Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 14.05.2012

4.Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren" Lösung

Aufgabe 1: In der Vorlesung wurde der folgende Satz behauptet:

Satz 3.9: Es seien $r, x_M, x_0 > 0$ und $x_M \neq x_0$. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems zur Logistischen Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= r \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{x_M}\right) \cdot x(t) && (1)\\
x(0) &= x_0 && (2)
\end{aligned}
$$

gegeben durch die Funktion

$$x(t) = x_M - \frac{x_M}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{rt}} \quad \text{für} \quad t \geq 0 \quad \text{und} \quad c = \frac{x_0}{x_M - x_0} \ .$$

Ferner gilt

i) $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_M$

ii) $x(t)$ ist streng monoton wachsend (fallend) für $x_0 < x_M$ $(x_0 > x_M)$.

a) Beweisen Sie diesen Satz.

b) Zeigen Sie dass $x(t)$ konvex auf allen Intervallen mit $x(t) \leq \frac{x_M}{2}$ und auf allen Intervallen mit $x(t) > x_M$ ist, sowie konkav auf allen Intervallen mit $\frac{x_M}{2} \leq x(t) < x_M$.

Lösung:

a) Wir können nachweisen, $x(t) = x_M - \frac{x_M}{1+c\cdot e^{rt}}$ ist eine Lösung des Anfangswertproblems zur Logistischen Differentialgleichung, indem wir zeigen, die Lösung erfüllt sowohl die DGL als auch den Anfangswert. Das Erfüllen der DGL zeigen wir durch Differenzieren. Zunächst formen wir $x(t)$ ein wenig um

$$x(t) = x_M \left(1 - \frac{1}{1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}}\right) = x_M \cdot \frac{1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}-1}{1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}} = x_M \cdot \frac{c\cdot \mathrm{e}^{rt}}{1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}}\,,$$

leiten dann ab

$$\begin{aligned} x'(t) &= x_M \cdot \frac{r\cdot c\cdot \mathrm{e}^{rt}\left(1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}\right) - c\cdot \mathrm{e}^{rt}\cdot r\cdot c\cdot \mathrm{e}^{rt}}{\left(1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}\right)^2} \\ &= r\cdot x_M \cdot \frac{c\cdot \mathrm{e}^{rt}}{1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}} \cdot \frac{1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}-c\cdot \mathrm{e}^{rt}}{1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}} \\ &= r\cdot x_M \cdot \frac{c\cdot \mathrm{e}^{rt}}{1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}} \cdot \left(1 - \frac{c\cdot \mathrm{e}^{rt}}{1+c\cdot \mathrm{e}^{rt}}\cdot\frac{x_M}{x_M}\right) \\ &= r\cdot x(t)\cdot\left(1-\frac{x(t)}{x_M}\right)\,. \end{aligned}$$

Setzen wir das Ergebnis in die DGL ein, erhalten wir $r\cdot x(t)\cdot\left(1-\frac{x(t)}{x_M}\right) = r\cdot x(t)\cdot\left(1-\frac{x(t)}{x_M}\right)$, also eine wahre Aussage, somit erfüllt $x(t)$ die DGL. Für den Anfangswert gilt

$$\begin{aligned} x(0) &= x_M \cdot \frac{c\cdot \mathrm{e}^0}{1+c\cdot \mathrm{e}^0} = x_M\cdot\frac{c}{1+c} \\ &= x_M \cdot \frac{\frac{x_0}{x_M-x_0}}{1+\frac{x_0}{x_M-x_0}} = x_M\cdot\frac{\frac{x_0}{x_M-x_0}}{\frac{x_M-x_0+x_0}{x_M-x_0}} = x_M\cdot\frac{x_0}{x_M} = x_0\,. \end{aligned}$$

Also ist $x(t)$ tatsächlich eine Lösung des AWP. Ferner gilt

i) $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x_M = x_M\left(1-\frac{1}{1+c\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{rt}}_{\to\infty}}\right) = x_M$

ii) Um dies zu zeigen, beweisen wir zunächst zwei Behauptungen.

<u>Beh. 1</u> Für alle $t \geq 0$ gilt $x(t) \neq 0$ und $x(t) \neq x_M$

Beweis:
Angenommen, $x(t) = 0$ für ein $t \geq 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} x(t) = 0 \;&\Leftrightarrow\; x_M \left(1 - \frac{1}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{rt}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 1 = \frac{1}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{rt}} \\ &\Leftrightarrow 1 + c \cdot \mathrm{e}^{rt} = 1 \\ &\Leftrightarrow c \cdot \mathrm{e}^{rt} = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x_0}{x_M - x_0} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 = 0\,, \end{aligned}$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung $x_M > 0$.

Angenommen, $x(t) = x_M$ für ein $t \geq 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} x(t) = x_M \;&\Leftrightarrow\; x_M \left(1 - \frac{1}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{rt}}\right) = x_M \\ &\Leftrightarrow\; 1 - \frac{1}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{rt}} = 1 \\ &\Leftrightarrow\; \frac{1}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{rt}} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 1 = 0 \end{aligned}$$

ein Widerspruch. //

Beh. 1 Ist der Startwert zwischen 0 und x_M, bzw. ist der Startwert größer als x_M, so gilt diese Eigenschaft auch für x für alle Zeiten fort. Es gilt also

$$\begin{aligned} x_0 \in (0, x_M) \;&\Rightarrow\; x(t) \in (0, x_M) \\ x_0 \in (x_M, \infty) \;&\Rightarrow\; x(t) \in (x_M, \infty)\,. \end{aligned}$$

Beweis:
x ist als Komposition stetiger Funktionen selbst stetig auf $[0, \infty)$ und mit $x(t) \neq 0$ und $x(t) \neq x_M$ für alle $t \geq 0$ und dem Zwischenwertsatz folgt die Behauptung. //

Nun können wir die strenge Monotonie für x leicht nachweisen. Eine stetig differenzierbare Funktion x ist genau für alle t streng monoton steigend, für die $x'(t) > 0$ ist, für alle t streng monoton fallend, für die $x'(t) < 0$ ist.

