Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Aufgabe 1 + 2

a)

In den zu beweisenden Satz haben sich leider zwei Fehler eingeschlichen.

- Für $f: I \to \mathbb{R}$ würde für eine Folge (a_n) mit einem a_n, für das $f(a_n) \in \mathbb{R} \setminus I$ gilt $a_{n+2} = f(a_{n+1}) = f(\underbrace{f(a_n)}_{\notin I})$ nicht definiert sein. ↯

  Sei also $f: I \to I$

- Für $f(x) \geq f(x_0)$ mit $f(x_0) < x_0$ würde für $f(x) = (x-1)^2$ und die durch $a_0 = 2$ und $a_{n+1} = f(a_n)$ definierte Folge $x_0 = 1$, die Anwendbarkeit des Satzes, aber

$$a_1 = 1, \; a_2 = 0, \; a_3 = 1, \; a_4 = 0, \ldots$$

also $a_n \not\to x_0$ gelten. ↯

Sei also insgesamt der zu beweisende Satz:

Es sei I ein Intervall, $f: I \to I$ stetig. Es gebe ein $x_0 \in I$ mit

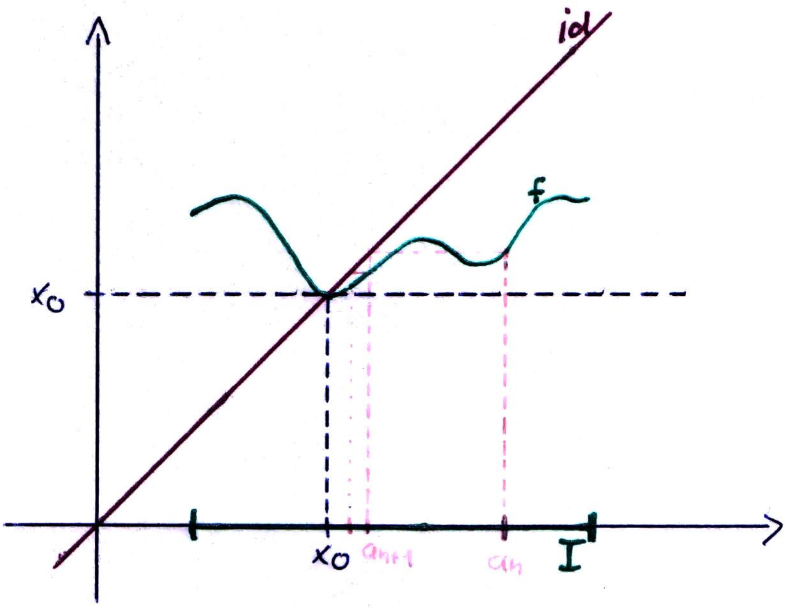
i) $f(x) \geq x_0$ für alle $x \in I$

ii) $f(x) < x$ für alle $x \in I \cap (x_0, \infty)$.

Dann konvergiert die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = f(a_n)$ für jede Wahl von $a_0 \in I$ gegen x_0.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Die Mechanismen des Satzes lassen sich ganz gut veranschaulichen:



Der Graph von f muss sich links von x_0 oberhalb $x \mapsto x_0$ befinden und rechts von x_0 zwischen $x \mapsto x_0$ und der Identität $x \mapsto x$.
Startet die Folge links von x_0, so verläuft sie im Folgenden rechts davon, fällt aber streng monoton mit unterer Schranke x_0. Man spiele hierfür im Geiste einige der hier orange angedeuteten Schritte einmal durch.

Nun zum formalen Beweis:

Aus $f(x) \geq x_0$ für alle $x \in I$ und $x_0 \in I$ folgt $f(x_0) \geq x_0$.

Weiterhin gilt $f(x) < x < x_0$ für alle $x \in I \cap (x_0, \infty)$, woraus

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \leq x_0$ folgt und mit der Stetigkeit von f auch $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$,

also $f(x_0) \leq x_0$.

