Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 09.07.2012

12. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“ Lösung

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Trajektorien und damit das Phasenportrait der angegebenen Systeme. Skizzieren Sie das Phasenportrait.

a) $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0$

b) $\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 1$

c) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$

d) $\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y^2$

Lösung

Vorweg eine kurze Zusammenfassung samt Motivation der Vorgehensweise. Nur an der Minimallösung interessierte, können diesen Abschnitt überspringen und gleich bei a) weiterlesen.

Betrachten wir zunächst die DGL $\ddot{x} = -x$ für die wir aus früheren Übungen bereits die Lösungsmenge aller $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ kennen. Wegen $x(0) = c_1$ und $\dot{x}(0) = -c_2$ erhalten wir also für das AWP $\ddot{x} = -x$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ die eindeutige Lösung $x(t) = x_0 \cos(t) - v_0 \sin(t)$.

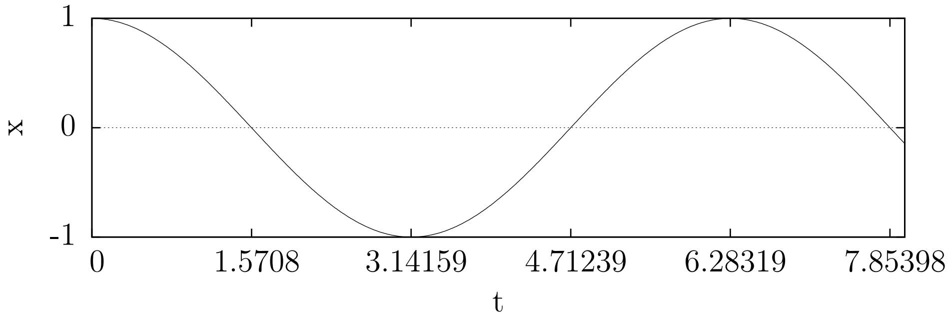
Liegen x_0 und v_0 nun als $x_0 = r \cdot \cos(\varphi)$, $v_0 = r \cdot \sin(\varphi)$ vor, dann erhalten wir aufgrund des Additionstheorems $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos(\varphi) \cos(t) - r \sin(\varphi) \sin(t) \\ &= r \cos(t + \varphi) \end{aligned}$$

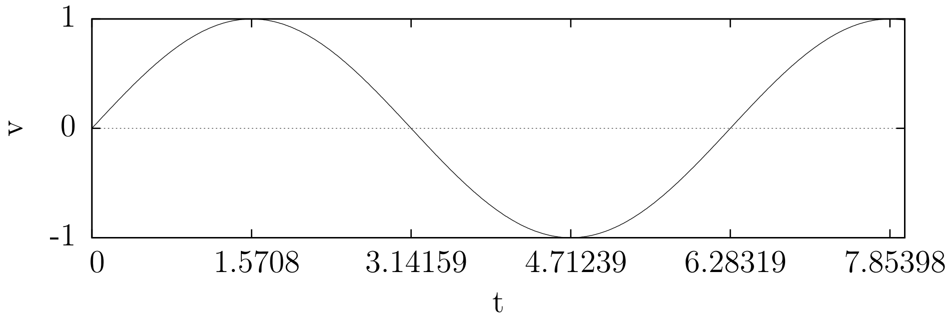
und somit

$$\dot{x}(t) = -r \sin(t + \varphi).$$

Exemplarisch für $x_0 = 1$ und $v_0 = 0$ verläuft die Lösung gegenüber t für x somit als



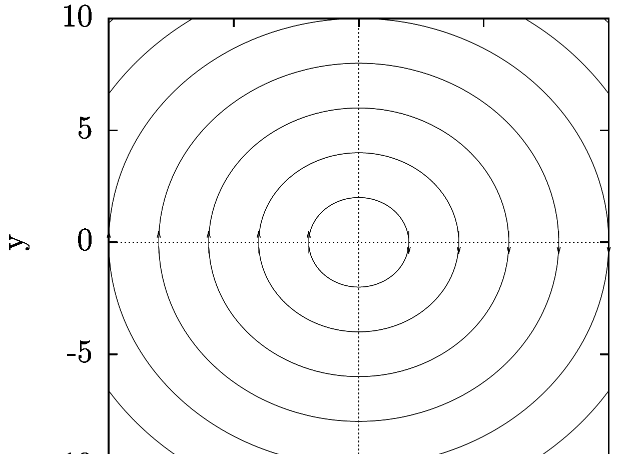
und für $\dot{x} = v$ als



Wie schon in der Vorlesung verwendet, lässt sich aus der DGL zweiter Ordnung $\ddot{x} = -x$ auch ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung

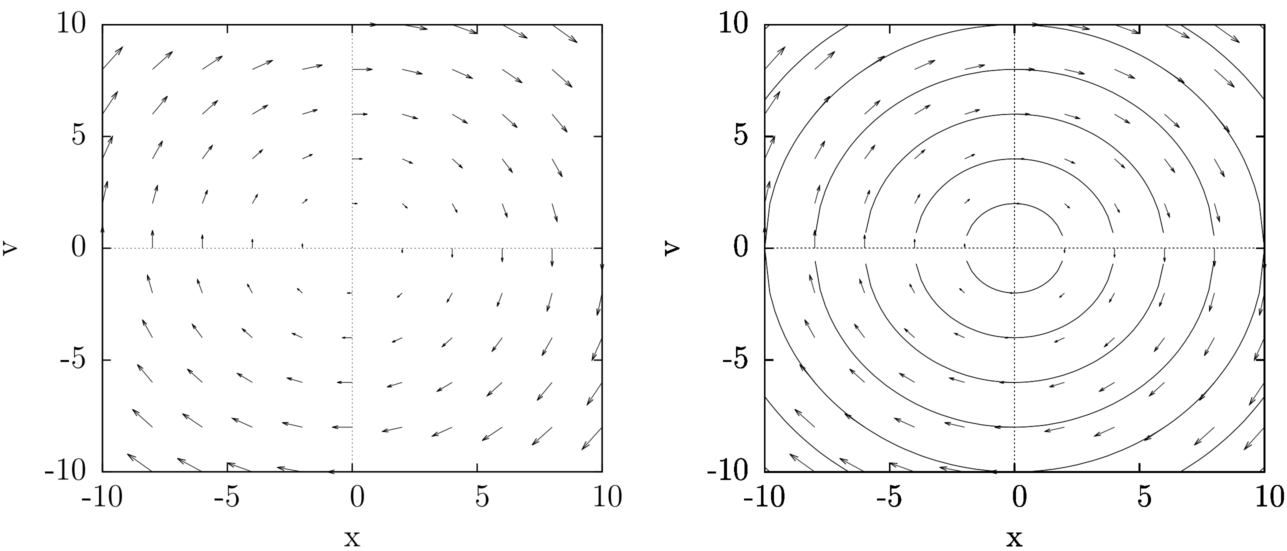
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x \end{cases}$$

mit $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ formen. So erhalten wir als Lösung die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto (x(t), v(t)) =$ mit $x(t)$ und $v(t)$ wie oben. Für die verschieden möglichen Anfangswerte x_0, v_0 lassen sich die Lösungen als über t parametrisierte Kurven im $\mathbb{R}^2$ als Phasenportrait darstellen. Diese Lösungskurven nennen wir die Trajektorien der DGL. Wegen in unserem Fall $x(t) = r\,\cos(t + \varphi)$, $v(t) = r\,\sin(t + \varphi)$ sind dies konzentrische Kreise um $(0, 0)$. So startet eine Lösung als Punkt im $\mathbb{R}^2$ und bewegt sich für steigende t mit dem Uhrzeigersinn im Kreis.

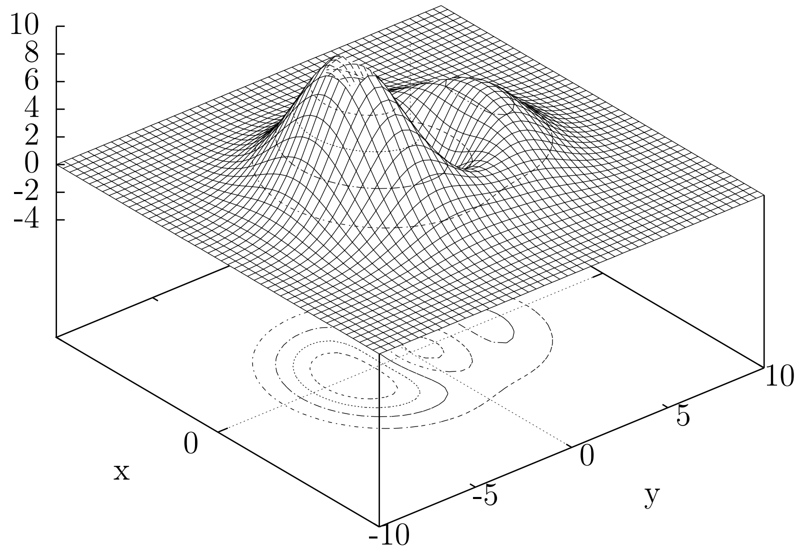


Vergessen wir nun für einen Moment unser Wissen um die explizite Lösung des DGL-Systems. Verwenden wir ausschließlich $\dot{v} = v$, $\dot{v} = -x$. Natürlich existiert eine eindeutige Lösung zu einem Paar von Anfangswerten x_0, v_0, auch wenn wir die Lösung nicht kennen. Was wir aber wissen ist: Befinden wir uns zu einem Zeitpunkt t bei $x(t)$ und $v(t)$, so ist die Änderungsrate der Lösung $\dot{x}(t)$ für x und $\dot{v}(t)$ für v. Im Phasenportrait bewegen wir uns also vom Punkt $(x(t), v(t))$ in Richtung $(\dot{x}(t), \dot{v}(t))$. Zeichnen wir also an die Stelle $(x(t), v(t))$ einen Vektor $(\dot{x}(t), \dot{v}(t))$, so verläuft die Kurve der Lösung in diese Richtung, der Vektorpfeil liegt tangential an der Kurve an. Somit können wir es aufs Geratewohl mit etlichen Vektorpfeilen über den uns interessierenden Bereich einer Lösung versuchen. Wir tragen ein Vektorfeld ein, an eine Stelle (x, v) verzeichnen wir den Vektor $(\dot{x}, \dot{v})$, der sich jeweils über das Differentialgleichungssystem bestimmen lässt, in unserem Fall $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -x)$. Hierbei sei angemerkt, dass wir der besseren Visualisierung wegen die Länge der Pfeile einheitlich skalieren. Ansonsten würden die Pfeile möglicherweise so lang sein, dass wir nur ein sehr spärlich besetztes Feld zeichnen könnten, oder sie könnten so kurz sein, dass kaum etwas erkannbar ist.