Aus $0 < x_0 < x_M$ folgt $0 < x(t) < x_M$ für $t \geq 0$ und somit gilt

$$x'(t) = \underbrace{r}_{>0} \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{x_M}\right) \cdot \underbrace{x(t)}_{>0} > r \cdot \left(1 - \frac{x_M}{x_M}\right) \cdot x(t) = r \cdot 0 \cdot x(t) = 0$$

und aus $x_M < x_0$ folgt $x_M < x(t)$ für $t \geq 0$ und somit gilt

$$x'(t) = \underbrace{r}_{>0} \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{x_M}\right) \cdot \underbrace{x(t)}_{>0} < r \cdot \left(1 - \frac{x_M}{x_M}\right) \cdot x(t) = r \cdot 0 \cdot x(t) = 0\,.$$

b) Für den Nachweis der Konvexität auf $\left(0, \frac{x_M}{2}\right) \cup (x_M, \infty)$ wie für den Nachweis der Konkavität auf $\left(\frac{x_M}{2}, x_M\right)$ verwenden wir die Resultate aus a). Der Unterschied zu der Argumentation aus a) ist allerdings, wir starten nicht wieder bei x_0: Die Eigenschaft soll nicht für bestimmte Bereiche auf t, sondern für Bereiche auf x gezeigt werden.

Zunächst aber zur Eigenschaft der Konvexität/Konkavität:

Eine zweimal diffbare Funktion ist genau für alle t konvex, wo $x''(t) \geq 0$ ist, konkav wo $x''(t) \leq 0$ ist.

Leiten wir die DGL nach t ab, so erhalten wir, die rechte Seite hängt von $x(t)$ und $x'(t)$ ab, für unsere Fragestellung genau passend. Insbesondere, da wir $x'(t)$ in Abhängigkeit von $x(t)$ aus den Resultaten aus a) gegen Null abschätzen können.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} r \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{x_M}\right) \cdot x(t) \\
\Leftrightarrow x''(t) &= r \cdot \left(-\frac{x'(t)}{x_M}\right) \cdot x(t) + r \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{x_M}\right) \cdot x't(t) \\
&= r \cdot x'(t) \cdot \left(-\frac{x(t)}{x_M} + 1 - \frac{x(t)}{x_M}\right) \\
&= r \cdot x'(t) \cdot \left(1 - 2\frac{x(t)}{x_M}\right)
\end{aligned}$$

Ist nun $0 < x(t) \leq \frac{x_M}{2}$, dann gilt $x'(t) > 0$ und

$$x''(t) = r \cdot \underbrace{x'(t)}_{>0} \cdot \left(1 - 2\frac{x(t)}{x_M}\right) \geq r \cdot x'(t) \cdot \left(1 - 2\frac{\frac{x_M}{2}}{x_M}\right) = r \cdot x'(t) \cdot 0 = 0\,.$$

Ist $\frac{x_M}{2} \leq x(t) < x_M$, dann gilt $x'(t) > 0$ und

$$x''(t) = r \cdot \underbrace{x'(t)}_{>0} \cdot \left(1 - 2\frac{x(t)}{x_M}\right) \leq r \cdot x'(t) \cdot \left(1 - 2\frac{\frac{x_M}{2}}{x_M}\right) = r \cdot x'(t) \cdot 0 = 0\,.$$

Ist $x_M < x(t)$, dann gilt $x'(t) < 0$ und

$$\begin{aligned} x''(t) &= r \cdot \underbrace{x'(t)}_{<0} \cdot \left(1 - 2\frac{x(t)}{x_M}\right) \\ &= r \cdot \underbrace{-x'(t)}_{>0} \cdot \left(2\frac{x(t)}{x_M} - 1\right) \\ &> r \cdot (-x'(t)) \cdot \left(2\frac{x_M}{x_M} - 1\right) = r\,(-x'(t)) > r \cdot 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Also ist $x(t)$ auf $\left(0, \frac{x_M}{2}\right] \cup (x_M, \infty)$ konvex und auf $\left[\frac{x_M}{2}, x_M\right)$ konkav.

Aufgabe 2: Wir modellieren beschränktes Wachstum mit der Logistischen Differentialgleichung (1) und (2).

a) Entdimensionalisieren Sie das Modell durch die Wahl geeigneter Skalen $\bar{x}$ und $\bar{t}$. Welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es?

b) Welche Entdimensionalisierung ist geeignet für $x_0 << x_M$ in dem Sinne, dass das Weglassen kleiner Terme zu einem sinnvollen Modell führt?

Lösung:
Bevor wir uns an die Entdimensionalisierung der Aufgabe wagen, stellen wir uns das Grundprinzip in einem einfachen Fall, ohne Ableitungen benutzen zu müssen, einmal vor.

Wir wollen folgende Frage beantworten:
Wenn wir 3 Tage mit dem Auto auf einer Strecke in einer Richtung konstant $72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ fahren, wieviel Tausend Kilometer haben wir am Ende zurückgelegt?

Eine Geschwindigkeit ist „Weg pro Zeit", beträgt sie konstant $72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, so legen wir jede Stunde 72 km zurück. Ist sie nicht konstant, drückt ihr Wert eine Momentangeschwindigkeit, eine momentane Änderungsrate des Ortes (wieviel Strecke, z.B. km, wir zurückgelegt haben) nach der Zeit aus. Betrachten wir den Weg als eine Funktion x abhänging von t, so ist die Geschwindigkeit $x'(t)$. Aber dies benötigen wir erst einmal nicht: Die zurückgelegte Strecke x ergibt sich als

$$x = v \cdot t$$

oder als Funktion, falls wir t variabel halten wollen

$$x(t) = v \cdot t\,.$$

Hierbei ist v die konstante Geschwindigkeit, t die Fahrtdauer, x bzw. $x(t)$ die zurückgelegte Strecke. Die Größen sind ganz natürlich dimensionsbehaftet. Dies ist aber nicht weiter störend, wir können ganz natürlich damit rechnen

