Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

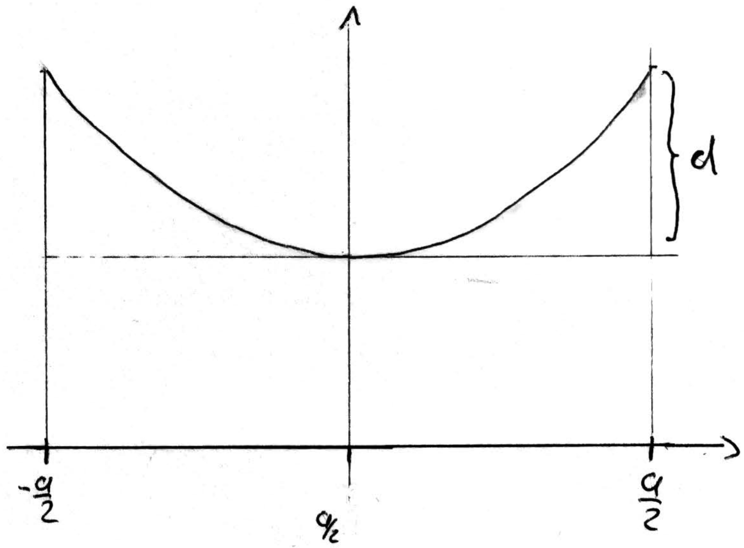
Aufgabe 1

Das Kabel wird durch den Graphen der Funktion f zwischen $-\frac{a}{2}$ und $\frac{a}{2}$ modelliert.

In Variante 1 ist das $f(x) = kx^2$, $\quad (f'(x) = 2kx)$

In Variante 2 ist das $f(x) = k\cosh(\frac{x}{k})$ $\quad (f'(x) = \sinh(\frac{x}{k}))$

mit Bedingung $f(-\frac{a}{2}) = f(\frac{a}{2}) = f(0) + d$ mit vorgegebenem d und a, woraus sich k ergibt.



Das Kabel hat eine Länge von $\int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

Bestimmung von k:

Variante 1: $f(0)=0$, also muss $f(\frac{a}{2})=d$ gelten, was auf $d=k\frac{a^2}{4}$, also $k=\frac{4d}{a^2}$ und somit $f(x)=\frac{4d}{a^2}x^2$ führt.

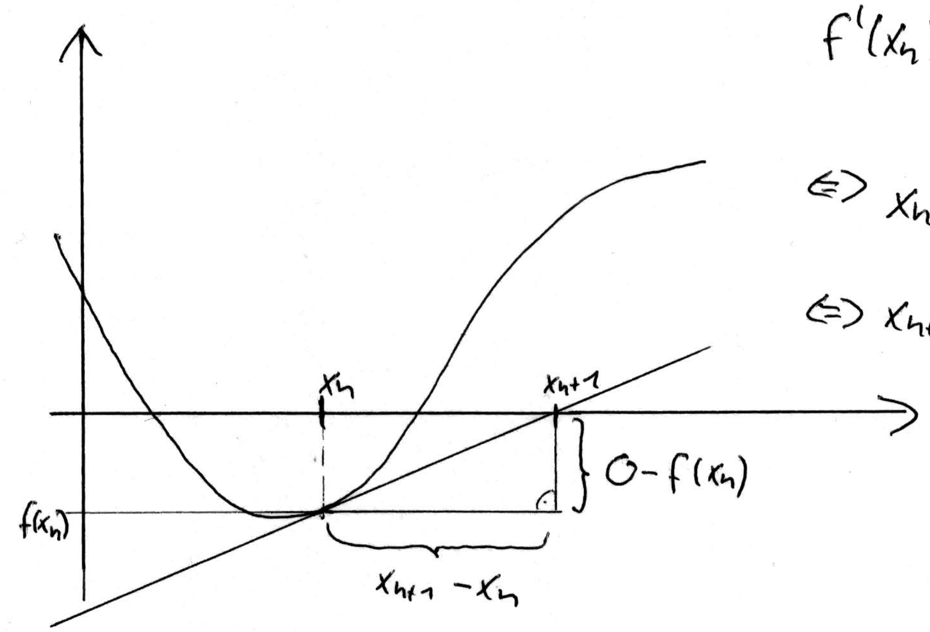
Variante 2: $f(0)=k$, also muss $f(\frac{a}{2})=k+d$ gelten, dies verlangt $k+d = k\cosh(\frac{a}{2k})$, was nicht geschlossen lösbar ist.