Im linken Diagramm sehen wir nun das Vektorfeld, im rechten zusätzlich die Auswahl an Lösungskurven, die wir vorhin bestimmt haben. Wir sehen, dass die Pfeile wohl tangential an den Kurven liegen, wir aber nur mit ein paar Pfeilen nicht erkennen können, ob Lösungen sich vielleicht spiralförmig nach innen oder außen bewegen, so ein Vektorfeld also eher einem groben Eindruck dient als einer exakten Bestimmung der Lösungskurven.



Für eine exakte Bestimmung behelfen wir uns einer Funktion $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Diese lassen wir jeden Punkt (x, y) auf einen Wert $H(x, y)$ abbilden. Interpretieren wir diesen Wert als eine Höhe, so erhalten wir mit H eine Art Höhenlandschaft, wie nachfolgend exemplarisch dargestellt.



Unter dieser Landschaft eingezeichnet sind einzelne Linien gleichen Niveaus: Schnitte man die Landschaft horizontal in Scheiben, so ergäben sich die Niveaulinien als Schnittkanten.

Wofür können wir nun H gebrauchen, um die Lösungskurven zu finden? Es ist so, wir suchen solche Funktionen H, in denen die Höhenlinien von den Lösungskurven im Phasenportrait überdeckt werden. So wie die Lösungen erstmal unbekannt sind, nehmen wir auch H als unbekannt an. Aber einer Lösung $t \mapsto (x(t), y(t))$ für steigende t folgend soll H diese $(x(t), y(t))$ auf dieselbe Höhe abbilden. Wir fordern somit $H(x(t), y(t)) = \text{const} \ \ \forall t$ bzw. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t), y(t)) = 0 \ \forall t$. Auch wenn wir $x(t)$ und $y(t)$ nicht kennen, so können wir doch zumindest die Ableitung bestimmen. $H(x(t), y(t))$ ist die Verkettung der Abbildungen $t \mapsto (x(t), y(t))$ und $(x, y) \mapsto H(x, y)$, so gilt nach der Kettenregel

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t), y(t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x, y)} H(x(t), y(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} H(x(t), y(t)) & \frac{\partial}{\partial y} H(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} H(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial}{\partial y} H(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)
\end{aligned}
$$

oder in einer (in einer im Umfeld der partiellen Differentialgleichungen oft gebräuchlichen) Kurzschreibweise

$$H_t = H_x \, \dot{x} + H_y \, \dot{y} \, .$$

mit dem üblichen (aber nicht sehr sauberen) Weglassen der Argumente.

Wir sehen aber nun, in der Forderung $0 = H_t = H_x \, \dot{x} + H_y \, \dot{y}$ tauchen x und y nicht mehr direkt auf, $\dot{x}$ und $\dot{y}$ kennen wir aber.

Im Falle obiger DGL $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -x$ erhalten wir wegen

$$
\begin{aligned}
0 &= H_x \, \dot{x} + H_v \, \dot{v} \\
&= H_x \, v + H_v \, (-x)
\end{aligned}
$$

und dem im Falle von $x \neq 0$ und $v \neq 0$ dazu äquivalenten

$$0 = H_x \frac{1}{x} - H_v \frac{1}{v}$$

die Implikation: Aus $H_x = x$ und $H_v = v$ folgt $H_t = 0$, bzw. genauer
Aus

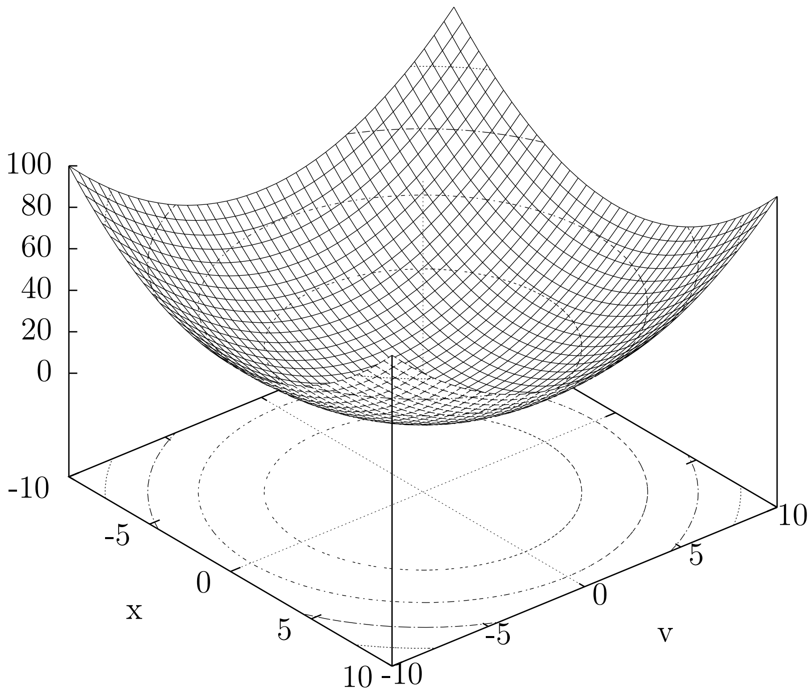
$$\frac{\partial}{\partial x} H(x, v) = x \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v} H(x, v) = v$$

folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t), y(t)) = 0 \ \forall t \, .$$

Greifen wir diese Forderung auf, so finden wir leicht $H(x, v) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}v^2$. Hierbei lag die Umformung von $0 = H_x\, v + H_y\, x$ zu $0 = H_x \frac{1}{x} + H_v \frac{1}{v}$ in sofern nahe, dass wir leichter Funktionen finden, wenn die partiellen Ableitungen nach x nur Ausrücke über x und die nach v nur Ausdrücke über v erhalten. In diesem Fall suchen wir somit nach Funktionen $f(x)$ und $g(v)$ mit $H(x, v) = f(x) + g(v)$ und $f'(x) = H_x$ und $g'(v) = H_v$, zum Finden müssen wir „nur“ Stammfunktionen zu f' und g' finden, das ist einfacher, als zur Jacobi-Matrix $(H_x H_y)$) die Funktion H.