Zusammen erhalten wir $f(x_0) = x_0$

Nun zum Startwert:

Für $a_0 \in I$ gilt $a_1 = f(a_0) \geq x_0$ wegen i). Deshalb betrachten wir im Folgenden $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 \geq x_0$, die als Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ genau dann konvergiert, wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert und dann auch genau gegen den gleichen Grenzwert.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Wir beweisen zunächst zwei Behauptungen

Beh 1: (a_n) ist nach unten beschränkt, genauer: $a_n \in [x_0, \infty) \cap I \ \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis per Induktion, da $a_1 \geq x_0$ und für jedes $a_n \in [x_0, \infty) \cap I$ auch

$a_{n+1} = f(a_n) \begin{cases} \in I \\ \geq x_0 \end{cases}$ gilt.

//

Beh 2: (a_n) ist monoton fallend für $a_1 \in I \cap [x_0, \infty)$

Beweis.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Fall $a_n = x_0$:

Dann ist $a_{n+1} = f(x_0) = x_0 = a_n$ ✓

Fall $a_n \in I \cap (x_0, \infty)$

Dann ist $a_{n+1} = f(a_n) < a_n$ wegen ii) und $a_{n+1} \geq x_0$ nach Beh 1 ✓.

D.h. für jedes $a_n \in I \cap [x_0, \infty)$ gilt $a_{n+1} \in I \cap [x_0, \infty)$ mit $a_{n+1} < a_n$ und die Monotonie folgt damit per Induktion über n.

//

Jetzt können wir eine d. beiden Aussagen des Satzes zeigen:

<u>(a_n) konvergiert</u>

Beweis.

Nach Beh 1 ist (a_n) nach unten beschränkt und nach Beh 2 ist (a_n) monoton fallend, woraus sich die Konvergenz ergibt.

<u>(a_n) konvergiert gegen x_0</u>

Beweis.

Wie gezeigt, konvergiert (a_n) gegen ein $a \in I \cap [x_0, \infty)$.

Konvergiert (a_n) gegen a, so konvergiert auch (a_{n+1}) gegen a.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Nun gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \overset{\text{da } f \text{ stetig}}{=} f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(a).$$

Also, wie wenig überraschend, müssen wir das $a \in I \cap [x_0, \infty)$ finden, für das $a = f(a)$ gilt.

Angenommen $a \in I \cap (x_0, \infty)$, dann gilt wegen ii) $f(a) < a$ ↯

Also ist $a = x_0$ □

b)

Es ist $a_{n+1} = f(a_n)$ mit $f: [0,\pi] \to [0,\pi]$, $x \mapsto \sin x$

$x_0 \mapsto x_0$ für $x_0 := 0$.

Dazu gilt $\sin(x) < x$ für alle $x \in (0,\pi] = [0,\pi] \cap (0,\infty)$, also ii)

(Nach Taylorentwicklung bis Grad 1 und Lagrange-Restglied an Stelle 0

$$\sin(x) = \sin(0)\cdot x^0 + \sin'(0)x + \tfrac{1}{2}\sin''(\xi)x^2 \quad \text{mit } \xi \in (0,x) \subset (0,\pi)$$
$$= x - \tfrac{1}{2}\sin(\xi)x^2 < x - \tfrac{1}{2}\sin(0)x^2 = x \quad)$$

und $\sin(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,\pi]$, also i)

Somit konvergiert (a_n) für alle Startwerte aus $[0,\pi] \supset \{1, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\}$ nach dem Satz gegen $x_0 = 0$.

c)

Betrachten wir $x \mapsto \sqrt{x} + 2$, dann gilt $4 \mapsto \sqrt{4} + 2 = 4$

und wegen $x \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 4$ können wir

$f: [4,\infty) \to [4,\infty)$ mit $x \mapsto \sqrt{x} + 2$ definieren, mit $f(x_0) = x_0$ für $x_0 = 4$

und $f(x) \geq x_0$ für alle $x \in [4,\infty)$. i)

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Für $x \geq 4$ gilt nun

$$\sqrt{x} + 2 < x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - \sqrt{x} - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{3}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

d.h. für $x \geq 4 > 3 = \frac{3+\sqrt{9}}{2} > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ gilt $\sqrt{x} + 2 = f(x) < x$ ii)

Somit konvergiert (b_n) mit $b_{n+1} = f(b_n)$ für alle Startwerte aus $[4, \infty) \supset \{5, 125, 5123\}$ nach dem Satz gegen $x_0 = 4$.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Aufgabe 3

a)

Wir haben die DZGL $b_{n+1} - b_n - b_{n-1} = 0$ und die Startwerte $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Ignorieren wir zunächst die Startwerte, vergrößert sich zunächst die Menge der Lösungen - der Folgen, die die DZGL erfüllen.