Nun lässt sich k (beliebig genau) numerisch approximieren, wie vorgestellt per Intervallschachtelung oder dem Newtonverfahren.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

Hier sei nochmal das Newtonverfahren vorgestellt:

Wir suchen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die für einen günstigen Startwert x_0 gegen x_∞ mit $f(x_\infty)=0$ konvergiert: Anschaulich gesprochen legt das Newtonverfahren in jeder Iteration (also jeden Schritt von x_n auf x_{n+1}) an den Graphen von f an der Stelle x_n die „lokale Tangente" (Vorsicht: der Begriff Tangente ist hier nicht ganz korrekt, in einem Wendepunkt schneidet die „Tangente" den Graphen, an nicht diff'baren Stellen darf es sie nicht geben, es handelt sich viel mehr um die lineare Approximation) an und wählt deren Nullstelle als neue Stelle x_{n+1}.



$$f'(x_n)=\frac{0-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1}-x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für $f(u)=\cosh(u)-1-\frac{2du}{a}=\cosh(u)-1-\frac{1}{5}u$ für $a=100, d=10$ erhalten wir $f'(u)=\sinh(u)-\frac{1}{5}$. f' ist streng monoton steigend mit $f'(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$, $f'(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}+\infty$ und stetig, so ist f konvex, hat offenkundig eine Nullstelle bei 0 $\left(f(0)=\cosh(0)-1-\frac{1}{5}0=1-1-0=0\right)$ und da die Nullstelle von f' rechts von 0 liegt $\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{5}\right)>0\right)$ hat f eine weitere, positive Nullstelle.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

Zu $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cosh(u) - 1 - \frac{1}{5}u}{\sinh(u) - \frac{1}{5}}$ wählen wir $x_0 = 1$.

Zum Beispiel mit dem Taschenrechner können wir die ersten Folgenglieder bestimmen

1 $\boxed{=}$ (Gleichtaste)

Ans $-$ (cosh(Ans) $-$ 1 $-$ 0,2 Ans) % (sinh(Ans) $-$ 0,2) $\boxed{=}$

Für jedes weitere Folgenglied erneut die $\boxed{=}$-Taste betätigen, bis sich der Folgenwert nicht mehr, zB auf den ersten 5 Dezimalstellen, ändert

So ergibt sich

$x_0 = 1$

$x_1 \approx 0{,}648195$

$x_2 \approx 0{,}470460$

$x_3 \approx 0{,}405772$

$x_4 \approx 0{,}395141$

$x_5 \approx 0{,}394844$

$x_6 \approx 0{,}394844$

$x_7 \approx 0{,}394844$

Mit $\tilde{x} = 0{,}3948435453$ erhalten wir $f(\tilde{x}) = 0$ nach Taschenrechner, der gemachte Fehler als seine Rechengenauigkeit.

Zurück zu $k + d = k\cosh\left(\frac{a}{2k}\right)$, wofür wir für $u := \frac{a}{2k}$, $a = 100$, $d = 10$ $u = 0{,}394844..$ angenähert bestimmt haben. So ist $k \approx 12{,}663244$ und das Kabel ist mit $f(x) = k\cosh\left(\frac{x}{k}\right)$ bestimmt.

Die Reihenentwicklung von cosh lautet $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$

Ersetzen wir cosh sowohl in der Bestimmung für $k + d = k\cosh\left(\frac{a}{2k}\right)$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

als auch in der Funktion $f(x) = k\cosh(\frac{x}{k})$ durch die Approximation $\cosh(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2}$, so erhalten wir – wie in der Vorlesung gezeigt – Variante 1.

Ersetzen wir $\cosh(x)$ durch $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$, so ergibt sich schon in

$$k + d = k\left(1 + \frac{a^2}{8k^2} + \frac{a^4}{384k^4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a}{k} = 1 + \frac{a^2}{8k^2} + \frac{a^4}{384k^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{k} - \frac{a^2}{8k^2} - \frac{a^4}{384k^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow ak^3 - \frac{a^2}{8}k - \frac{a^4}{384} = 0$$

das Problem der Nullstellenfindung in einem Polynom dritten Grades, was geschlossen funktioniert (siehe Cardanische Formeln), der Aufwand sich gegenüber den Nutzen nicht mehr lohnt.