$$\begin{aligned} x(3\,\mathrm{d}) &= 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 3\,\mathrm{d} = 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 3 \cdot 24\,\mathrm{h} \\ &= 72 \cdot 1\,\mathrm{km} \cdot \frac{1}{1\,\mathrm{h}} \cdot 3 \cdot 24 \cdot 1\,\mathrm{h} = \frac{72 \cdot 24}{1000} \cdot 3 \cdot 1000 \cdot \frac{1\,\mathrm{km} \cdot 1\,\mathrm{h}}{1\,\mathrm{h}} \\ &= \frac{216}{125} \cdot 3 \cdot 100\,\mathrm{km} = 5{,}184 \cdot 1000\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Somit bringen wir in einem ersten Schritt die Einheiten auf geeignete Größen, verrechnen diese anschließend und bringen das Ergebnis auf die Zieleinheit.
Wenn wir uns die Gleichung

$$72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot 3\cdot 24\,\mathrm{h} = \frac{216}{125}\cdot 3\cdot 1000\,\mathrm{km}$$

anschauen, könnten wir genauso gut zu

$$72\cdot 3\cdot 24 = \frac{216}{125}\cdot 3\cdot 1000 = 5184$$

kürzen. Nichts anderes ist das immer wieder angewendete Weglassen von Einheiten: Solange diese soweit zueinander „passen“, eben soweit im Sinne, dass sie sich wegkürzen, können wir sie auch weglassen. Nur hätten wir dafür voher unsere Eingangsgröße $3\,\mathrm{d}$ umstellen müssen und das Ergebnise 5184 als 5,184 Tausend Kilometer (das war ja die Frage) interpretieren müssen.
Wir suchen nun nach der Abbildung, die 3 auf 5,184 abbildet. Dazu formalisieren wir unser Vorgehen von oben ein wenig: Wir wollen die Zeit in Tagen abgeben, also als dimensionslosen Zahlwert, so auch die Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und am Ende den Weg in $1000\,\mathrm{km}$. Somit

$$\begin{aligned} v &= \nu\cdot\overline{v} \quad \text{mit} \quad \overline{v} = 1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \\ t &= \tau\cdot\overline{t} \quad \text{mit} \quad \overline{t} = 1\,\mathrm{d} \qquad\qquad \text{und} \qquad \nu,\tau,q\in\mathbb{R}^{\geq 0} \\ x &= y\cdot\overline{x} \quad \text{mit} \quad \overline{x} = 1000\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Unsere Rechnung von oben wird damit zu

$$\begin{aligned} & 72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot 3\,\mathrm{d} = y\cdot 1000\,\mathrm{km} \\ \Leftrightarrow\ & \nu\cdot\overline{v}\cdot\tau\cdot\overline{t} = y\cdot\overline{x} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\overline{v}\cdot\overline{t}}{\overline{x}}\cdot\nu\cdot\tau = y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot 1\,\mathrm{d}}{1000\,\mathrm{km}}\cdot\nu\tau = y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot 24\,\mathrm{h}}{1000\,\mathrm{km}}\cdot\nu\tau = y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{24}{1000}\cdot\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\cdot\mathrm{h}\cdot\frac{1}{\mathrm{km}}\cdot\nu\tau = y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{125}\cdot\nu\tau = y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{125}\cdot 72\cdot 3 = 0{,}024\cdot 72\cdot 3 = 5{,}184 \end{aligned}$$

Somit legen wir etwas über 5 mal Tausend Kilometer zurück.
Der betriebene Aufwand zum Umstellen war zugegebenermaßen recht groß, allerdings mit $0{,}024\cdot\nu\tau = y(\tau)$ haben wir dann doch eine einfache Formel, respektive eine Abbildung

$y\colon \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, die dimensionslos eine Zahl an Tagen auf die entsprechnende Entfernung in Tausend Kilometern abbildet, gefunden.

Versuchen wir unser Vorgehen auf das Entdimensionalisieren von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu übertragen:

Wir haben gegeben

t	Zeit
$x(t)$	Ort
$x'(t)$	momentane Ortsänderung über die Zeit, also Geschwindigkeit
$x''(t)$	momentane Geschwindigkeitsänderung über die Zeit, also Beschleunigung

Wir können wieder die dimensionsbehafteten Größen in Zahl und Skala aufteilen: $t = \tau \cdot \overline{t}$, $x = y \cdot \overline{x}$. Hierbei müssen wir bedenken, x und y sind Abbildungen: x bildet eine Zeit auf einen Ort (hier besser Strecke) ab, y bildet eine Zahl auf eine Zahl ab; wir müssen also das Argument von y auch entdimensionalisieren. Das ergibt

$$\tau = \frac{t}{\overline{t}}$$
$$y\left(\frac{t}{\overline{t}}\right) = \frac{x(t)}{\overline{x}}$$

Aber wie verhalten sich die Ableitungen? $x'(t)$ drückt die x-Änderung pro t-Änderung (natürlich im Grenzfall t-Änderung $\to 0$) aus. Wir können somit nicht erwarten, dass $y'\left(\frac{t}{\overline{t}}\right) = \frac{x'(t)}{\overline{x}}$ gilt. Leiten wir x nach t per Kettenregel ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overline{x}y(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overline{x}y\left(\frac{t}{\overline{t}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\overline{x}y(\tau) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{t}{\overline{t}} = \overline{x}y'(\tau)\frac{1}{\overline{t}} = \frac{\overline{x}}{\overline{t}}y'(\tau)\,,$$

und haben so den Zusammenhang

$$x'(t) = \frac{\overline{x}}{\overline{t}}y'(\tau)\,.$$

Eine analoge Rechnung führt wegen $x''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x'(t)$ auf

$$x''(t) = \frac{\overline{x}}{\overline{t}^2}y''(\tau)\,.$$

Etwaige Anfangswerte rechnen sich entsprechend um. Nehmen wir z.B. $t_0 = 0$ und $x(t_0) = x_0$:

$$y\left(\frac{t_0}{\overline{t}}\right) = y\left(\frac{0}{\overline{t}}\right) = y(0) = \frac{x_0}{\overline{x}}$$
$$y'\left(\frac{t_0}{\overline{t}}\right) = y'\left(\frac{0}{\overline{t}}\right) = y'(0) = \frac{\overline{t}}{\overline{x}}x_0$$