Welche Eigenschaft hat nun unser gefundenes H? Für jede Lösung $t \mapsto (x(t), v(t))$ können wir ein $c \in \mathbb{R}$ finden, so dass mit $H(x(t), v(t)) = c$ auch $\frac{1}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}v(t)^2 = c$ gilt.



Sämtliche Lösungskurven verlaufen somit auf Kreisbahnen, in unserem Fall mit Radius $\sqrt{2c}$. Die Niveaulinien von H sind im Allgemeinen aber nicth gleichbedeutetnd mit den Trajektorien, die Trajektorien verlaufen auf den Niveaulinien und sind im Allgemeinen nur eine Teilmenge von ihnen, wie die in a) bis d) folgenden Beispiele zeigen.

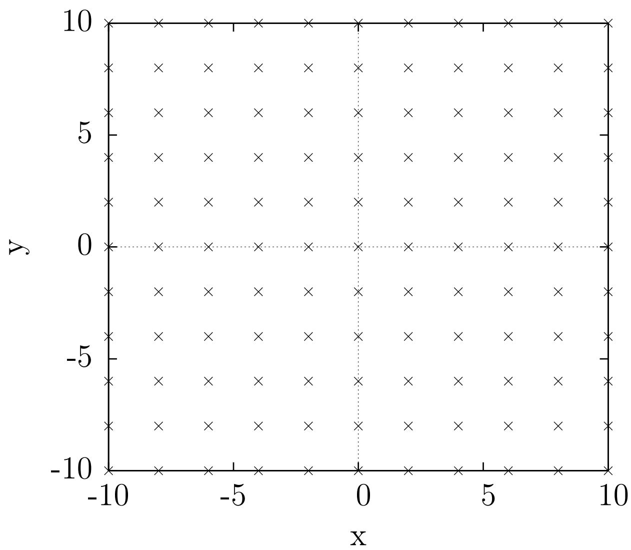
So widmen wir uns nun der Lösung der Teilaufgaben:

a) Wir setzen an

$$\begin{aligned} & 0 = H_x\,\dot{x} + H_y\,\dot{y} \\ \Leftrightarrow\quad & 0 = H_x \cdot 0 + H_y \cdot 0 \end{aligned}$$

und erkennen, jede Abbildung $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erfüllt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t), y(t)) = 0$. Was bedeutet dies? Nicht, dass die Lösung $t \mapsto (x(t), y(t))$ beliebig ist, sondern nur, dass jede Abbildung H über die Verkettung $t \mapsto (x(t), y(t)) \mapsto H(x(t), y(t))$ für alle t auf denselben Wert abbildet. Dies liegt aber daran, dass $x(t)$ und $y(t)$ selbst konstant für alle t sind und aus $x(t) = c$ und $y(t) = d$ nunmal $H(c, d) = \text{const}$ folgt.

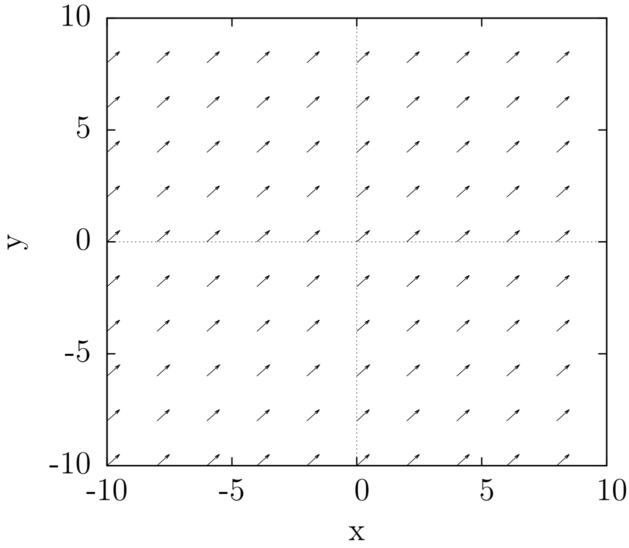
Hier hätten wir zunächst einmal die stationären Punkte aller x, y mit $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$ ermitteln sollen, diese in unserem Fall gerade alle Punkte im $\mathbb{R}^2$, so bestehen die Trajektorien jeweils nur aus einem Punkt.