Für die Weglängen gilt:

Variante 1:

$$L = \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \overset{\text{Sym}}{=} 2\int_0^{a/2} \sqrt{1 + 4k^2x^2}\,dx \qquad \left| \begin{array}{ll} z := 2kx & x = a/2 \Leftrightarrow z = ka \\ & x = 0 \Leftrightarrow z = 0 \\ \frac{dz}{dx} = 2k \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2k}dz & \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{ka} \sqrt{1 + z^2}\,dz \qquad \left| \begin{array}{ll} s := \operatorname{arsinh} z & z = 0 \Leftrightarrow s = \operatorname{arsinh} 0 = 0 \\ \Leftrightarrow z = \sinh s & z = ka \Leftrightarrow s = \operatorname{arsinh}(ka) \\ \frac{dz}{ds} = \cosh s \Leftrightarrow dz = \cosh s\,ds & \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\operatorname{arsin}(ka)} \sqrt{1 + \sinh^2 s}\,\cosh s\,ds \qquad \left| \cosh^2 - \sinh^2 = 1 \right.$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

$$= \frac{1}{k} \int_0^{\operatorname{arsinh}(ka)} \cosh s \cosh s \, ds$$

$$= \frac{1}{k} \left(\left[\cosh s \cdot \sinh s \right]_0^{\operatorname{arsin}(ka)} - \int_0^{\operatorname{arsin}(ka)} \sinh s \cdot \sinh s \cdot ds \right)$$

$$= \frac{1}{k} \left(\left[\sqrt{\sinh^2 s + 1} \, \sinh s \right]_0^{\operatorname{arsin}(ka)} - \int_0^{\operatorname{arsin}(ka)} (\cosh^2 s - 1) ds \right.$$

$$= \frac{1}{k} \left(\sqrt{(ka)^2 + 1} \, ka + \operatorname{arsin}(ka) - \int_0^{\operatorname{arsinh}} \cosh^2 s ds \right)$$

$\int \cosh^2 = A - \int \cosh^2$

$\Leftrightarrow \int \cosh^2 = \frac{1}{2} A$

$$= \frac{1}{2k} \left(\sqrt{(ka)^2 + 1} \, ka + \operatorname{arsin}(ka) \right)$$

Zusammen mit $k = \frac{4d}{a^2}$ und $a = 100$

erhalten wir bei $d = 10$ $k = \frac{1}{250}$

$$L = 125 \left(\sqrt{\left(\tfrac{2}{5}\right)^2 + 1} \left(\tfrac{2}{5}\right) + \operatorname{arsinh}\left(\tfrac{2}{5}\right) \right) \approx 102{,}606$$

und bei $d = 50$ $k = \frac{1}{50}$

$$L = 25 \left(\sqrt{2^2 + 1} \cdot 2 + \operatorname{arsinh}(2) \right) \approx 147{,}894$$

Variante 2

$$L = \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx \overset{\text{sym}}{=} 2 \int_0^{a/2} \sqrt{1 + \sinh\left(\tfrac{x}{k}\right)^2} \, dx$$

$z := \frac{x}{k}$ $\quad x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow z = \frac{a}{2k}$

$x = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{k} \Leftrightarrow dx = k dz$

$$= 2k \int_0^{\frac{a}{2k}} \sqrt{1 + \sinh(z)^2} \, dz$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

$$= 2k \int_0^{\frac{a}{2k}} \cosh(z)\,dz$$

$$= 2k \left[\sinh(z)\right]_0^{\frac{a}{2k}}$$

$$= 2k \sinh\left(\frac{a}{2k}\right)$$

Zusammen mit $k+d = k\cosh\left(\frac{a}{2k}\right)$ bzw $u := \frac{a}{2k} \Leftrightarrow a = 2ku$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{d}{k} = \cosh\left(\frac{a}{2k}\right) \qquad \Leftrightarrow k = \frac{a}{2u}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2du}{a} = \cosh(u)$$

$$\Leftrightarrow \cosh(u) - 1 - \frac{2du}{a} = 0$$

und $a = 100$, also

$$g(u) := \cosh(u) - 1 - \frac{1}{50} du \stackrel{!}{=} 0 \qquad \left(g'(u) = \sinh(u) - \frac{1}{50} d\right)$$