Andererseits können wir diese Menge auch wieder auf eine Teilmenge einschränken, dadurch können wir möglicherweise eine Lösung finden, die wir ohne diese Einschränkung nicht gefunden hätten und die dennoch die Startwerte erfüllt.

Ansatz: $b_n = x^n$ mit einem $x \in \mathbb{R}$ erfüllt die DZGL.

Wenn dies stimmt, finden wir vielleicht die Menge der x, für die x^n eine Lösung ist, alle b_n die sich nicht als x^n schreiben lassen, ignorieren wir (zunächst).

Wir setzen x^n in b_n für die DZGL ein:

$$x^{n+1} - x^n - x^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)x^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \vee x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0, \varphi, \psi\} \quad \text{mit } \varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Bevor wir weitermachen, zunächst ein paar „Rechenregeln" für φ, ψ:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

$$\psi^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1+\psi$$

$$\varphi\psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$$

$$\varphi = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \frac{\varphi+1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\psi = \frac{\psi^2}{\psi} = \frac{\psi+1}{\psi} = 1 + \frac{1}{\psi}$$

Nun betrachten wir für $x \in \{0, \varphi, \psi\}$ unsere Lösungen $b_n = x^n$

$x = 0$:

$b_0 = b_1 = b_2 = b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$x = \varphi$

$b_0 = 1, \; b_1 = \varphi, \; b_2 = \varphi^2 = 1+\varphi, \; b_3 = \varphi^3 = \varphi(1+\varphi) = \varphi + \varphi^2, \ldots$

$x = \psi$

$b_0 = 1, \; b_1 = \psi, \; b_2 = \psi^2 = 1+\psi, \; b_3 = \psi^3 = \psi(1+\psi) = \psi + \psi^2, \ldots$

Sind b_0, b_1 beliebig aus $\mathbb{R}$ gegeben, können wir kaum (außer $b_0 = b_1 = 0$, $b_0 = 1, b_1 = \varphi$ oder $b_0 = 1, b_1 = \psi$) erwarten, dass eine der Lösungen unsere gesuchte Lösung ist. Aber es gilt die

Superpositionseigenschaft:

Erfüllen $a(n)$ und $b(n)$ die DZGL, also

$$a(n+1) - a(n) - a(n-1) = 0$$
$$b(n+1) - b(n) - b(n-1) = 0,$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

So gilt natürlich für $r, s \in \mathbb{R}$

$$r(a(n+1) - a(n) - a(n-1)) = ra(n+1) - ra(n) - ra(n-1) = 0$$
$$s(b(n+1) - b(n) - b(n-1)) = sb(n+1) - sb(n) - sb(n-1) = 0$$

und

$$(ra(n+1) + sb(n+1)) - (ra(n) + sb(n)) - (ra(n-1) + sb(n-1)) = 0,$$

also ist $b_n = ra(n) + sb(n)$ auch eine Lösung der DZGL.

In unserem Fall ist $b_n = r\varphi^n + s\psi^n$ für jedes $r, s \in \mathbb{R}$ eine Folge, die $b_{n+1} - b_n - b_{n-1} = 0$ erfüllt.

In Abhängigkeit von r und s ergeben sich die Werte b_0 und b_1 oder andersherum:

Für gegebene b_0 und b_1 kann es $r, s \in \mathbb{R}$ geben, sodass $b_n = r\varphi^n + s\psi^n$ die DZGL mit Anfangswerten b_0 und b_1 löst. War unser Ansatz x^n zu restriktiv finden wir keine r, s. Aber finden wir sie, haben wir (Eindeutigkeit, eine Frage, die wir zum Stand der Vorlesung noch nicht thematisieren, vorausges.) <u>die</u> Lösung.

