$ und $-a \cdot y^2$ im Hinblick auf die berücksichtigten Prozesse.

b) Bestimmen Sie die Konstante $a > 0$ durch Lösen der Differentialgleichung unter Verwendung einer geeigneten Anfangsbedingung.

Lösung:

a) $\boxed{1}$

b) Sei $y(t)$ die Anzahl der Individuen zur Zeit $t \geq 0$ in Stunden nach 13 Uhr, dann gilt $y(0) = 200$ und $y(1) = 250$.

Zum Lösen substituieren wir $z(t) = y(t)^{1-2} = \frac{1}{y(t)}$. Dann kennen wir $z(0) = \frac{1}{y(0)} = \frac{1}{200}$ und $z(1) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{250}$. Ableiten von z führt auf eine inhomogen lineare DGL:

$$\begin{aligned} z'(t) = -\frac{1}{y(t)^2} \cdot y'(t) &= -\frac{1}{y(t)^2} \cdot \left(3\,y(t) - a\,y(t)^2\right) \\ &= -3 \cdot \frac{1}{y(t)} + a \\ &= -3\,z(t) + a \\ &= -3\left(z(t) - \frac{a}{3}\right) , \end{aligned}$$

was wir unter Verwendung des Startwertes $z(0) = \frac{1}{200}$ wie in Aufgabe 1 lösen können zu:

$$z(t) = \left(\frac{1}{200} - \frac{a}{3}\right) \cdot \mathrm{e}^{-3t} + \frac{a}{3}$$

Nun verwenden wir $z(1) = \frac{1}{250}$, um per Umformung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{250} = \left(\frac{1}{200} - \frac{a}{3}\right) \cdot \mathrm{e}^{-3} + \frac{a}{3} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{1000} + \frac{1}{200} = \left(\frac{1}{200} - \frac{a}{3}\right) \cdot \mathrm{e}^{-3} + \frac{a}{3} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{1000} = \left(\frac{1}{200} - \frac{a}{3}\right) \cdot \mathrm{e}^{-3} - \left(\frac{1}{200} - \frac{a}{3}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{1000} = \left(\frac{1}{200} - \frac{a}{3}\right) \cdot \left(\mathrm{e}^{-3} - 1\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{200} - \frac{a}{3} = \frac{1}{1000 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-3})} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a}{3} = \frac{1}{200} - \frac{1}{1000 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-3})}
\end{aligned}$$

auf

$$\begin{aligned}
z(t) &= \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{1000 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-3})} + \frac{1}{200} - \frac{1}{1000 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-3})} \\
&- \frac{1 - \mathrm{e}^{-3t}}{1000 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-3})} + \frac{1}{200} \\
&= -\frac{1}{1000} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-3t}}{1 - \mathrm{e}^{-3}} + \frac{1}{200}
\end{aligned}$$

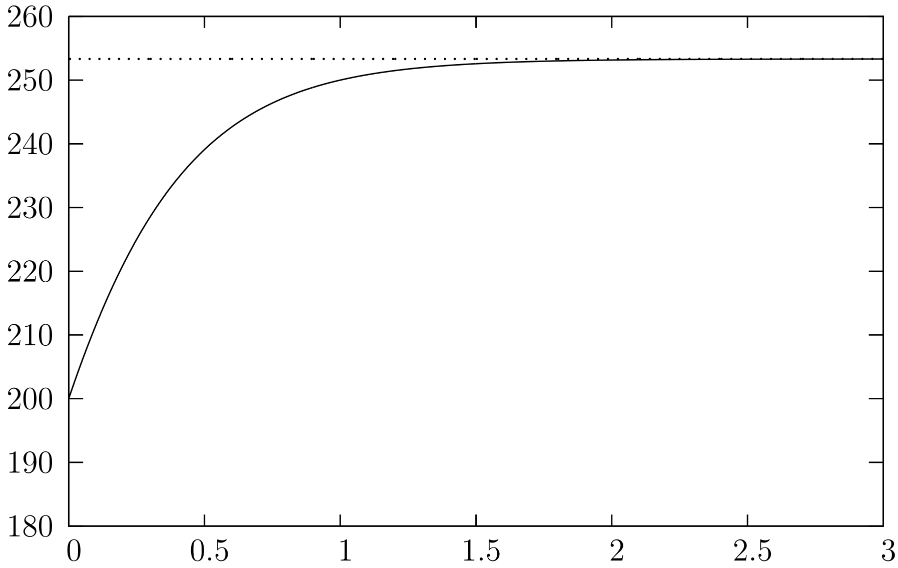
schließen. Rücksubstition $y(t) = \frac{1}{z(t)}$ ergibt

$$y(t) = \frac{1}{-\frac{1}{1000} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-3t}}{1 - \mathrm{e}^{-3}} + \frac{1}{200}}$$

und das Langzeitverhalten ist

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{1}{-\frac{1}{1000 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-3})} + \frac{1}{200}} \approx 253{,}32\,.$$