erhalten wir bei $d = 10$

Newton $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cosh(x_n) - 1 - \frac{1}{5} x_n}{\sinh(x_n) - \frac{1}{5}} \to 0{,}394844$

und $k = \dfrac{100}{2 \cdot 0{,}394844} \approx 126{,}6323$

$$\rightsquigarrow L = 2 \cdot 126{,}6323 \cdot \sinh(0{,}394844) \approx 102{,}619$$

und bei $d = 50$

Newton $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cosh(x_n) - 1 - x_n}{\sinh(x_n) - 1} \to 1{,}616138$

und $k = \dfrac{100}{2 \cdot 1{,}616138} \approx 30{,}93795$

$$\rightsquigarrow L = 2 \cdot 30{,}93795 \cdot \sinh(1{,}616138) \approx 149{,}583$$

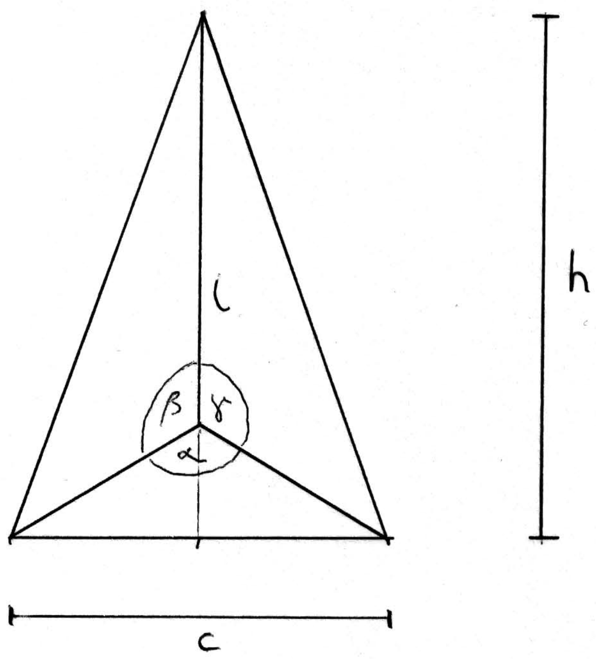
Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

Für $a=10$ ermitteln wir somit eine Kabellänge von 102,606 m nach Variante 1 und 102,619 m nach Variante 2, ein recht geringer Unterschied, der den höheren Aufwand für Variante 2 kaum rechtfertigt, für $d=50$, das Kabel hängt mit 50 m gegenüber einer Spannweite von 100 m beträchtlich durch, Werte von 147,894 m (Variante 1) und 149,583 m (Variante 2), einen Unterschied, der auch für praktische Überlegungen unbefriedigend groß ist.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

Aufgabe 3

Die Aufgabe gibt vor:



Das Dreieck ist wegen vorgegebenem $c \leq 3h$ mindestens ein Drittel so hoch wie breit. Wir definieren

$$f : [0,h] \to \mathbb{R} \quad , \quad l \mapsto l + 2\sqrt{(h-l)^2 + \left(\tfrac{c}{2}\right)^2} \; ,$$

sodass f die Länge der in der Aufgabe beschrieben Verstrebung in Abhängigkeit von l ausdrückt. Wir suchen das globale Minimum von f.

An den Rändern des Definitionsbereichs gilt

$$f(0) = 2\sqrt{h^2 + \left(\tfrac{c}{2}\right)^2}$$

$$f(h) = h + 2\sqrt{0^2 + \left(\tfrac{c}{2}\right)^2} = h + c$$

Um nach lokalen Minima zu suchen, leiten wir f einmal ab

$$f'(l) = 1 + 2\,\frac{-2(h-l)}{2\sqrt{(h-l)^2 + \left(\tfrac{c}{2}\right)^2}}$$

$$= 1 - 2\,\frac{h-l}{\sqrt{(h-l)^2 + \left(\tfrac{c}{2}\right)^2}}$$

Mathematatisches Modellieren ÜBlatt 1

und prüfen

$$f'(l)=0 \Leftrightarrow 1 = 2\frac{h-l}{\sqrt{(h-l)^2+(\frac{c}{2})^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(h-l)^2+(\tfrac{c}{2})^2} = 2(h-l)$$

da $h>l$

$$\Leftrightarrow (h-l)^2+(\tfrac{c}{2})^2 = 4(h-l)^2$$

$$\Leftrightarrow (h-l)^2 = \tfrac{1}{3}(\tfrac{c}{2})^2$$

$$\overset{\substack{h>l\\c>0}}{\Leftrightarrow} h-l = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow l = h-\frac{c}{2\sqrt{3}}$$

und setzen $l_0 := h-\frac{c}{2\sqrt{3}}$, dann gilt $0 < h-\frac{\sqrt{3}}{2}h = h-\frac{3h}{2\sqrt{3}} \overset{c\le 3h}{\le} l_0 \le h$.