Kommen wir zurück auf die Aufgabenstellung.

a) Wir haben das Anfangswertproblem der Logistischen Differentialgleichung gegeben:

$$\begin{cases} x'(t) = r \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{x_M}\right) \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Dimensionsbehaftete Größen sind $[t] = T$, $[x(t)] = [x_M] = [x_0] = L$, $[r] = \frac{1}{T}$. Hierbei muss L nicht zwangsweise eine Länge sein, wir können uns genausogut Populationszahlen oder ähnliches darunter vorstellen. Wählen wir nun eine beliebige Skalierung $\overline{t}$ für t und $\overline{x}$ für x und setzen obig hergestellten Zusammenhang zwischen den dimensionsbehafteten Größen und ihren dimensionsfreien Entsprechungen ein und formen von dort etwas um:

$$\begin{aligned} x'(t) &= r \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{x_M}\right) \cdot x(t) \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{x}}{\overline{t}} \cdot y'(\tau) &= r \cdot \left(1 - \frac{\overline{x} \cdot y(\tau)}{x_M}\right) \cdot \overline{x} \cdot y(\tau) \\ \Leftrightarrow y'(\tau) &= \overline{t}r \left(1 - \frac{\overline{x}}{x_M} \cdot y(\tau)\right) \cdot y(\tau) \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung gibt es zwar noch dimensionsbehaftete Größen, allerdings kompensieren sich diese jeweils an Ort und Stelle und treten „nach Außen“ nur als Zahlwert auf, es ist

$$\left[\overline{t}r\right] = T \cdot \frac{1}{T} = 1 \qquad \left[\frac{\overline{x}}{x_M}\right] = \frac{L}{L} = 1\,.$$

Wir können $\overline{t}$ immer so wählen, dass $\overline{t}r = 1$ gilt, damit ist die Lösung der dimensionsfreien DGL schonmal nicht mehr von r abhängig und ist somit vereinfacht. Nun können wir auch $\overline{x}$ so wählen, dass $\frac{\overline{x}}{x_M} = 1$ gilt. So bleibt die DGL

$$y'(\tau) = (1 - y(\tau)) \cdot y(\tau)$$

übrig. Aber wir haben ja noch den Anfangswert $x(0) = x_0$. Dieser führt auf den dimensionslosen Anfangswert $y(0) = \frac{x_0}{x_M}$. Wollen wir hingegen den Anfangswert zu 1 skalieren, müssen wir $\overline{x}$ so wählen, dass $\frac{x_0}{\overline{x}} = 1$ gilt, was dafür dann

$$y'(\tau) = \left(1 - \frac{x_0}{x_M} \cdot y(\tau)\right) \cdot y(\tau)$$

impliziert. Alle drei Werte $\overline{t}r$, $\frac{\overline{x}}{x_M}$ und $\frac{x_0}{\overline{x}}$ bekommen wir nicht gleichzeitig normiert. Wieso haben wir jetzt zwei Anfangswertprobleme?

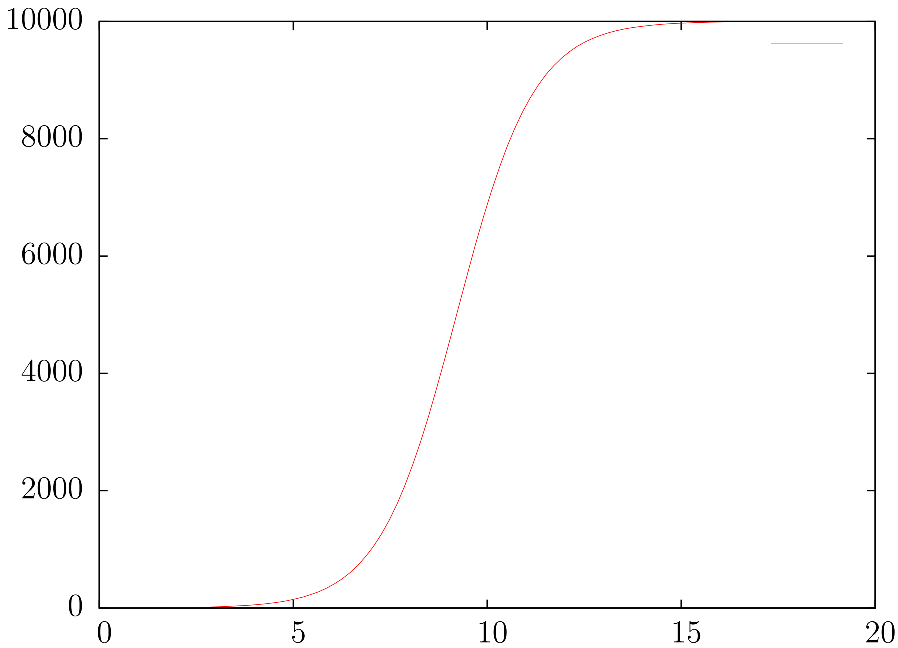
1.) Für $\overline{t} = \frac{1}{r}$ und $\overline{x} = x_M$

$$\begin{cases} y'(\tau) = (1 - y(\tau)) \cdot y(\tau) \\ y(0) = \frac{x_0}{x_M} \end{cases}$$

