Mathematisches Modellieren ÜBlatt 2

Aufgabe 1

a)

Sei a_n die Anzahl de Forellen im Fluss nach n Jahren,

Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir

$$a_0 = 50 \quad , \quad a_{n+1} - a_n = 100 a_n$$

Letzteres, also die Differenzengleichung ist äquivalent zu $a_{n+1} = 101 a_n$, was zusammen mit dem Startwert auf

$$a_n = 101^n a_0$$

führt (Beweis leicht per vollst Induktion).

b)

a_n wie oben, auch mit $a_0 = 50$, aber diesmal mit

$$a_{n+1} - a_n = 100 a_n - k$$

als Differenzengleichung.

Somit $a_{n+1} = 101 a_n - k$.

Wir machen uns einen Eindruck:

$$a_1 = 101 a_0 - k$$

$$a_2 = 101 a_1 - k = 101(101 a_0 - k) - k$$
$$= 101^2 a_0 - 101 k - k$$

$$a_3 = 101 a_2 - k = 101(101^2 a_0 - 101 k - k) - k$$
$$= 101^3 a_0 - 101^2 k - 101 k - k$$

und vermuten

$$a_n = 101^n a_0 - k \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} 101^i}_{\text{geom. Reihe}}$$

und formen etwas um

$$a_n = 101^n a_0 - k \frac{1-101^n}{1-101}$$

$$= 101^n a_0 + \frac{k}{100}(1-101^n)$$

$$= 101^n a_0 + \frac{k}{100} - \frac{k}{100} 101^n$$

$$= \left(a_0 - \frac{k}{100}\right) 101^n + \frac{k}{100}$$

(Beweis per Induktion

$a_0 = a_0 - \frac{k}{100} + \frac{k}{100}$ ✓

$n \to n+1$

$$a_{n+1} = 101 a_n - k \overset{IV}{=} 101\left(\left(a_0 - \frac{k}{100}\right) 101^n + \frac{k}{100}\right) - k$$

$$= \left(a_0 - \frac{k}{100}\right) 101^{n+1} + \frac{101}{100} k - \frac{100}{100} k$$

$$= \left(a_0 - \frac{k}{100}\right) 101^{n+1} + \frac{k}{100} \quad ✓$$)

Betrachten wir $a_n = \left(a_0 - \frac{k}{100}\right) 101^n + \frac{k}{100}$, so erkennen wir $101^{n+1} \to \infty$ streng monoton für $n \to \infty$, dh genau für $a_0 - \frac{k}{100} \geq 0$ fällt a_n nicht unter jeden Wert kleiner a_0 und somit auch Null.

Umformung ergibt

$$a_0 - \frac{k}{100} \geq 0 \iff k \leq a_0 \cdot 100$$

und mit $a_0 = 50$ ist 5000 das maximale k, damit die Population nie ausstirbt. Für $k = 5000$ gilt sogar $a_n = 50$ konstant.

c)

Wir haben in Fluss A konstant 50 Forellen und in Fluss B sind genau dann immer mehr als 50 Forellen, wenn die Zahl nicht sinkt (siehe b)).

Also gilt $l = 70 \cdot 100 = 7000$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 2

Aufgabe 2

Wir können das Problem kontinuierlich, oder, mit gewissen Annahmen, mit diskreten Zeitschritten Lösen. Der erste Ansatz führt auf das Lösen einer Differentialgleichung, der zweite auf das Lösen einer Differenzen-gleichung.

Kontinuierlich

Sei $u: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto u(t)$ die Körpertemperatur des Mordopfers zum Zeitpunkt t in Minuten nach dem Mord.

Die Abkühlung des Körpers, d.h. die Änderungsrate der Temperatur $u'(t)$ wird nun als proportional zur Differenz von Temperatur $u(t)$ zur Außentemperatur A angenommen. Diesen Zusammenhang können wir umformen. (unter der Annahme, dass $u(t) > A$ stets gilt):

$$u'(t) = c\,(u(t) - A) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u'(t)}{u(t)-A} = c \qquad \Big|\ \text{Integrieren auf beiden Seiten}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t \frac{u'(s)}{u(s)-A}\,ds = \int_0^t c\,dr \qquad \Big|\ \text{Substitution: } u' = \frac{du}{ds}$$

$$s=0 \Leftrightarrow u = u(0)$$
$$s=t \Leftrightarrow u = u(t)$$

$$\Leftrightarrow \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{u-A}\,du = ct$$

$$\Leftrightarrow \Big[\log(u-A)\Big]_{u(0)}^{u(t)} = ct$$

$$\Leftrightarrow \log(u(t)-A) - \log(u(0)-A) = ct$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{u(t)-A}{u(0)-A} = ct$$