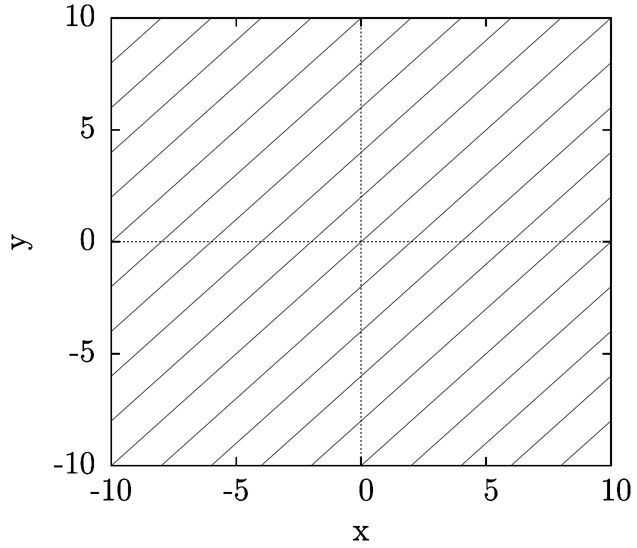


$\boxed{1}$

b) Hier erkennen wir sofort, dieses System hat keine stationären Punkte. Die Forderung $0 = H_x\,\dot{x} + H_y\,\dot{y} = H_x + H_y$ ist unter anderem für $H_x = 1$ und $H_y = -1$ also z. B. für $H(x, y) = x - y$ erfüllt. Sei nun $H(x, y) = c$, dann gilt $c = x - y$. Für jedes x gibt es somit genau ein $y(x) = x - c$, die Trajektorien verlaufen auf Geraden. Da nun für alle x, y dazu $\dot{x} > 0$ und $\dot{y} > 0$ gilt, verlaufen die Lösungen stets nach rechts oben, wie auch schon das Vektorfeld zeigt. Hier sei nochmal deutlich der Unterschied zwischen Trajektorien der Lösungen und Niveaulinien von H herausgestellt: Eine Trajektorie beginnt beim Startwert und verläuft entsprechend $(x(t), y(t))$, ist in unserem Fall somit der Strahl vom Startwert nach rechts oben. Die Niveaulinie hingegen ist die gesamte Gerade. Auf einer Niveaulinie liegen somit alle Trajektorien, deren Startwerte selbst auf der Niveaulinie liegen.

Links das Vektorfeld, rechts das Phasenportrait mit ausgewählten Lösungskurven:



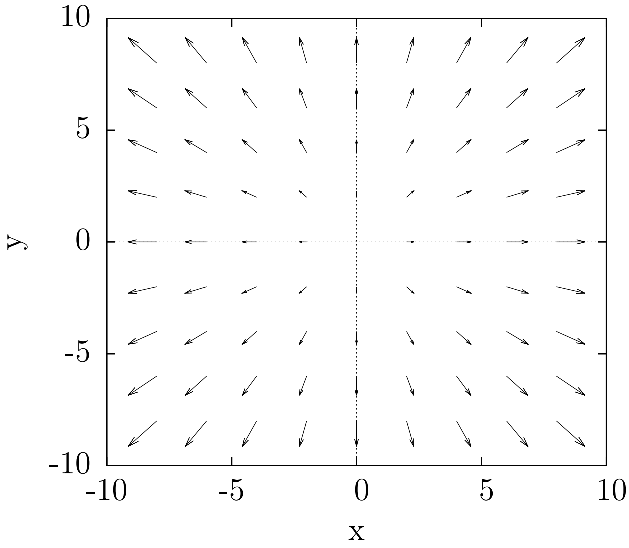


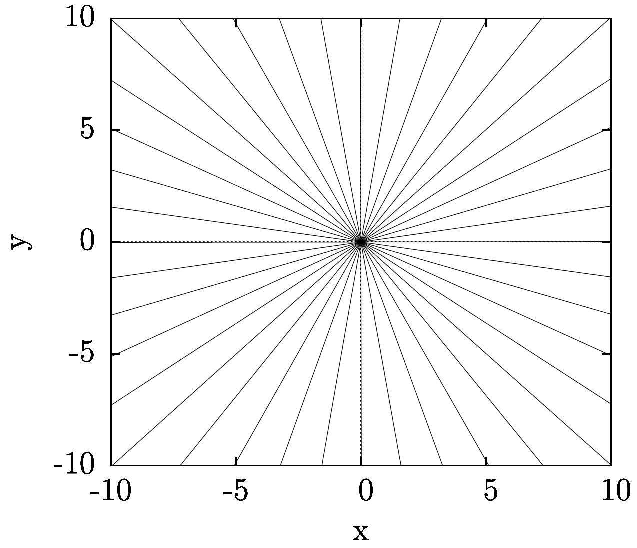
$\boxed{1}$

c) Wegen $(\dot{x}, \dot{y}) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (0,0)$ befindet sich der einzige stationäre Punkt bei $(0,0)$. Dazu wird $0 = H_x\,\dot{x} + H_y\,\dot{y} = H_x\,x + H_y\,y$ von $H_x = \frac{1}{x}$ und $H_y = -\frac{1}{y}$, also von $H(x,y) = \log|x| - \log|y| = \log\left|\frac{x}{y}\right|$ erfüllt.

Hierbei haben wir $x = 0$ und $y = 0$ aus unserer Betrachtung herusgenommen. Aber wir sehen leicht, aus $x(t) = 0$ für ein t folgt wegen $\dot{x} = 0$ dann $x(t) = 0$ für alle t, für $y(t) = 0$ analog. Somit verlaufen Lösungen auf der x- und der y-Achse.

Für $x \neq 0$ und $x \neq 0$ und $H(x,y) = \tilde{c}$ mit $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ erhalten wir $\log\left|\frac{x}{y}\right| = \tilde{c}$ und somit $\frac{x}{y} = \pm\,\mathrm{e}^{\tilde{c}}$ also $y = c\,x$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Links das Vektorfeld, rechts das Phasenportrait:

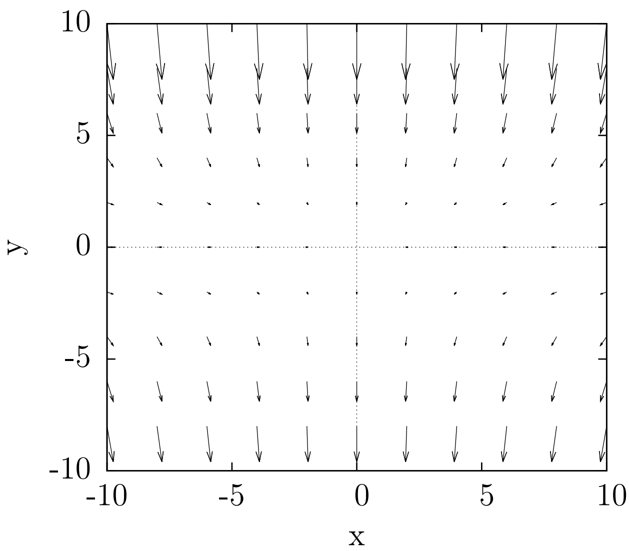


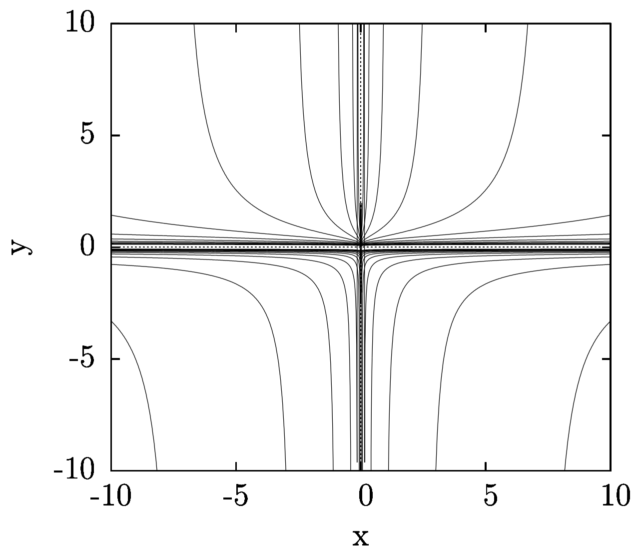


Wir sehen im Vektorfeld: Im linken oberen Quadranten, also für $x < 0$, $y > 0$ gilt $\dot{x} < 0$, $\dot{y} > 0$, es verlaufen die Trajektorien nach links oben. Im rechten oberen Quadranten, also für $x > 0$, $y > 0$ gilt $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$, es verlaufen die Trajektorien nach rechts oben. Im linken unteren Quadranten, also für $x < 0$, $y < 0$ gilt $\dot{x} < 0$, $\dot{y} < 0$, es verlaufen die Trajektorien nach links unten. Und im rechten unteren Quadranten, also für $x > 0$, $y < 0$ gilt $\dot{x} > 0$, $\dot{y} < 0$, es verlaufen die Trajektorien nach rechts unten. Somit verlaufen die Trajektorien stets vom Ursprung weg.

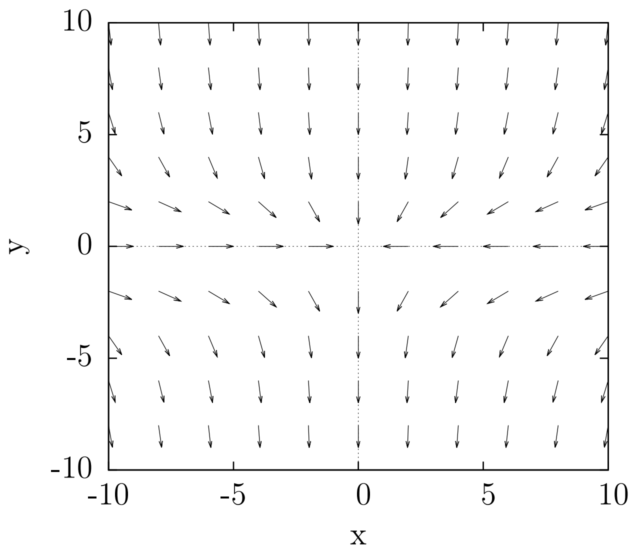
$\boxed{1}$

d) Stationärer Punkt ist wie in c) nur $(0, 0)$. Zudem erhalten wir für $H(x, y) = \log|x| + \frac{1}{y}$ sowohl $H_x = \frac{1}{x}$ und $H_y = -\frac{1}{y^2}$ also auch $H_x \cdot (-x) + H_y \cdot (-y^2) = 0$. Die Trajektorien sind also jeweils Teilmengen von $\left\{(x, y) \mid c = \log|x| + \frac{1}{y}\right\}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Um die Niveaulinien von H als Funktion $y(x)$ zeichnen zu können, stellen wir um zu $y(x) = \frac{1}{c - \log|x|}$. Wir sehen, die Abbildung ist gerade, es gilt also $y(-x) = y(x)$. Weiterhin ist $\lim_{x \to 0} y(x) = 0$, $\lim_{x \to e^c; |x| < e^c} y(x) = \infty$ und $\lim_{x \to e^c; |x| > e^c} y(x) = -\infty$





Im vorliegenden Fall können wir eine Schwäche der Vektorfelder erkennen: Für Vektorpfeile mit sehr unterschiedlicher Länge in einem Diagramm, ist es uns nicht möglich, alle Pfeile so unter Beibehaltung ihrer wahren Längenverhältnisse so umzuskalieren, dass noch eine vernünftige Visualisierung möglich ist. In diesem Fall kann man durch Normieren aller Pfeile auf ein sogenanntes Richtungsfeld ausweichen. Hier lässt sich nur noch die Richtung der Lösungen ablesen, keine Rückschlüsse auf den Fortschritt mit der Zeit sind mehr möglich.