Berechnen wir den Zusammenhang

$$\begin{cases} b_0 = r\varphi^0 + s\psi^0 = r + s \\ b_1 = r\varphi^1 + s\psi^1 = \varphi r + \psi s \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_0 \\ \varphi & \psi & b_1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_0 \\ 0 & \varphi - \psi & \varphi b_0 - b_1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_0 \\ 0 & 1 & \frac{\varphi b_0 - b_1}{\varphi - \psi} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_0 - \frac{\varphi b_0 - b_1}{\varphi - \psi} \\ 0 & 1 & \frac{\varphi b_0 - b_1}{\varphi - \psi} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} r = \frac{(\varphi - \psi) b_0 - \varphi b_0 + b_1}{\varphi - \psi} = \frac{-\psi b_0 + b_1}{\varphi - \psi} = - \frac{\psi b_0 - b_1}{\sqrt{5}} \\ s = \frac{\varphi b_0 - b_1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

und wir haben

$$b_n = - \frac{\psi b_0 - b_1}{\sqrt{5}} \varphi^n + \frac{\varphi b_0 - b_1}{\sqrt{5}} \psi^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(b_0 \left(\varphi \psi \psi^{n-1} - \psi \varphi \varphi^{n-1} \right) - b_1 \left(\psi^n - \varphi^n \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(b_0 \left(\varphi^{n-1} - \psi^{n-1} \right) - b_1 \left(\varphi^n - \psi^n \right) \right)$$

als Lösung die das AWP (DZGL und Anfangswerte) löst.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Wären wir nicht auf die Idee gekommen, x^n als Lösung anzusetzen, hätten wir das Problem anderweitig über ein lineares Gleichungssystem über den Umweg eines Eigenwertproblems lösen können:

Nehmen wir zu der Gleichung $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ noch die recht überflüssig wirkende Gleichung $b_n = b_n$ hinzu, erhalten wir

$$\begin{cases} \phantom{b_{n-1} +{}} b_n = b_n \\ b_{n-1} + b_n = b_{n+1} \end{cases}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

usf. lässt aufkommen, die

Vermutung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Welchen Nutzen diese Darstellung hat, um eine geschlossene Darstellung für b_n zu finden, zeigen wir später, zunächst widmen wir uns der Darstellung und beweisen die Korrektheit per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

IA

$n=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^0 \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$n=1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \checkmark$$

IV

Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

IS

$n \to n+1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{IV}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n + b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_{n+2} \end{pmatrix} \checkmark \quad //$$

Nun zurück zur Frage, warum nutzt uns

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix},$$

um b_n geschlossen (also ohne auf $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots$ zurückzugreifen) berechnen zu können?

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Finden wir $P \in GL_2(\mathbb{C})$ und $D := \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ mit $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$

mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = PDP^{-1},$$

dann ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})$$
$$= PD\underbrace{P^{-1}P}_{E}D\underbrace{P^{-1}\dots P}_{E}DP^{-1}$$
$$= PD^nP^{-1}$$
$$= P\begin{pmatrix} d_1^n & 0 \\ 0 & d_2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

und wir können das Produkt dieser drei Matrizen und $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ bilden und erhalten einen Vektor mit den Komponenten für b_n und b_{n+1}

Als erstes ermitteln wir die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, um, falls es zwei verschiedene gibt (hinreichend, nicht notwendig!), die zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ähnliche Diagonalmatrix aufzustellen.

Für jeden Eigenvektor zum Eigenwert λ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v = \lambda v,$$

was auf

$$\left(\lambda E - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) v = 0$$

führt.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Entweder erfüllt nur $v=0$ diese Gleichung, oder der Kern von $\left(\lambda E - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ ist nicht trivial, die Matrix hat nicht vollen Rang und somit ist ihre Determinante null:

$$\det\left(\lambda E - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)-1 = \lambda^2-\lambda-1,$$

also

$$\det\left(\lambda E - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\Leftrightarrow \lambda \in \{\varphi, \psi\}$ mit den schon bekannten $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Nun bestimmen wir eine Basis aus Eigenwerten, also zunächst zu jedem Eigenwert den entsprechenden Eigenraum.