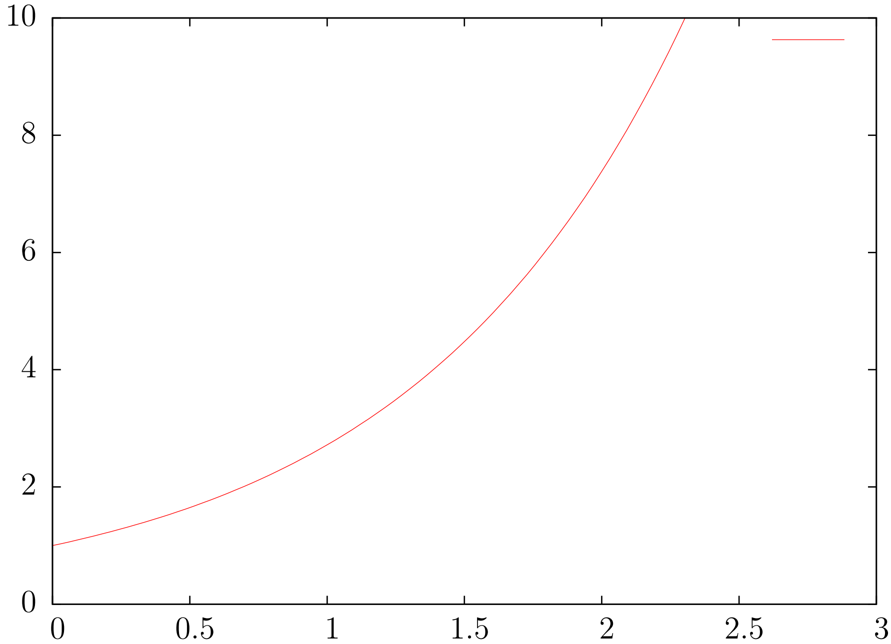
2.) Für $\overline{t} = \frac{1}{r}$ und $\overline{x} = x_0$

$$\begin{cases} y'(\tau) = \left(1 - \frac{x_0}{x_M} \cdot y(\tau)\right) \cdot y(\tau) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

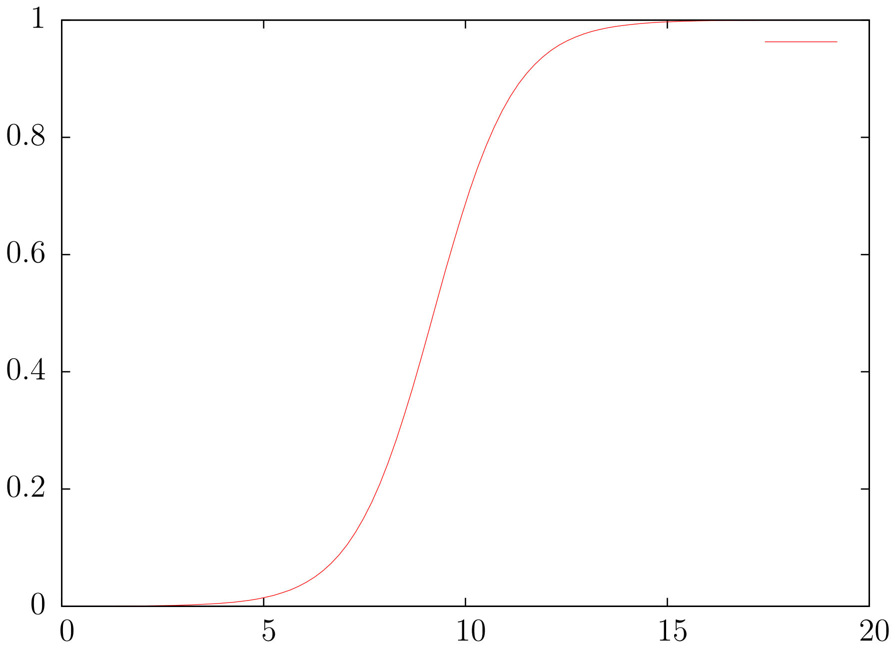
Welches ist das richtige, welches ist das falsche? Schauen wir uns dazu eine Lösung für das Problem mit $x_0 = 1\,m$, $x_m = 10000\,m$ und $r = 1\frac{1}{s}$ an. In folgenden Diagrammen entspricht 1 in t-Richtung $\overline{t} = \frac{1}{r} = 1\,s$ und 1 in x-Richtung entspricht $\overline{t} = x_0 = 1\,m$.



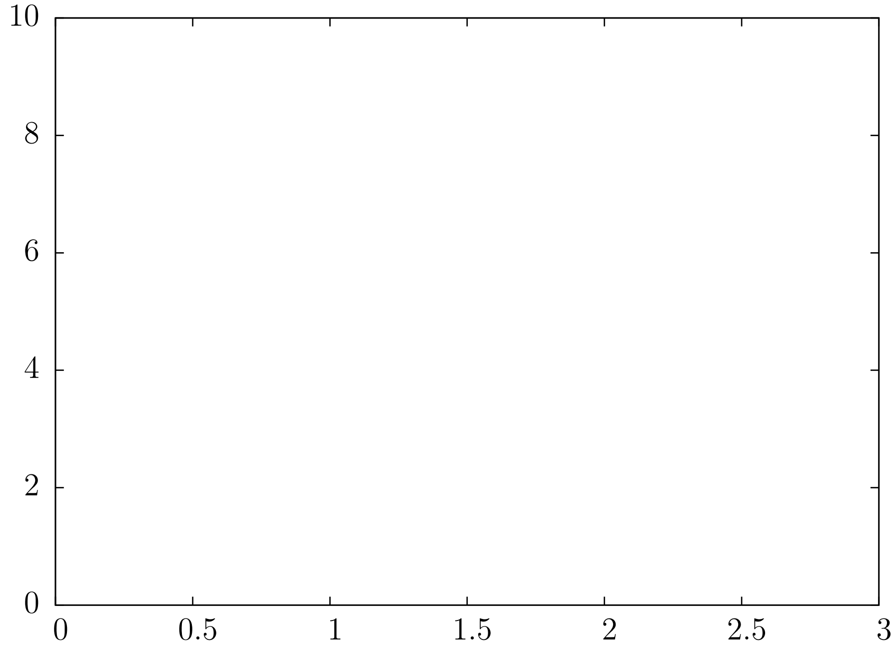
Bei einem mehr zur Skalierung passenden Achsenausschnitt stellt sich unsere Lösung wie folgt dar:



Nun nochmal das gleiche, anders skaliert. Wieder entspricht 1 in t-Richtung $\bar{t} = \frac{1}{r} = 1\,s$ aber nun entspricht 1 in x-Richtung $\bar{t} = x_m = 10000\,m$.