$\boxed{1}$

Aufgabe 2: Ein Ball der Masse m wird vom Erdboden senkrecht nach oben geworfen. Bekanntlich lässt sich dieser Vorgang mit der Gleichung

$$m\ddot{x} = -mg \tag{1}$$

modellieren. Dabei ist $x(t)$ die Höhe des Balls über dem Erdboden zur Zeit t und g ist die Erdbeschleunigung.

a) Wie gewöhnlich sei v die Geschwindigkeit des Körpers, also $\dot{x} = v$. Verwandeln sie die Differentialgleichung (1) in ein Differentialgleichungssystem mit den Variablen x und v.

b) Bestimmen Sie die Trajektorien und damit das Phasenportrait des in Aufgabenteil a) gewonnenen Systems. Skizzieren sie das Phasenportrait .

<u>Lösung</u>

a) Mit $\dot{x} = v$ ist $\ddot{x} = \dot{v}$ und wir erhalten aus $m\ddot{x} = -mg$ dann $m\dot{v} = -mg$. Kürzen ergibt

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -g\,. \end{cases}$$

$\boxed{1}$

b) Wie schon in Aufgabe 1 suchen wir eine Abbildung $H\colon \mathbb{R}^2 \to R$ mit der Eigenschaft $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x(t), v(t)) = 0$, also $0 = H_x\,\dot{x} + H_y\,\dot{y}$, in Falle von $\dot{x} = v$ und $\dot{v} = -g$ äquivalent zu $0 = H_x - H_y\,\frac{g}{v}$. Dies ist für $H_x = 1$ und $H_v = \frac{v}{g}$ beispielsweise erfüllt. Nun hat $H(x, v) = x - \frac{1}{2g}\,v^2$ genau diese partiellen Ableitungen.

Wir wissen nun also, für jede Lösungskurve $t \mapsto (x(t), v(t))$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle t dann $c = x(t) - \frac{1}{2g}\, v(t)^2$ gilt. Die Abhängigkeit von x und v, die aber unabhängig von t ist, können wir nun umstellen zu

$$x(v) = -\frac{1}{2g}\, v^2 - c$$

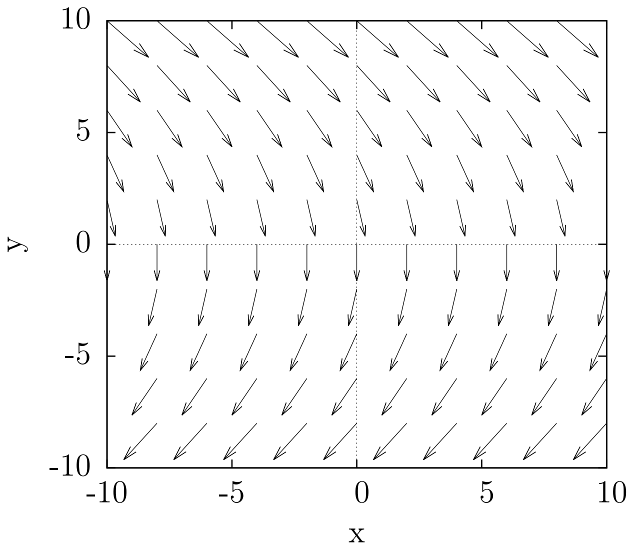
oder auch wegen $x = -\frac{1}{2g}\, v^2 - c \;\Leftrightarrow\; v^2 = -2gx - 2gc$ zu

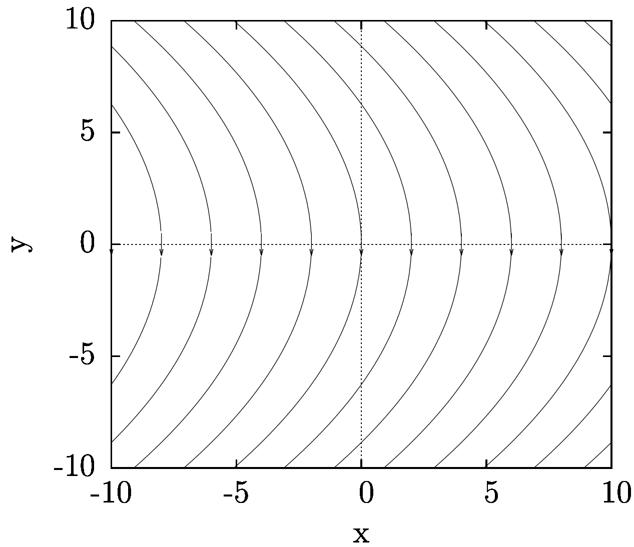
$$v(x) = \pm\sqrt{-2gx + \tilde{c}}$$

mit $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$. Es lässt sich erkennen, dass es sich manchmal anbietet, nicht v in Abhängigkeit von x sondern x in Abhängigkeit von v zu zeichnen.

Ferner gilt stets $\dot{v} < 0$, so verlaufen die Lösungskurven auf den Niveaulinien von H stets vom Startwert beginnend nach unten.