Genau alle Elemente x des Eigenraums zu $\lambda = \varphi$ erfüllen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \varphi x$

Wir formen um

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \varphi x$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \varphi E\right) x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\varphi & 1 \\ 1 & 1-\varphi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\varphi & 1 \\ 1 & \psi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \psi \\ 1-\varphi & 1+\psi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \psi \\ \psi & \psi^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} \psi \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Das Gleiche für ψ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \psi x$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \psi E \right) x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ 1 & 1-\psi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ 1 & \varphi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ 1-\psi & 1+\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ \varphi & \varphi^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} \varphi \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ist nun $B_1 = \left(\begin{pmatrix} \psi \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis zu den Eigenwerten φ, ψ

und $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ die kanonische Basis, dann ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = {}_B\mathrm{id}_{B_1} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} {}_{B_1}\mathrm{id}_B \, x,$$

d.h. lässt sich x als Linearkombination der Eigenvektoren aus B_1 darstellen, dann werden diese Komponenten genau um φ und ψ skaliert.

Mit Notation von zuvor ist

$$P = {}_B\mathrm{id}_{B_1} = \begin{pmatrix} \psi & \varphi \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} -1 & -\varphi \\ 1 & \psi \end{pmatrix} = \frac{1}{\varphi - \psi} \begin{pmatrix} -1 & -\varphi \\ 1 & \psi \end{pmatrix}$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt3

Somit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi & \varphi \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} \frac{1}{\varphi - \psi} \begin{pmatrix} -1 & -\varphi \\ 1 & \psi \end{pmatrix}.$$

Eine Probe ergibt

$$\begin{array}{cc|cc|cc}
 & & \varphi & 0 & -1 & -\varphi \\
 & & 0 & \psi & 1 & \psi \\
\hline
\psi & \varphi & -1 & -1 & 0 & \varphi - \psi \\
-1 & -1 & -\varphi & -\psi & \varphi - \psi & \underbrace{\varphi^2 - \psi^2}_{1+\varphi-(1-\psi) = \varphi - \psi}
\end{array}$$

und wir können zusammensetzen:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \psi & \varphi \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix} \frac{1}{\varphi - \psi} \begin{pmatrix} -1 & -\varphi \\ 1 & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\varphi - \psi} \begin{pmatrix} \varphi^{n-1} - \psi^{n-1} & \varphi^n - \psi^n \\ \varphi^n - \psi^n & \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\varphi - \psi} \begin{pmatrix} b_0(\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}) + b_1(\varphi^n - \psi^n) \\ b_0(\varphi^n - \psi^n) + b_1(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

mit Nebenrechnung

		φ^n	0	-1	$-\varphi$
		0	ψ^n	1	ψ
ψ	φ	$-\varphi^{n-1}$	$-\psi^{n-1}$	$\varphi^{n-1}-\psi^{n-1}$	$\varphi^n-\psi^n$
-1	-1	$-\varphi^n$	$-\psi^n$	$\varphi^n-\psi^n$	$\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}$

$$\varphi^n\psi = \varphi^{n-1}(\varphi\psi) = -\varphi^{n-1}$$
$$\varphi\psi^n = (\varphi\psi)\psi^{n-1} = -\psi^{n-1}$$

und erhalten schließlich wie beim vorigen Ansatz $b_n = x^n$:

$$b_n = \frac{b_0}{\varphi-\psi}\left(\varphi^{n-1}-\psi^{n-1}\right) + \frac{b_1}{\varphi-\psi}\left(\varphi^n-\psi^n\right)$$

b)

Zunächst formen wir um

$$(\varphi-\psi)b_n = b_0\varphi^{n-1} + b_1\varphi^n - b_0\psi^{n-1} - b_1\psi^n$$
$$= \varphi^{n-1}(b_0+\varphi b_1) - \psi^{n-1}(b_0+\psi b_1).$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Für $b_0 + \varphi b_1 = 0$ gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(\varphi-\psi)b_{n+1}}{(\varphi-\psi)b_n} = \frac{-\psi^n(b_0+\psi b_1)}{-\psi^{n-1}(b_0+\psi b_1)} = \psi$$