Einsetzen ergibt

$$f(l_0) = h-\frac{c}{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{(h-(h-\tfrac{c}{2\sqrt{3}}))^2+(\tfrac{c}{2})^2}$$

$$= h-\frac{c}{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{(\tfrac{c}{2\sqrt{3}})^2+(\tfrac{c}{2})^2} \qquad \Big|\ (\tfrac{c}{2})^2 = (\tfrac{\sqrt{3}c}{\sqrt{3}2})^2 = 3(\tfrac{c}{\sqrt{3}2})^2$$

$$= h-\frac{c}{2\sqrt{3}} + 4\frac{c}{2\sqrt{3}}$$

$$= h+3\frac{c}{2\sqrt{3}} = h+\frac{\sqrt{3}c}{2}$$

Neben $f'(l_0)=0$ gilt nun auch

$$f(l_0) = h+\frac{\sqrt{3}c}{2} \le h+\frac{\sqrt{4}c}{2} = h+c = f(h)$$

$$f(l_0) = \sqrt{(h+\tfrac{\sqrt{3}c}{2})^2} = \sqrt{h^2+3(\tfrac{c}{2})^2+\sqrt{3}hc} \overset{*}{\le} \sqrt{4h^2+4(\tfrac{c}{2})^2} = 2\sqrt{h^2+(\tfrac{c}{2})^2} = f(0)$$

* wegen $h^2+3(\frac{c}{2})^2+\sqrt{3}hc \le 4h^2+4(\frac{c}{2})^2$

$$\Leftrightarrow 3h^2-\sqrt{3}hc+(\tfrac{c}{2})^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}h-\tfrac{c}{2})^2 \ge 0$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

Aus $f(l_0) \leq f(0)$, $f(l_0) \leq f(h)$ und $f'(l) = 0 \Leftrightarrow l = l_0$ und der Stetigkeit von f in $[0,2]$ folgt nun, dass f sein Minimum in l_0 annimmt.

Um die Winkel α, β, γ zu bestimmen, halten wir fest, $\beta = \gamma = 180° - \frac{\alpha}{2}$ und $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{c/2}{h-l}$,

also

$$\alpha = 2 \arctan \frac{c}{2(h-(h-\frac{c}{2\sqrt{3}}))} = 2 \arctan \sqrt{3} = 2 \cdot 60° = 120°,$$

Somit $\alpha = \beta = \gamma = 120°$.

Für $c = 15$ und $h = 24$ erhalten wir

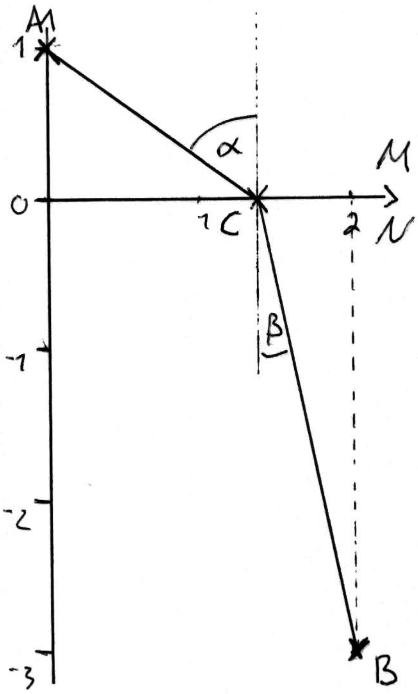
$$l = 24 - \frac{15}{2\sqrt{3}} = 24 - \frac{5}{2}\sqrt{3} \approx 19{,}67$$

und

$$f\left(24 - \frac{15}{2\sqrt{3}}\right) = 24 + \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx 36{,}99$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

Aufgabe 4



a)
Wir suchen den schnellsten Weg von $A(0|1)$ über $C(c|0)$ mit $c \in [0,2]$ nach $B(2|-3)$.