Für die ersten 3 Studen nach 13 Uhr ist der Temperaturverlauf:



$\boxed{2}$

Aufgabe 3: Beurteilen Sie nach expliziter Berechnung der Lösung, ob das Modell

$$\begin{cases} y' = 2 \cdot e^{3y}, \quad t > 0, \\ y(0) = a > 0, \end{cases}$$

zur Beschreibung von Explosionsvorgängen geeignet ist. $\boxed{3}$

<u>Lösung:</u>

Wir lösen mit Trennung der Varialben. Es ist:

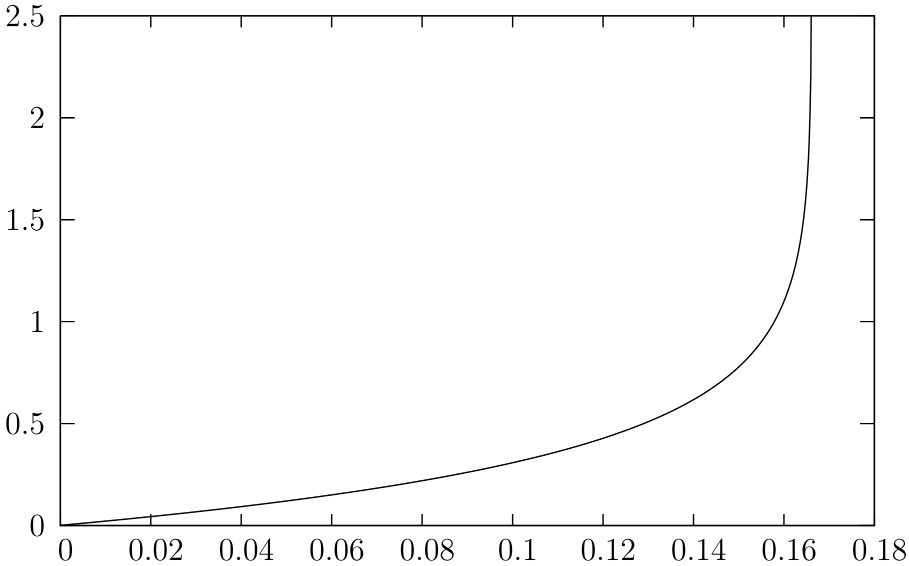
$$\begin{aligned}
& y'(t) = 2\,\mathrm{e}^{3y(t)} \\
\Leftrightarrow \quad & y'(t) \cdot \mathrm{e}^{-3y(t)} = 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^t y'(t) \cdot \mathrm{e}^{-3y(t)}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t 2\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow \quad & \int_a^{y(t)} \mathrm{e}^{-3z}\,\mathrm{d}z = \int_0^t 2\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow \quad & \left[-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3z}\right]_a^{y(t)} = 2t \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3y(t)} + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3a} = 2t \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{-3y(t)} = \mathrm{e}^{-3a} - 6t \\
\Leftrightarrow \quad & -3y(t) = \log(\mathrm{e}^{-3a} - 6t) \\
\Leftrightarrow \quad & y(t) = -\frac{1}{3}\log\left(\mathrm{e}^{-3a} - 6t\right)
\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{e}^{-3a} - 6t > 0 \;\Leftrightarrow\; t < \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-3a}$ ist die Lösung für $t \in [0, \hat{t}]$ mit $\hat{t} = \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-3a}$ wohldefiniert und es gilt

$$\lim_{t \nearrow \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3a}} -\frac{1}{3}\log\left(\mathrm{e}^{-3a} - 6t\right) = \infty\,.$$

Die Lösung hat somit eine Lücke im Definitionsbereich, wobei der Funktionswert für auf diese Lücke zustrebendes t über alle Grenzen wächst. Genau diese Eigenschaft schreiben wir einem Explosionsprozess zu. Hierbei sei nochmal erwähnt, dass eine Lösung nur vom gegebenen Startwert bis (falls sie existert) zur ersten Definitionslücke (falls wir Lösungen nicht nur für $t \geq t_0$ suchen, auch in Richtung kleiner werdender Zeit) ein Anfangswertproblem löst, die Lösung genau auf einem Intervall existert. Dies liegt daran, dass die Lösung insbesondere stetig sein muss, um differenzierbar zu sein, um überhaupt die DGL erfüllen zu können.