Diesen Fall haben wir zB für

$b_0 = 1,\ b_1 = \psi$, dann ist $b_0 + \varphi b_1 = 1 + \varphi\psi = 1-1 = 0$

oder

$b_0 = \varphi,\ b_1 = \psi\varphi = -1$,

hier ist das Verhältnis $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ stets genau ψ.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Für $b_0 + \varphi b_1 \neq 0$ gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(\varphi-\psi)b_{n+1}}{(\varphi-\psi)b_n} = \frac{\varphi^n(b_0+\varphi b_1) - \psi^n(b_0+\psi b_1)}{\varphi^{n-1}(b_0+\varphi b_1) - \psi^{n-1}(b_0+\psi b_1)} \quad \Big| \text{ kürzen um } \varphi^{n-1}(b_0+\varphi b_1)$$

$$= \frac{\varphi - \psi \overbrace{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n-1}}^{\to 0} \frac{b_0+\psi b_1}{b_0+\varphi b_1}}{1 - \underbrace{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n-1}}_{\to 0} \frac{b_0+\psi b_1}{b_0+\varphi b_1}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\varphi - 0}{1-0} = \varphi$$

Weicht $b_0 + \varphi b_1$ auch nur eine Winzigkeit von null ab, so nähert sich $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ immer mehr φ an, obwohl das Verhältnis zunächst beinahe ψ gewesen ist.

c)

Das Problem führt auf die DZGL

$$f_{n+1} - f_n = 2 f_{n-1},$$

da von Monat zu Monat genau doppelt so viele Kaninchenpaare hinzukommen, wie einen Monat zuvor (also zwei Monate vor $n+1$) geschlechtsreif waren.

Und wir haben die Anfangswerte $f_0 = 1$, $f_1 = 1$.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Setzen wir für die DZGL wieder $f_n = x^n$ an, dann erhalten wir wegen

$$x^{n+1} - x^n - 2x^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)x^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0, -1, 2\}$$

als Lösungen

$$f_n = 0$$

$$f_0 = 1, f_1 = -1, f_2 = 1, f_3 = -1, \ldots, f_n = (-1)^n$$

$$f_0 = 1, f_1 = 2, f_2 = 4, f_3 = 8, \ldots, f_n = 2^n$$

und mit $r, s \in \mathbb{R}$

$$f_n = r(-1)^n + s2^n$$

als Lösungsraum, in dem wir nun die Lösung suchen, die $f_0 = f_1 = 1$ erfüllt.

Eine kurze Rechnung deckt auf:

$$\begin{cases} 1 = f_0 = r(-1)^0 + s2^0 = r + s \\ 1 = f_1 = r(-1)^1 + s2^1 = -r + 2s \end{cases}$$

$2 = 3s \Leftrightarrow s = \frac{2}{3}$

$r = 1 - s = \frac{1}{3}$

und damit löst

$$f_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+1}\right)$$

unser Anfangswertproblem.

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

Aufgabe 4

a)

Mit einer Schrittweite von $\frac{1}{m}$ können wir den Verlauf des noch zu tilgenden Kreditbetrags in einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$a_0 : \text{Betrag zum Zeitpunkt } t=0$$
$$a_n : \text{Betrag zum Zeitpunkt } t=\frac{n}{m}$$

ausdrücken.

Bei einer pro Jahr m-maligen Verzinsung mit nominalem Jahreszinssatz r und einer Abzahlung von X pro Jahr ergibt sich

$$a_{n+1} - a_n = \frac{r}{m} a_n - \frac{X}{m}$$

bzw schränken wir den Definitionsbereich einer Funktion $P_m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ auf $D_m := \{\frac{n}{m} ; n \in \mathbb{N}_0\}$ ein, auch

$$P_m(t+\tfrac{1}{m}) - P_m(t) = \frac{r}{m} P_m(t) - \frac{X}{m} \quad \text{für } t \in D_m.$$