Wählen wir wieder die den Achsenausschnitt von oben:



Das Ergebnis ist jedes Mal das Gleiche, nur wirkt es in der jeweiligen Skalierung (bei passendem Achsenausschnitt) völlig anders: Im ersten Fall sieht die Lösung einer unbeschränkten Exponentialfunktion sehr ähnlich, im zweiten Fall wirkt die Lösung wie die Nullfunktion. Dies liegt daran, dass x_0 viel kleiner als x_M ist und das Verhältnis von beidem mit 0.0001 ungefähr gleich 0.

b) Setzen wir in den beiden Skalierungen das Verhältnis auf Null, so bleibt der Fehler innerhalb der zur Skala passen Achsenausschnitte gering (hierbei ist der Begriff gering genauso dehnbar wie der Begriff ungefähr gleich 0). Wir erhalten:

1.) Für $\overline{t} = \frac{1}{r}$ und $\overline{x} = x_M$

$$\begin{cases} y'(\tau) = (1 - y(\tau)) \cdot y(\tau) \\ y(0) = \frac{x_0}{x_M} = 0 \end{cases}$$

Hierbei löst genau die Nullfunktion $y(t) = 0$ das AWP und zurückdimensionalisiert entspricht dies $x(t) = \overline{x} \cdot y(\frac{t}{\overline{t}}) = x_M \cdot 0$ also auch $x(t) = 0$.

2.) Für $\overline{t} = \frac{1}{r}$ und $\overline{x} = x_0$

$$\begin{cases} y'(\tau) = \left(1 - \frac{x_0}{x_M} \cdot y(\tau)\right) \cdot y(\tau) = y(\tau) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Hierbei löst genau $y(t) = \mathrm{e}^{\tau}$ das AWP und zurückdimensionalisiert entspricht dies $x(t) = \overline{x} \cdot y(\frac{t}{\overline{t}}) = x_0 \cdot \mathrm{e}^{rt}$.

Also in beiden Fällen genau das Beobachtbare.

Aufgabe 3: In einem Wald gebe es h Hasen und f Füchse. Wir nehmen an, dass die Hasen immer genug Nahrung haben und außer den Füchsen keine Feinde haben und dass die Füchse sich nur von Hasen ernähren. In jedem Jahr werden pro Hase 0,78 Junge geboren und 8 Prozent der Hasen sterben durch einen natürlichen Tod. Außerdem beträgt für jeden Hasen die Wahrscheinlichkeit, dass er innerhalb eines Jahres von einem Fuchs getötet wird, ein Vierzigstel der zu Beginn des Jahres im Wald lebenden Füchse. Außerdem sterben in jedem Jahr 12 Prozent der Füchse, und die Anzahl der pro Fuchs in einem Jahr neugeborenen Jungen beträgt ein Fünfhundertstel der zu Beginn des Jahres im Wald lebenden Hasen. Uns interessiert nun, wie viele Füchse und wie viele Hasen am Ende des n-ten Jahres im Wald leben ($n \in \mathbb{N}$).

a) Stellen Sie für jede der Tierarten eine Differenzengleichung auf, die angibt, wie sich der Bestand dieser Tierart im Laufe des $(n + 1)$-ten Jahres entwickelt hat ($n \in \mathbb{N}$).

b) Wir nehmen an, dass sowohl die Anzahl der Füchse als auch die Anzahl der Hasen zu Beginn eines Jahres positiv sind. Geben Sie die Bedingung an, unter der beide Tierarten im Gleichgewicht sind, also von jeder der beiden Arten am Anfang eines Jahres genauso viele Tiere leben wie am Ende des Jahres. Wenn dies der Fall ist, spricht man auch von einem Gleichgewichtspunkt des Systems.

c) Es sei $h = 80$ und $f = 15$. Berechnen Sie für $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ die Anzahl der Hasen und die Anzahl der Füchse, die am Ende des n-ten Jahres im Nationalpark leben.

Lösung:

a) Aus der Beschreibung können wir folgendes Modell als Differenzengleichungssystem aufstellen:

$$\begin{cases} h_{n+1} - h_n & = 0{,}78 \cdot h_n - 0{,}08 \cdot h_n - h_n \cdot \frac{1}{40} \cdot fn \\ f_{n+1} - f_n & = -0{,}12 \cdot fn + f_n \cdot \frac{1}{500} \cdot h_n \end{cases}$$

Dazu haben wir noch die Anfangswerte $h_0 = h > 0$ und $f_0 = f > 0$ gegeben und erhalten dadurch ein Anfangswertproblem: Egal, ob wir eine explizite Darstellung für h_n und f_n, die dem Differenzengleichungssystem genügt und die Anfangswerte erfüllt, finden oder nicht, für jedes n gibt es eindeutige h_n und f_n; Auch ohne Formel, in die wir bloß n und die Anfangswerte einsetzen müssen, ist die Abbildung $n \mapsto (h_n, f_n)$ dennoch eindeutig definiert!

Formen wir das Differentialgleichungssystem in eine etwas übersichtlichere Darstellung um:

$$\begin{cases} h_{n+1} - h_n & = 0{,}78 \cdot h_n - 0{,}08 \cdot h_n - h_n \cdot \frac{1}{40} \cdot fn \\ f_{n+1} - f_n & = -0{,}12 \cdot fn + f_n \cdot \frac{1}{500} \cdot h_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_{n+1} - h_n & = 0{,}7h_n - \frac{1}{40}h_n f_n \\ f_{n+1} - f_n & = -0{,}12fn - \frac{1}{500}f_n h_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_{n+1} - h_n & = \frac{1}{40}h_n\,(40 \cdot 0{,}7 - f_n) \\ f_{n+1} - f_n & = \frac{1}{500}f_n\,(-500 \cdot 0{,}12 + h_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_{n+1} - h_n & = \frac{1}{40}h_n\,(28 - f_n) \\ f_{n+1} - f_n & = -\frac{1}{500}f_n\,(60 - h_n) \end{cases}$$

b) Gleichgewicht herrscht, wenn $h_{n+1} = h_n$ und $f_{n+1} = f_n$ gelten. Formen wir unser System mit dieser Eigenschaft eingesetzt einmal um:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{40}h_n\,(28 - f_n) \\ 0 = -\frac{1}{500}f_n\,(60 - h_n) \end{cases}$$