Links das Vektorfeld, rechts das Phasenportrait:





$\boxed{2}$

Aufgabe 3: Hier sollen Sie sich an ein Aufgabenformat gewöhnen, das in der Klausur benutzt werden wird.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.

		wahr	falsch
1.	Jede Lösung der Differenzengleichung $a_{n+1} = 5a_n - 2a_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ist divergent.		X
2.	Die Lösung der Differentialgleichung $y' = \sqrt{y}$, $t \geq 0$, mit $y(0) = 1$ explodiert nach endlicher Zeit.		X
3.	Eine Population, die sich gemäß der logistischen Differentialgleichung entwickelt und zur Zeit $t = 0$ aus einer positiven Zahl von Individuen besteht, stabilisiert sich für große Zeiten in der Nähe eines positiven Wertes.	X	
4.	Die zeitliche Entwicklung der Höhe h des Mittelpunktes einer Kugel, die sich an einer Feder hängend reibungsfrei bewegt, wird durch eine Differentialgleichung der Form $h'' = a \cdot h^2 - b \cdot g$ mit $a, b > 0$ beschrieben, wobei g die Erdbeschleunigung angibt.		X
5.	Ein Prozess, der durch eine für alle Zeiten $t \geq 0$ positive Größe $y(t)$ mit $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$ charakterisiert ist, kann durch eine Differentialgleichung der Form $y' = -\frac{a}{y}$ mit $a > 0$ modelliert werden.		X
6.	Die Funktion $y : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $y(t) := t^5$ für $t \geq 1$, ist die Lösung einer linearen Differentialgleichung.	X	

In der Klausur wird tatsächlich nur ihr Kreuz bewertet. In dieser Übung sollen sie ihre Überlegungen dokumentieren.

Lösung

1. Die Aussage ist falsch.
   Leicht ist zu erkennen, aus $a_0 = 0$ folgt $a_0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   Aber die Folge konvergiert nicht nur für $a_0 = 0$:
   Zum Beispiel folgt aus $a_{n+1} - an = 4a_n - 2a_n^2 = 0$ entweder wie oben $a_n = 0$ oder $a_n = 2$. Fall es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n = 0$ oder $a_n = 2$, dann ist die Folge ab n konstant und somit insgesamt konvergent. So führt beispielsweise wegen $a_n = 0 = 5a_{n-1} - 2a_{n-1}^2 = 2a_{n-1}\left(\frac{5}{2} - a_{n-1}\right) \Leftrightarrow a_{n-1} \in \left\{0, \frac{5}{2}\right\}$ und $2 = 5a_{n-1} - 2a_{n-1}^2 \Leftrightarrow a_{n-1} \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ dann $a_0 \in \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 2\right\}$ zu einer ab dem Glied nach dem Anfangsglied konstanten Folge. Es gibt abzählbar unendlich viele Anfangswerte, für die die Folge konvergiert. 0.5

2. Die Aussage ist falsch.
   Eine Lösung der DGL ist gegeben durch $y(t) = \frac{1}{4}(t+1)^2$, denn es ist $y'(t) = \frac{1}{2}(t+1) = \sqrt{y(t)}$. Damit gilt für alle $t \geq 0$ für diese Lösung $y(t) \in \mathbb{R}$ und somit explodiert die Lösung nicht in endlicher Zeit. 0.5

3. Die Aussage ist richtig.
   Wie in der Vorlesung gezeigt, konvergiert jede Lösung der DGL

   $$x'(t) = r \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{x_M}\right) \cdot x(t)$$

   mit $x(0) = x_0 > 0$ für $t \to \infty$ gegen x_M. 0.5

4. Die Aussage ist falsch.
   Hängt die Kugel in Höhe h, so ist die Feder um $L - h$ ausgelenkt, wobei L die Höhe angibt, in der die Feder entspannt ist, also keine Kraft auf die Kugel ausübt. Nun ist die Rückstellkraft der Feder entgegengesetzt wirkend und proportional zur Auslenkung der Feder und es ergibt sich $h'' = -a \cdot (L - h) - g = ah - g - La = ah - bg$ mit $b = 1 + \frac{La}{g}$. $\boxed{0.5}$

5. Die Aussage ist falsch.
   Für $y(t) \neq 0$ ist

$$
\begin{aligned}
& y'(t) = -\frac{a}{y(t)} \\
\Leftrightarrow \quad & y'(t) \cdot y(t) = -a \\
\Leftrightarrow \quad & \int y^2 \, \mathrm{d}y = \int -a \mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2} \cdot y(t)^2 = -at + \tilde{c} \\
\Leftrightarrow \quad & y(t) = \sqrt{-2at + c}
\end{aligned}
$$

   und wegen $-2at + c > 0 \;\Leftrightarrow\; t < \frac{c}{2a}$, aber $\lim_{t \to \frac{c}{2a}} y(t) = 0$ strebt die Lösung zwar 0 zu und verweilt dort auch; allerdings, weil die DGL ab $t > \frac{c}{2a}$ keine reelle Lösung mehr hat und so nur für eindlich Zeit definiert ist. $\boxed{0.5}$

6. Die Aussage ist richtig.
   Aus $y(t) = t^5$ folgt $y'(t) = 5 \cdot \frac{t^5}{t} = t \cdot \frac{1}{t} \cdot y(t)$ beziehungsweise $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $f(t, y) = 5 \cdot \frac{1}{t} y$. Sind nun y und $\tilde{y}$ Lösungen der DGL, d. h. gilt $y'(t) = f(t, y(t))$ und $\tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t))$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
af(t, y(t)) + bf(t, \tilde{y}(t)) &= a \cdot \left(5 \, \frac{1}{t} \, y(t)\right) + b \cdot \left(5 \, \frac{1}{t} \, \tilde{y}(t)\right) \\
&= 5 \, \frac{1}{t} \cdot (ay(t) + b\tilde{y}(t)) \\
&= f(t, (ay + b\tilde{y})(t)) \, ,
\end{aligned}
$$

   mit y und $\tilde{y}$ löst auch $ay + b\tilde{y}$ löst die DGL, d. h. f ist linear im ersten Argument, dies charakterisiert eine lineare DGL. $\boxed{0.5}$