Wie schon aus Übung 2 bekannt, ist

$$a_{n+1} - a_n = \alpha a_n + \beta$$
$$\Rightarrow a_{n+1} = (\alpha+1) a_n + \beta$$
$$\Leftrightarrow a_n = a_0 (\alpha+1)^n + \beta \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha+1)^k$$
$$= a_0(\alpha+1)^n + \beta \frac{1-(\alpha+1)^n}{1-(\alpha+1)}$$
$$= a_0(\alpha+1)^n - \frac{\beta}{\alpha}(1-(\alpha+1)^n)$$
$$= (a_0 + \frac{\beta}{\alpha})(\alpha+1)^n - \frac{\beta}{\alpha}$$

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

also mit $a_{n+1} = P_m(t+\frac{1}{m})$, $a_n = P_m(t)$, $\alpha = \frac{r}{m}$, $\beta = -\frac{x}{m}$ erhalten wir

$$P_m(t) = P(\tfrac{n}{m}) = \left(P_0 + \frac{(-\frac{x}{m})}{\frac{r}{m}}\right)\left(\frac{r}{m}+1\right)^n - \frac{(-\frac{x}{m})}{\frac{r}{m}}$$

$$= \left(P_0 - \frac{x}{r}\right)\left(\frac{r}{m}+1\right)^n + \frac{x}{r}$$

$$= \left(P_0 - \frac{x}{r}\right)\left(\left(\frac{r}{m}+1\right)^m\right)^t + \frac{x}{r}$$

was wegen $(\frac{r}{m}+1)^m \to e^r$ für $m \to \infty$ gegen

$$P_\infty(t) = \left(P_0 - \frac{x}{r}\right)e^{rt} + \frac{x}{r}$$

konvergiert. Diesen kontinuierlichen Fall können wir auch direkt über das Aufstellen einer DGL mit

$$P'_\infty(t) = r\,P_\infty(t) - x \qquad \text{mit } P_\infty : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

lösen.

Zunächst ignorieren wir, dass für unsere Lösung $P_\infty(0) = P_0$ gelten muss.

Setzen wir $P_\infty(t) = \frac{x}{r}$ konstant, dann gilt $P'_\infty(t) = 0$ und $r \cdot P_\infty(t) - x = r \cdot \frac{x}{r} - x = 0$, dh. würde der Kredit mit $\frac{x}{r}$ starten, wäre $P_\infty(t) = \frac{x}{r}$ eine Lösung der DGL.

Nun ignorieren wir das $-x$ in der DGL und betrachten das sogenannte homogene Problem $P'_\infty(t) = r\,P_\infty(t)$ für das wir die Lösungsmenge $P_\infty(t) = c\,e^{rt}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ bereits kennen.

D.h (das p steht für partikulär, das h für homogen)

für $P_{\infty,p}(t) = \frac{X}{r}$ gilt $P_{\infty,p}'(t) = r P_{\infty,p}(t) - X$

für $P_{\infty,h}(t) = c e^{rt}$ gilt $P_{\infty,h}'(t) = r P_{\infty,h}(t)$ für $c \in \mathbb{R}$

so gilt auch

$$P_{\infty,p}'(t) + P_{\infty,h}'(t) = \left(P_{\infty,p}(t) + P_{\infty,h}(t)\right)' = r\left(P_{\infty,p}(t) + P_{\infty,h}(t)\right) - X,$$

also erfüllt somit

$$P_{\infty,p}(t) + P_{\infty,h}(t) = \frac{X}{r} + c e^{rt} \quad \text{für jedes } c \in \mathbb{R}$$

die DGL.

Anders als bei $P_{\infty,p}(t)$ haben wir für $P_{\infty,p}(t) + P_{\infty,h}(t)$ die Chance, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass die Anfangsbedingung $P_\infty(0) = P_0$ zu der DGL erfüllt wird, wir das AWP also lösen.