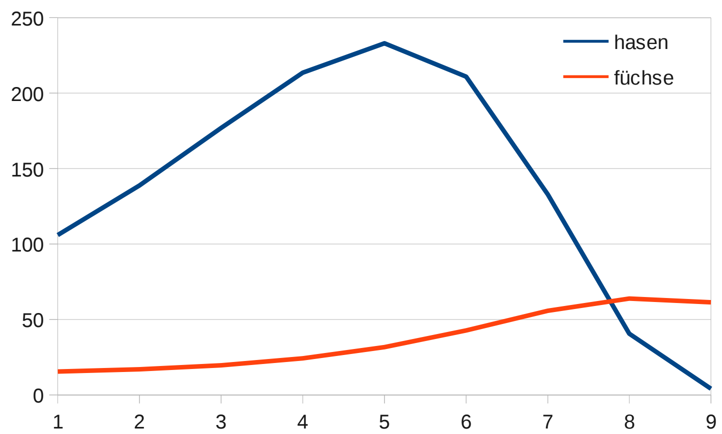
$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_n = 0 \lor f_n = 28 \\ f_n = 0 \lor h_n = 60 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (h_n = 0 \land f_n = 0) \lor (f_n = 28 \land h_n = 60)\,.$$

Mit $h_n > 0$ und $f_n > 0$ ist somit $h_{n+1} = h_n$ und $f_{n+1} = f_n$ äquivalent zu $h_n = 60$ und $f_n = 28$; gibt es zu Beginn eines Jahres 60 Hasen und 28 Füchse, so bleibt deren Zahl am Ende des Jahres unverändert.

c) Für die Startwerte $h = 80$ und $f = 15$ erhalten wir

n	hasen	füchse
0	80	15
1	106	16
2	139	17
3	177	20
4	214	24
5	233	32
6	211	43
7	133	56
8	41	64
9	4	61
10	1	55
11	0	48
12	0	42
13	0	37
14	0	33
15	0	29
16	0	25
17	0	22
18	0	20
19	0	17
20	0	15



Aufgabe 4: Ein Körper der Masse m wird von der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Der Luftwiderstand soll mit dem *Stoke'schen Gesetz* $F_R = -cv$ für den Strömungswiderstand in viskosen Fluiden berücksichtigt werden, das für kleine Geschwindigkeiten sinnvoll ist. Dabei ist c ein von der Größe des Körpers abhängiger Koeffizient. Die Bewegung hänge von der Masse m der Geschwindigkeit v_0 sowie dem Reibungskoeffizienten c mit der Dimension $[c] = M/T$ ab. M sei dabei die Abkürzung für die Dimension Masse.

a) Bestimmen Sie die möglichen dimensionslosen Parameter des Problems.

b) Wir betrachten das Anfangswertproblem für die Höhe des Körpers

$$mx''(t) = -cx'(t) - mg, \quad x(0) = 0\,, \quad x'(0) = v_0\,. \tag{3}$$

Entdimensionalisieren Sie die Differentialgleichung. Es gibt wieder mehrere Möglichkeiten.

c) Diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten eines reduzierten Modells, wenn $\beta := \frac{cv_0}{mg} << 1$ ist.

<u>Lösung:</u>

a)+b) Dimensionsbehaftete Größen sind

$$\begin{array}{cc} [c] = \frac{M}{T} & [x(t)] = L \\ [m] = M & [x'(t)] = \frac{L}{T} \\ [t] = T & [v] = \frac{L}{T} \\ [g] = \frac{L}{T^2} & [x''(t)] = \frac{L}{T^2} \end{array}$$

Wir setzen wie in Aufgabe 2 die Dimensionslosen Größen τ und y durch Skalierungen mit $\bar{t}$ und $\overline{x}$ zu $\tau := \frac{t}{\bar{t}}$, $y(\frac{t}{\bar{t}}) := \frac{c(t)}{\overline{x}}$ und erhalten

$$t = \bar{t}\tau\,, \quad x(t) = \overline{x}y(\tau)\,, \quad x'(t) = \frac{\overline{x}}{\bar{t}} \cdot y'(\tau)\,, \quad x''(t) = \frac{\overline{x}}{\bar{t}^2} \cdot y''(\tau)$$

und können einsetzen

$$\begin{aligned} mx''(t) &= -cx'(t) - mg \\ \Leftrightarrow m\frac{\overline{x}}{\bar{t}^2}y''(\tau) &= -c\frac{\overline{x}}{\bar{t}}y'(\tau) - mg \end{aligned}$$

$y(\tau)$, $y'(\tau)$, $y''(\tau)$ sind allesamt dimensionslos, allerdings kommen noch allerlei dimensionsbehaftete Größen in unserer Gleichung vor. Sortieren wir um:

$$\begin{aligned} & m \cdot \frac{\overline{x}}{\bar{t}^2} \cdot y''(\tau) = -c \cdot \frac{\overline{x}}{\bar{t}} \cdot y'(\tau) - mg \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\bar{t}^2}{m\overline{x}} \cdot \frac{x}{\bar{t}^2} \cdot y''(\tau) = -\left(\frac{\bar{t}^2}{m\overline{x}}\right) \cdot c \cdot \frac{\overline{x}}{\bar{t}} \cdot y'(\tau) - \left(\frac{\bar{t}^2}{m\overline{x}}\right) mg \\ \Leftrightarrow\ & y''(\tau) = \frac{\bar{t}c}{m} \cdot y'(\tau) - \frac{\bar{t}^2 g}{\overline{x}} \end{aligned}$$

mit

$$\left[\frac{\bar{t}c}{m}\right] = \frac{T \cdot \frac{M}{T}}{L} = 1 \qquad \text{und} \qquad \left[\frac{\bar{t}^2 g}{\overline{x}}\right] = \frac{T^2 \cdot \frac{L}{T^2}}{L} = 1$$