Wir bewegen uns mit Geschwindigkeit v_1 von A nach C, also über die Streckenlänge $|AC|$ und mit einer Geschwindigkeit v_2 von C nach B, also über die Streckenlänge $|CB|$.

Geschwindigkeit bemisst „Weg pro Zeit", wenn wir uns aber beispielsweise 2km mit einer Geschwindigkeit von 10km/h, dann entspricht das $\frac{1}{10\text{km/h}} = \frac{1}{10}\frac{\text{h}}{\text{km}} = 6\,\text{min/km}$, pro km also 6 min und wir brauchen 12 min für diese 2km.

Hier bewegen wir uns $|AC| = \sqrt{1+c^2}$ mit v_1 und $|CB| = \sqrt{3^2+(2-c)^2}$ mit v_2.

Die Abhängigkeit der Gesamtzeit von c beschreiben wir mit der Funktion

$$T: [0,2] \to \mathbb{R}, \quad c \mapsto \sqrt{1+c^2}\,\frac{1}{v_1} + \sqrt{9+(2-c)^2}\,\frac{1}{v_2}$$

von der wir nun das globale Minimum suchen.

Allerdings ist nicht gefordert, es konkret zu finden, sondern nur seine Existenz und Eindeutigkeit zu belegen.

T ist stetig und so nimmt T auf der kompakten Menge $[0,2]$ das Minimum (eventuell mehrfach) an; dies belegt die Existenz.

Alternativ ergibt sich die Existenz aus dem Zwischenwertsatz, angewendet auf die erste Ableitung von T.

Es gilt

$$T'(c) = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\frac{1}{v_1} + \frac{-2(2-c)}{2\sqrt{9+(2-c)^2}}\frac{1}{v_2} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\frac{1}{v_1} + \frac{c-2}{\sqrt{9+(2-c)^2}}\frac{1}{v_2}$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

und T' ist offenkundig selbst stetig, dazu ist

$$T'(0) = \frac{-2}{\sqrt{9+(2-0)^2}} \frac{1}{v_2} < 0$$

$$T'(2) = \frac{2}{\sqrt{1+2^2}} \frac{1}{v_1} > 0 \quad ,$$

es gibt also eine Stelle c_0 mit $T'(c_0)=0$. Jetzt könnte c_0 nur lokales Minimum sein oder nicht einmal das (Sattelpunkt im Funktionsgraphen) und für jede weitere Stelle $\tilde{c}_0$ mit $T'(\tilde{c}_0)=0$ das Gleiche gelten, dann wäre aber $T(0)$ oder $T(2)$ globales Minimum.

Wir sehen, nur $T'(c_0)$ zu fordern und darauf zu argumentieren, reicht nicht.

Könnten wir allerdings zeigen, dass T' streng monoton wächst, was gleichbedeutend mit der (strengen) Konvexität von T, bzw $T''(c)>0 \ \forall c\in[0,2]$ ist, dann reicht das Argument T ist stetig und $\exists c_0\in[0,2]$ mit $T'(c_0)=0$ aus, nicht nur Existenz, sondern auch Eindeutigkeit des globalen Minimums zu zeigen.

Leiten wir noch einmal ab

$$T''(c) = \frac{1\sqrt{1+c^2} - c\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}}{1+c^2}\frac{1}{v_1} + \frac{\sqrt{9+(2-c)^2} - (c-2)(-2)(2-c)\cdot\frac{1}{2\sqrt{9+(2-c)^2}}}{9+(2-c)^2}\frac{1}{v_2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+c^2} - \frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}}}{1+c^2}\frac{1}{v_1} + \frac{\sqrt{9+(2-c)^2} - 2(2-c)^2\frac{1}{\sqrt{9+(2-c)^2}}}{9+(2-c)^2}\frac{1}{v_2}$$

$$= \frac{1+c^2-c^2}{\sqrt{1+c^2}^3}\frac{1}{v_1} + \frac{9+(2-c)^2-(2-c)^2}{\sqrt{9+(2-c)^2}^3}\frac{1}{v_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}^3}\frac{1}{v_1} + \frac{9}{\sqrt{9+(2-c)^2}^3}\frac{1}{v_2} > 0, \ c\in[0,2]$$