Versuchen wir

$$P_\infty(0) = P_0 = \frac{X}{r} + c e^{r \cdot 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad c = P_0 - \frac{X}{r} \in \mathbb{R},$$

und

$$P_\infty(t) = \left(P_0 - \frac{X}{r}\right) e^{rt} + \frac{X}{r}$$

ist die gesuchte Lösung

Kommen wir nun zur gefragten nötigen Laufzeit des Kredits bei diskreter, m-maliger Verzinsung und bei kontinuierlicher Verzinsung:
Im ersten Fall suchen wir das kleinste n für das $P_m(n \cdot m) \leq 0$ gilt, im zweiten Fall suchen wir das kleinste t für das $P_\infty(t) \leq 0$ und, da

Mathematisches Modellieren ÜBlatt 3

$P_\infty(0) = P_0 > 0$ und P_∞ stetig, für das gleichbedeutend $P_\infty(t) = 0$ gilt.

Formen wir für den diskreten Fall um

$$P_m(n \cdot m) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{r}{m}\right)^n \left(P_0 - \frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{r}{m}\right)^n \geq \frac{\frac{x}{r}}{\frac{x}{r} - P_0} = \frac{x}{x - r P_0}$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \log\left(1+\frac{r}{m}\right) \geq \log \frac{x}{x-r \cdot P_0}$$

$$\Leftrightarrow t \cdot m = n \geq \frac{\log \frac{x}{x-r\cdot P_0}}{\log\left(1+\frac{r}{m}\right)}$$

$$\overset{n\in\mathbb{N}_0}{\Leftrightarrow} t \geq \frac{1}{m} \left\lceil \frac{\log \frac{x}{x-r\cdot P_0}}{\log\left(1+\frac{r}{m}\right)} \right\rceil \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{\log \frac{x}{x-r\cdot P_0}}{r}$$

da $e^{m \log\left(1+\frac{r}{m}\right)} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m = \left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^r \xrightarrow[\frac{m}{r}\to\infty]{} e^r$

und $x \mapsto e^x$ streng monoton und stetig.

und führen dies auch für den kontinuierlichen Fall durch

$$P_\infty(t) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{rt}\left(P_0 - \frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{rt}\left(\frac{x}{r} - P_0\right) \geq \frac{x}{r}$$

$$\Leftrightarrow \quad rt \geq \log \frac{x}{x - rP_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad t \geq \frac{1}{r} \log \frac{x}{x - rP_0}$$

dh. Durchführung des Grenzübergangs $m \to \infty$ vor oder nach der Lösung führt zum selben Ergebnis.

Im diskreten Fall beträgt die nötige Laufzeit somit

$$\frac{1}{m} \left\lceil \frac{\log \frac{x}{x - rP_0}}{\log(1 + \frac{r}{m})} \right\rceil$$

bei m-maliger Verzinsung und im kontinuierlichen Fall

$$\frac{1}{r} \log \frac{x}{x - rP_0}$$

b)

Gehen wir davon aus, monatlich 1000 Euro, also $x = 12000$ Euro jährlich aufbringen zu können, weiterhin von 6% nominaler jährlicher Zinsrate auf den Kredit und dem Wunsch, den Kredit nach 10 Jahren getilgt zu haben.

Bei kontinuierlicher Verzinsung bedarf es nach Formel aus a)

$$e^{rt}\left(P_0 - \frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{0{,}06 \cdot 10}\left(P_0 - \frac{12000}{0{,}06}\right) + \frac{12000}{0{,}06} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{0,6}(P_0 - 200000) + 200000 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P_0 \leq \frac{-200000}{e^{0,6}} + 200000$$

$$= 200000(1 - e^{-0,6}) \approx 90237{,}67$$

Also wäre 90237 Euro der größte ganzzahlige Betrag, der nach 10 Jahren getilgt ist.

Bei 12-maliger Verzinsung pro Jahr mit ansonsten gleichen Vorgaben erhalten wir

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{t \cdot m}\left(P_0 - \frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{10 \cdot 12}\left(P_0 - \frac{12000}{0,06}\right) + \frac{12000}{0,06} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{201}{200}\right)^{120}(P_0 - 200000) + 200000 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P_0 \leq 200000 - 200000\left(\frac{200}{201}\right)^{120}$$

$$= 200000\left(1 - \left(\frac{200}{201}\right)^{120}\right) \approx 90073{,}45$$

Also wäre 90073 Euro der größte ganzzahlige Betrag, der nach 10 Jahren getilgt ist.