Zum Beispiel für $a = 0{,}001$ haben wir $y(t) = -\frac{1}{3}\log\left(\mathrm{e}^{-0{,}003} - 6t\right)$ für $t \in [0, \hat{t}]$ mit $\hat{t} = \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{0{,}003} \approx 0{,}1662$.



3

Aufgabe 4: Wir betrachten das Gleichungssystem für die Relativbewegung im Zwei-Körperproblem:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -k\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

mit zwei postiven Konstanten μ und k. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der „Drehimpulsvektor“

$$\vec{L} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

eine Erhaltungsgröße der Bewegung ist, d.h. $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$. Wir definieren den sogenannten Lenz-Vektor $\vec{\Lambda}$ vermöge

$$\vec{\Lambda} = \frac{\dot{\vec{r}}}{k} \times \vec{L} - k\frac{\vec{r}}{r}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass der Lenz-Vektor ebenfalls eine Erhaltungsgröße der Bewegung ist. Machen Sie dabei Gebrauch von den folgenden elementaren Rechenregeln:

- der BAC-CAB-Regel: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- den Produktregeln

  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}$

  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}$

b) Nach Definition liegt $\vec{\Lambda}$ in der Bahnebene, also in der Ebene senkrecht zu $\vec{L}$. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Wie in der Vorlesung drücken wir den Vektor $\vec{r}$ mit Hilfe der Polarkoordinaten r und φ aus. Berechnen Sie das Skalraprodukt $\vec{\Lambda} \cdot \vec{r}$ auf zwei verschiedene Weisen und folgern sie daraus die Gleichung

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{\mu k} \cdot \frac{1}{1 + \Lambda \cos \varphi} \,. \tag{3}$$

Hinweis: In ihren Rechnungen könnte das Produkt $\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{L})$ auftauchen. In diesem Zusammenhang könnte die zyklische Vertauschungsregel

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

hilfreich sein.
Bemerkung: Bei der Gleichung (3) handelt es sich genau um die in der Vorlesung hergeleitete Bahngleichung, es gilt also $p = \frac{L^2}{\mu k}$ und $\epsilon = \Lambda$. Mit dem Wissen um die Erhaltungsgröße $\vec{\Lambda}$ ist die Herleitung der Bahngleichung (3) sehr viel einfacher als der in der Vorlesung beschrittene Weg. Auch hier zeigt sich wieder der große Nutzen von Erhaltungsgrößen.

Lösung: Leider hat sich in die Aufgabenstellung ein Fehler eingeschlichen: Der Lenz-Vektor ist richtigerweise definiert als

$$\vec{\Lambda} = \frac{\dot{\vec{r}}}{k} \times \vec{L} - \frac{\vec{r}}{r} \,.$$

Es hat sich also ein k zuviel eingeschlichen. Wir bitten vor allem diejenigen um Entschuldigung, die aufgrund dieses Fehlers lange ohne Erfolg an dieser Aufgabe geknobelt haben. Wir haben uns entschieden, entschädigend diese Aufgabe komplett als freiwillige Zusatzaufgabe zu werten.

a) Damit $\vec{\Lambda} = \frac{\dot{\vec{r}}}{k} \times \vec{L} - \frac{\vec{r}}{r}$ mit $r = |\vec{r}| = \left| \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ (Physiker schreiben Beträge von Vektoren gerne auf diese knapp Art) eine Erhaltungsgröße ist, darf sich $\vec{\Lambda}$ über die Zeit nicht verändern, es muss also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Lambda} = \vec{0}$ gelten. Prüfen wir dies. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{k} \times \vec{L}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Hier gilt nun mit der auch für das Kreuzprodukt geltenden Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{k} \times \vec{L}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{\vec{r}}}{k} \times \vec{L} + \frac{\dot{\vec{r}}}{k} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} \\ &= \frac{\ddot{\vec{r}}}{k} \times \vec{L} + \underbrace{\frac{\dot{\vec{r}}}{k} \times \dot{\vec{L}}}_{=0,\ \text{da}\ \dot{\vec{L}}=\vec{0}} = \frac{\ddot{\vec{r}}}{k} \times \vec{L} \end{aligned}$$

und nochmal wie gewohnt mit der Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}\,\frac{1}{r} + \vec{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{r} = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{r}$$

gilt. Für die Ableitung von $\frac{1}{r}$ können wir nun einerseits benutzen, dass r mit $r = \sqrt{r_1(t)^2 + r_2(t)^2 + r_3(t)^2}$ eine von t abhängige Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Damit können wir unter der Benutzung von $\dot{r} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$ mit der Kettenregel auf