Mathematatisches Modellieren ÜBlatt 1

b)

Für die Minimalstelle c_0 gilt

$$\sin\alpha = \frac{c_0}{|AC|} = \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2+1}}$$

$$\sin\beta = \frac{2-c_0}{|BC|} = \frac{2-c_0}{\sqrt{(2-c_0)^2+9}}$$

Wir prüfen

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2+1}} \frac{1}{v_1}$$

$$\frac{\sin\beta}{v_2} = \frac{2-c_0}{\sqrt{(2-c_0)^2+9}} \frac{1}{v_2}$$

Wegen $T'(c_0)=0$ gilt

$$\frac{c_0}{\sqrt{1+c_0^2}} \frac{1}{v_1} = \frac{2-c_0}{\sqrt{(2-c)^2+9}} \frac{1}{v_2}$$

also

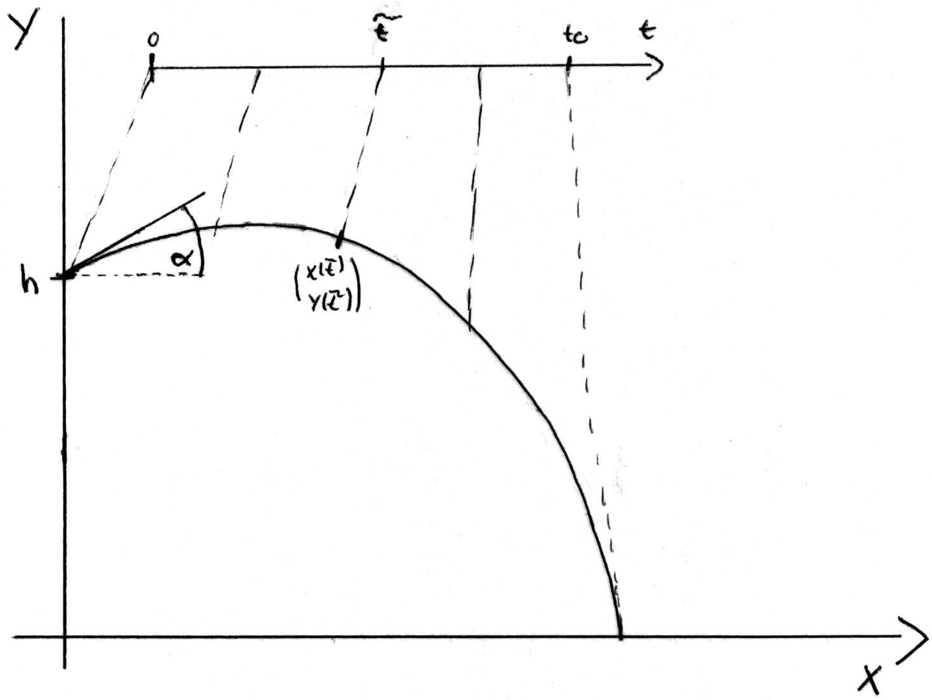
$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}$$

was zu zeigen war.

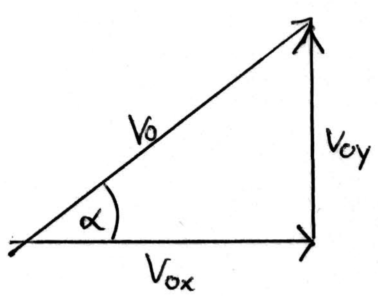
Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

Aufgabe 5

Abhängig von t legt der Stein den Weg $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ zurück



Es sind v_0, α und h gegeben.



Vektoriell betrachtet besteht v_0 aus der Summe der Vektoren nur in x und nur in y-Richtung.

Nur auf den Betrag bezogen gilt

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$$

So erhalten wir

$$x(t) = v_{0x}\, t$$

$$y(t) = h + v_{0y}\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

für $t \in [0, t_0]$.