Damit können wir auch r bestimmen

$$27 = u(r) = 20 + 17 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{r}{30}}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{17} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{r}{30}}$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{7}{17} = \frac{r}{30} \cdot \log\frac{5}{7}$$

$$\Leftrightarrow r = 30\,\frac{\log\frac{7}{17}}{\log\frac{5}{7}} = 30\,\frac{\log 7 - \log 17}{\log 5 - \log 7} \approx 79{,}11$$

Der Mord fand somit etwa 79 Minuten vor 12:36, also um ca 11:17 statt.

diskret

Sei u_n die Körpertemperatur des Mordopfers zum Zeitpunkt $n \cdot \underbrace{1}_{\text{Schrittweite}}$ in Minuten nach dem Mord.

Die Abkühlung des Körpers, d.h. die Temperaturänderung von einem Zeitpunkt auf den nächste, also nach jeweils einem Schritt, $u_{n+1} - u_n$ wird als proportional zur Differenz von Temperatur u_n zur Außentemperatur angenommen.

Somit wissen wir einerseits

$$u_0 = 37, \quad u_r = 27, \quad u_{r+30} = 25$$

mit r als die Minuten zwischen Mord und erster Messung, andererseits

$$u_{n+1} - u_n = c(u_n - 20) \qquad c \in \mathbb{R}$$

Somit

$$u_{n+1} = (c+1)\,u_n - 20c\,.$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 2

$$\Leftrightarrow \frac{u(t)-A}{u(0)-A} = e^{ct}$$

$$\Leftrightarrow u(t) = A + (u(0)-A)e^{ct}$$

D.h. für $u(0)=37$ und $A=20$ erhalten wir

$$u(t) = 20 + 17e^{ct}.$$

Wir wissen nicht, wann der Kommissar die erste Messung durchführte, wissen aber, die zweite erfolgte 30 Minuten später. Setzen wir die erste auf $r \in \mathbb{R}$ an und setzen ein, was wir wissen

$$\begin{cases} 27 = u(r) = 20 + 17e^{cr} \\ 25 = u(r+30) = 20 + 17e^{c(r+30)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{17} = e^{cr} \\ \frac{5}{17} = e^{c(r+30} = e^{cr} \cdot e^{c\cdot 30} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{5}{17}}{\frac{7}{17}} = \frac{e^{cr}e^{c\cdot 30}}{e^{cr}} = e^{c30}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{7} = e^{c30} \quad \Leftrightarrow e^{c} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{30}} \quad \Leftrightarrow c = \frac{1}{30}\log\frac{5}{7}$$

e^c eingesetzt und wir erhalten

$$u(t) = 20 + 17 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{30}}$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 2

Analoge Rechnung zu der in Aufgabe 1 führt auf

$$u_n = (u_0 - 20)(c+1)^n + 20.$$

Damit stellen wir zusammen

$$27 = (37-20)(c+1)^r + 20 = 17(c+1)^r + 20$$
$$25 = (37-20)(c+1)^{r+30} + 20 = 17(c+1)^{r+30} + 20$$

Somit

$$\frac{7}{17} = (c+1)^r \quad \text{und} \quad \frac{5}{17} = (c+1)^{r+30}$$

Dividieren ergibt c:

$$\frac{\frac{5}{17}}{\frac{7}{17}} = \frac{(c+1)^r (c+1)^{30}}{(c+1)^r}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{7} = (c+1)^{30} \quad \Leftrightarrow \quad c = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{30}} - 1.$$

Dies können wir wiederum einsetzen

$$\frac{7}{17} = \left(\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{30}} - 1 + 1\right)^r = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{r}{30}}$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{7}{17} = \frac{r}{30} \log\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\Rightarrow r = 30 \frac{\log 7 - \log 17}{\log 5 - \log 7} \approx 79{,}11$$

Der Mord fand somit wie im kontinuierlichen Modell ermittelt ca 79 Minuten vor 12:36, also um ca 11:17 statt.

(Hierbei ist natürlich zu bedenken, das im diskreten Fall r nur ganzzahlige Werte annehmen kann und wir am Besten runden.)

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 2

Vergleichen wir nun

$$u(t) = 20 + 17 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{30}} \qquad \text{für } t \in [0,\infty)$$

mit

$$u_n = 20 + 17 \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{n}{30}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

So verwundert es nicht, warum das kontinuierliche, wie das diskrete Modell auf den gleichen Morzeitpunkt schließen.