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t) = -\frac{1}{r^2} \cdot \dot{r}$$

kommen. Wenn wir dies nicht benutzen, können wir sicherheitshalber immer noch auf das Ausschreiben der beteiligten Komponenten ausweichen und dann wieder wie gewohnt per Kettenregel ableiten. Hierbei identifizieren wir am Ende wieder ein Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\left(2r_1\dot{r}_1 + 2r_2\dot{r}_2 + 2r_3\dot{r}_3\right) \\ &= -\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3} \end{aligned}$$

Dass nun $-\frac{\vec{r}\dot{\vec{r}}}{r^3} = -\frac{\dot{r}}{r^2}$ also $\vec{r}\dot{\vec{r}} = r\dot{r}$ gilt, ergibt sich aus der Produktregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}$ also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}^2 = 2\dot{\vec{r}}\vec{r}$$

aber wegen

$$\vec{r}^2 = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \end{pmatrix} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = r^2$$

auch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2 = 2r\dot{r}$. Wie wir auch gerechnet haben, wir wissen jetzt, es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \vec{r}\,\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r^3}$$

und damit haben wir alle beteiligten Ableitungen bestimmt, die wir nun einsetzen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Lambda} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{r}}{k}\times\vec{L}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{r}}{r} \\ &= \frac{\ddot{\vec{r}}}{k}\times\vec{L} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r}\,\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r^3}\,.\end{aligned}$$

Mit der Definition des „Drehimpulsvektors“ $\vec{L} = \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ und der BAC-CAB-Regel $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Lambda} &= \frac{\ddot{\vec{r}}}{k}\times\left(\mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right) - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r}\,\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r^3} \\ &= \mu\vec{r}\left(\frac{\ddot{\vec{r}}}{k}\cdot\dot{\vec{r}}\right) - \dot{\vec{r}}\left(\frac{\ddot{\vec{r}}}{k}\cdot\mu\vec{r}\right) - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r}\,\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r^3} \\ &= \frac{1}{k}\,\vec{r}\left(\mu\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right) - \frac{1}{k}\,\dot{\vec{r}}\left(\mu\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right) - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r}\,\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r^3}\end{aligned}$$

und mit der die Aufgabe einleitenden DGL für die Relativbewegung im Zweikörperproblem (1) $\mu\ddot{\vec{r}} = -k\,\frac{\vec{r}}{r^3}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Lambda} &= \frac{1}{k}\,\vec{r}\left(-k\,\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\dot{\vec{r}}\right) - \frac{1}{k}\dot{\vec{r}}\left(-k\,\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{r}\right) - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r}\,\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r^3} \\ &= -\frac{\vec{r}}{r^3}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right) + \frac{\dot{\vec{r}}}{r^3}\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{r})}_{r^2} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\vec{r}}{r^3}\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right) \\ &= \frac{\dot{\vec{r}}}{r^3}\,r^2 - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} = 0\,,\end{aligned}$$

was zu zeigen war. $\boxed{2}$

b) Zum einen gilt aufgrund der Wahl des Koordinatensystem (2) und der Darstellung von $\vec{r}$ mit Polarkoordinaten

$$\vec{\Lambda}\cdot\vec{r} = \Lambda r\cos\varphi\;. \tag{4}$$

Andererseits rechnen wir

$$\vec{\Lambda} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{k} \times \vec{L} \right) \cdot \vec{r} - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} \tag{5}$$

$$= \vec{L} \cdot \left(\frac{\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{k} \right) - r \tag{6}$$

$$= \frac{L^2}{\mu k} - r\,. \tag{7}$$

Dabei haben wir von (5) nach (6) die zyklische Vertauschungsregel ausgenutzt und von (6) nach (7) die Definition von $\vec{L}$ eingesetzt. Jetzt setzen wir (4) und (7) gleich, lösen nach r auf und erhalten die gewünschte Geichung (3). $\boxed{2}$