Hierbei ist $[0, t_0]$ das größte Intervall für das $y(t) \geq 0 \ \forall t \in [0, t_0]$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

gilt, sobald der Stein im Begriff ist unter den Boden zu tauchen, beschreiben $y(t)$ und $x(t)$ keine angemessene Modellierung mehr.

a)

$V_{0y} = V_0 = 5$

$V_{0x} = 0$

$h = 1{,}5$

also

$x(t) = 0$

$y(t) = 1{,}5 + 5t - \frac{1}{2} 9{,}81 t^2$

Wir prüfen

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{1000}{981} t - \frac{100}{327} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{500}{981} + \underbrace{\sqrt{\left(\frac{500}{981}\right)^2 + \frac{100}{327}}}_{\geq \frac{500}{981}} \approx 1{,}26$$

deshalb, damit $t \geq 0$

und es ergibt sich $t_0 \approx 1{,}26$.

So dauert es etwa 1,26 Sekunden, bis der Stein auf den Boden auftrifft.

b)

$V_{0y} = 0, \; V_{0x} = 7, \; h = 2$

$y(t) = 2 - \frac{1}{2} 9{,}81 t^2$

und

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{400}{981} \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t \approx 0{,}64$$

Das Auftreffen geschieht etwa 0,64 Sekunden nach Abwurf.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

c)

$V_0 = 4, \ \alpha = 30°, \ h = 1$

$V_{oy} = \sin 30° \cdot V_0 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$V_{ox} = \cos 30° \cdot V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$

$X(t) = V_{ox} \cdot t = 2\sqrt{3}\, t$

$Y(t) = h + Y_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 = 1 + 2t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 t^2$

wir prüfen

$Y(t) = 0 \iff 1 + 2t - \frac{1}{2} 9{,}81 t^2 = 0$

$\iff t^2 - \frac{400}{981} t - \frac{200}{981} = 0$

$\iff t_{1,2} = \frac{200}{981} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{200}{981}\right)^2 + \frac{200}{981}}}_{> \frac{200}{981}}$

$\overset{t \geq 0}{\iff} t = \frac{200}{981} + \sqrt{\left(\frac{200}{981}\right)^2 + \frac{200}{981}} \approx 0{,}700$

und

$X(0{,}700) = 2\sqrt{3} \cdot 0{,}700 \approx 2{,}4224.$

Nach etwa 0,7 Sekunden trifft der Stein, etwa 2,42 Meter von der Abwurfstelle entfernt, auf dem Boden auf.

Wie lang ist die Flugbahn, die der Stein dabei zurückgelegt hat?

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 1

Zum Zeitpunkt t ist die Änderungsrate des Ortes des Steins in x-Richtung $x'(t)$, in y-Richtung $y'(t)$.

Anschaulich ausgedrückt:

In einem dt kleinen (also beliebig kleinen, deshalb ist es formal unsauber) Zeitabschnitt bewegt sich der Stein $dt \cdot x'(t)$ in x-, $dt \cdot y'(t)$ in y-Richtung, so ist die Weglänge $\sqrt{(dt\, x'(t))^2 + (dt \cdot y'(t))^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$

und in der Summe über die Zeit von $t=0$ bis $t=0{,}700$ erhalten wir

$$L = \int_0^{0{,}700} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{0{,}700} \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2-9{,}81t)^2}\, dt \qquad \left|\; \begin{array}{l} x'(t) = 2\sqrt{3} \\ y'(t) = 2-9{,}81 \end{array} \right.$$

$$= 2\sqrt{3} \int_0^{0{,}700} \sqrt{1+\left(\frac{2-9{,}81t}{2\sqrt{3}}\right)^2}\, dt \qquad \left|\; \begin{array}{l} s := \frac{-2+9{,}81t}{2\sqrt{3}} \\ \frac{ds}{dt} = \frac{9{,}81}{2\sqrt{3}} \end{array} \right.$$

$$= 2\sqrt{3} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{2{,}4335 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{1+s^2}\, \frac{2\sqrt{3}}{9{,}81}\, ds$$

$$= \frac{12}{9{,}81} \int_{-1/\sqrt{3}}^{2{,}4335 \frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{1+s^2}\, ds$$

$$\overset{\text{nach Aufg 2}}{=\!=} \frac{12}{9{,}81} \left[\frac{1}{2}\left(s\sqrt{1+s^2} + \operatorname{arsinh}(s)\right) \right]_{-1/\sqrt{3}}^{2{,}4335 \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\approx \frac{6}{9{,}81} \left(3{,}56380 - (-1{,}21597)\right) \approx 2{,}923$$

Der Stein hat in der Luft einen Weg von etwa 2,92 Metern zurückgelegt, bevor er auf dem Boden aufkam.