Aber warum macht die im kleinen nicht korrekte Modellannahme, die Temperaturveränderung verhalte sich in jedem Zeitschritt linear, auf Sicht größer gleich eine Minute keinen Fehler?

Betrachten wir dazu $u_{rel}(t) := u(t) - 20$ bzw $u_{rel,n} := u_n - 20$ als Relativtemperatur, dann verändert sich die diskrete Variante $u_{rel,n}$ in einer Minute um den Faktor $\left(\frac{5}{7}\right)^{1/30} - 1$, wie in unserer Lösung zu erkennen.
Im Kontinuierlichen Fall ist $u_{rel}(t) = 17e^{ct}$, d.h

$$\begin{aligned} u_{rel}(t+1) - u_{rel}(t) &= 17e^{c(t+1)} - 17e^{ct} \\ &= e^c 17e^{ct} - 17e^{ct} \\ &= u_{rel}(t)\,(e^c - 1) \end{aligned}$$

und so verändert sich u_{rel} in einer Minute jeweils auch einen konstanten Faktor. Betrachtet man nur ganzzahlige Zeitpunkte könnte die Veränderung dazwischen genausogut linear verlaufen.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 2

Aufgabe 3

a)

Analog zu Aufgabe 1 wissen wir, zu

$$a_{n+1} - a_n = b a_n + c$$
$$\tilde{a}_{n+1} - \tilde{a}_n = b\tilde{a}_n + c \qquad \text{für } b,c \in \mathbb{R} \text{ mit } b \neq 0$$

gilt

$$a_n = \left(a_0 + \frac{c}{b}\right)(b+1)^n - \frac{c}{b}$$
$$\tilde{a}_n = \left(\tilde{a}_0 + \frac{c}{b}\right)(b+1)^n - \frac{c}{b}.$$

Mit $a_0 > \tilde{a}_0$ folgt

$$\left(a_0 + \frac{c}{b}\right)(b+1)^n - \frac{c}{b} \geq \left(\tilde{a}_0 + \frac{c}{b}\right)(b+1)^n - \frac{c}{b} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \left(a_0 + \frac{c}{b}\right)(b+1)^n \geq \left(\tilde{a}_0 + \frac{c}{b}\right)(b+1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \left(a_0 + \frac{c}{b} - \tilde{a}_0 - \frac{c}{b}\right)(b+1)^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a_0 - \tilde{a}_0)}_{>0}(b+1)^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow b \geq -1$$

Mit $b=0$, also

$$a_{n+1} - a_n = c$$
$$\tilde{a}_{n+1} - \tilde{a}_n = c$$

erhalten wir

$$a_n = a_0 + n \cdot c$$
$$\tilde{a}_{n+1} = \tilde{a}_0 + n \cdot c$$

und wegen

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 2

$$\tilde{a}_n \geq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{a}_0 + n \cdot c \geq a_0 + n \cdot c$$

$$\Leftrightarrow \tilde{a}_0 \geq a_0$$

gilt zusammen $\tilde{a}_n \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq -1$ falls $\tilde{a}_0 > a_0$.

b)

Stellen wir zusammen. Wir haben

$$a_n = \left(a_0 + \frac{c}{b}\right)(b+1)^n - \frac{c}{b}$$

$$\alpha_n = \left(\alpha_0 + \frac{\gamma}{\beta}\right)(\beta+1)^n - \frac{\gamma}{\beta}$$

mit $a_0 \geq \alpha_0$, $a_0 \geq 0$, $c \geq 0$, $c \geq \gamma$, $b \geq \beta$.

Nun ist

$$a_n \geq \alpha_n \Leftrightarrow \left(a_0 + \frac{c}{b}\right)(b+1)^n - \frac{c}{b} \geq \left(\alpha_0 + \frac{\gamma}{\beta}\right)(\beta+1)^n - \frac{\gamma}{\beta}.$$

Die zweite Ungleichung zu beweisen erscheint allerdings recht schwer. Unter Einsatz der Differenzengleichungen beweist sich die Aussage überraschenderweise nahezu von selbst. Wir haben eine rekursive Definition beider Folgen

$$a_{n+1} = (b+1)a_n + c$$

$$\alpha_{n+1} = (\beta+1)\alpha_n + \gamma$$

es bietet sich an:

Wir beweisen $a_n \geq \alpha_n$ für alle n per vollständiger Induktion über n

IA $a_0 \geq \alpha_0$ über die Aufgabenstellung ✓

IV $a_n \geq \alpha_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$

IS $n \to n+1$

$$a_{n+1} = (b+1)a_n + c \overset{IV}{\geq} (b+1)\alpha_n + c \overset{\substack{b \geq \beta \\ c \geq \gamma}}{\geq} (\beta+1)\alpha_n + \gamma = \alpha_{n+1} \qquad \square$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 2

Aufgabe 4

Wir haben die Aussage

$$A_n: \quad a_n = \alpha^n a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \beta_{n-1-k}$$

was gleichbedeutend ist mit

$$A_n: \; a_n = \alpha^n a_0 + \alpha^{n-1}\beta_0 + \alpha^{n-2}\beta_1 + \dots + \alpha\beta_{n-2} + \beta_{n-1}$$

und zeigen per vollständiger Induktion über $n \in \{0,1,2,..\}$, A_n gilt für alle $n \in \{0,1,2,...\}$

IA:

$$a_0 = \alpha^0 \cdot a_0 = a_0 \quad \checkmark$$

IV:

A_n gilt für ein $n \in \{0,1,2,..\}$

IS: $n \to n+1$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha a_n + \beta_n \\ &= \alpha(\alpha^n a_0 + \alpha^{n-1}\beta_0 + \alpha^{n-2}\beta_1 + \dots + \alpha^2\beta_{n-2} + \alpha\beta_{n-1}) + \beta_n \\ &= \alpha^{n+1} a_0 + \alpha^n\beta_0 + \alpha^{n-1}\beta_1 + \dots + \alpha^2\beta_{n-2} + \alpha\beta_{n-1} + \beta_n. \end{aligned}$$

was der Aussage A_{n+1} entspricht. $\square$

oder etwas formaler ausschauend mit Summenzeichen

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha a_n + \beta_n \\ &\overset{IV}{=} \alpha(\alpha^n a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \beta_{n-1-k}) + \beta_n \\ &= \alpha^{n+1} a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{k+1}\beta_{n-(k+1)} + \alpha^0\beta_n \qquad | \text{ Indexversch } k+1 \to k \\ &= \alpha^{n+1} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \beta_{n-k} + \alpha^0\beta_n \\ &= \alpha^{n+1} a_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta_{n-k} \end{aligned}$$

$\square$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 2

b)

Machen wir uns etwas deutlicher, was wir überhaupt zeigen wollen

$$a_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k\right) \cdot a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=n-k}^{n-1} \alpha_j\right) \cdot \beta_{n-1-k}$$

$$\begin{aligned} = & \ \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1} a_0 \\ + & \ \beta_{n-1} \\ + & \ \alpha_{n-1} \beta_{n-2} \\ + & \ \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \beta_{n-3} \\ + & \ \alpha_{n-3} \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \beta_{n-4} \\ & \ \vdots \\ + & \ \alpha_2 \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \beta_1 \\ + & \ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \beta_0 \end{aligned}$$

für $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Wir wissen zudem, $a_{n+1} = \alpha_n a_n + \beta_n$ gilt, ein Induktionsbeweis liegt nahe. Schauen wir bei der Darstellung für a_n in der eher Aufgelisteten Darstellung genauer hin, sehen wir, der Schritt von n nach $n+1$ gelingt leicht:

Beweis per vollständiger Induktion über n

IA $a_0 = a_0$ ✓

$a_1 = \alpha_0 a_0 + \beta_0$ ✓ (nur weil wir

$a_2 = \alpha_0 \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_0 \beta_0$ ✓ neugierig sind, $a_0 = a_0$ reicht)

IV $a_n = \ldots$ gilt für ein n

IS $n \to n+1$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 2

$$a_{n+1} = \alpha_n a_n + \beta_n$$

$$
\begin{aligned}
= \boxed{\alpha_n} \cdot \Big(& \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1} a_0 \\
+ & \beta_{n-1} \\
+ & \alpha_{n-1} \beta_{n-2} \\
+ & \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \beta_{n-3} \\
& \vdots \\
+ & \alpha_2 \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \beta_1 \\
+ & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \beta_0 \Big) \\
+ & \boxed{\beta_n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \boxed{\alpha_n} a_0 \\
+ & \boxed{\beta_n} \\
+ & \boxed{\alpha_n} \beta_{n-1} \\
+ & \alpha_{n-1} \boxed{\alpha_n} \beta_{n-2} \\
+ & \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \boxed{\alpha_n} \beta_{n-3} \\
& \vdots \\
+ & \alpha_2 \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \boxed{\alpha_n} \beta_1 \\
+ & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \boxed{\alpha_n} \beta_0
\end{aligned}
$$

$\square$