Betrachten wir unsere Anfangswerte $x(0) = 0$ und $x'(0) = v$, so erhalten wir wegen $t = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{0}{\bar{t}} = 0$

$$\begin{aligned} 0 = x(0) = \overline{x}y(0) \quad &\Rightarrow \quad y(0) = 0 \\ v = x'(0) = \frac{\overline{x}}{\bar{t}} \cdot y'(0) \quad &\Rightarrow \quad y'(0) = \frac{\bar{t}}{\overline{x}}v \end{aligned}$$

mit $\left[\frac{\bar{t}}{\overline{x}}v\right] = \frac{T}{L} \cdot \frac{L}{T} = 1$. Somit ist das AWP

$$\begin{cases} y''(\tau) = \frac{\bar{t}c}{M} \cdot y'(\tau) - \frac{\bar{t}^2 g}{\overline{x}} \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = \frac{\bar{t}}{\overline{x}}v \end{cases}$$

für jede Vorgabe von m, c, g, v und für jede Skalenwahl von $\bar{t}$, $\overline{x}$ dimensionslos, alle Einheiten kürzen sich weg, es bleibt ein zahlwertiges Problem übrig. Die Zahlen $\frac{\bar{t}c}{m}$, $\frac{\bar{t}^2 g}{\overline{x}}$, $\frac{\bar{t}}{\overline{x}}v$ können nun von uns durch geeignete Wahl von $\bar{t}$ und $\overline{x}$ beeinflusst werden. Wir können hoffen, für eine Wahl zwei der drei Zahlen zu normieren, die dritte ergibt sich dann und wird weiterhin von den Parametern des Problems abhängig sein. Für diese Wahl haben wir nun $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten:

1. Wir setzen $\frac{\bar{t}c}{m} = 1$ und $\frac{\bar{t}^2 g}{\bar{x}} = 1$ an, was auf

$$\bar{t} = \frac{m}{c} \quad \text{und} \quad \bar{x} = \bar{t}^2 g = \frac{m^2}{c^2} g$$

führt. Eingesetzt in das AWP erhalten wir

$$\begin{cases} y''(\tau) = y'(t) - 1 \\ y(0) = 0, y'(c) = \frac{cv}{mg} \,. \end{cases}$$

2. Wir setzen $\frac{\bar{t}c}{m} = 1$ und $\frac{\bar{t}}{\bar{x}} v = 1$ an, was auf

$$\bar{t} = \frac{m}{c} \quad \text{und} \quad \bar{x} = \bar{t}v = \frac{m}{c} v$$

führt. Eingesetzt in das AWP erhalten wir

$$\begin{cases} y''(\tau) = y'(t) - \frac{mg}{cv} \\ y(0) = 0, y'(c) = 1 \,. \end{cases}$$

3. Wir setzen $\frac{\bar{t}^2 g}{\bar{x}} = 1$ und $\frac{\bar{t}}{\bar{x}} v = 1$ an, was auf

$$\bar{t} = \frac{v}{g} \quad \text{und} \quad \bar{x} = \bar{t}v = \frac{v^2}{g}$$

führt. Eingesetzt in das AWP erhalten wir

$$\begin{cases} y''(\tau) = \frac{cv}{mg} \cdot y'(t) - 1 \\ y(0) = 0, y'(c) = 1 \,. \end{cases}$$

Wir erkennen nun, nachdem wir $\bar{x}$ und $\bar{t}$ belegt haben, dass unser Problem nur noch von den vorgegebenen Größen c, v, m, g abhängt und überhall, wo diese Größen auftauchen, bilden sie einen Verband der eine ganzzahlige Potenz von $\beta := \frac{cv}{mg}$ ist. Dies liegt daran, dass alle Kombinationen, ganzzahlige Potenzen von c, v, m, g zu multiplizieren und ein dimensionsloses Produkt zu erhalten, genau die ganzzahligen Potenzen von β sind.

Aus diesem Grund lässt sich dieses β auch schon per Gleichungssystem bestimmen, ohne konkret das dimensionsbehaftete Problem entdimensionalisiert zu haben. Es ist

$$
\begin{aligned}
&\left[m^i \cdot v^j \cdot c^k \cdot g^l\right] = 1 \\
\Leftrightarrow\ & M^i \cdot \left(\frac{M}{T}\right)^j \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^k \cdot \left(\frac{L}{T^2}\right)^l = M^{i+j} \cdot L^{k+l} \cdot T^{-j-k-2l} = 1 \\
\Rightarrow\ & \begin{cases} i + j = 0 \\ k + l = 0 \\ -j - k - 2l = 0 \end{cases} \\
\rightarrow\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\rightarrow\ & \mathbb{L} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle
\end{aligned}
$$

also $[m^{-1} \cdot v^1 \cdot c^1 \cdot g^{-1}] = 1$ oder eben $[\beta^z] = 1$ mit $\beta := \frac{cv}{mg}$ und $z \in \mathbb{Z}$

c) Gehen wir nun von der Annahme aus, dass $\beta := \frac{cv}{mg}$ so klein ist, dass wir es als null annehmen, und so für unsere Modellierung eine Annäherung hinnehmen, in der Erwartung die weitere Lösung vereinfachen zu können, ohne große Fehler zu machen. In unseren drei Möglichkeiten der Skalierung wirkt sich ein $\beta = 0$ unterschiedlich aus, schauen wir, welche Auswirkungen es auf die Lösung hat, von der wir ja qualitativ ein gewisses Lösungsverhalten erwarten: Wir werfen einen Körper von der Nulllage senkrecht nach oben, bei der Bewegung wirkt die Erdanziehung und die durch die Bewegung induzierte Luftreibung auf den Körper ein: Er wird sich nach oben bewegen, dabei abbremsen, den höchsten Punkt erreichen und dann weiter nach unten beschleunigen. Dabei wird sein Flug durch die Luftreibung etwas verzögert.

Für $\beta := 0$ gilt:

1. $y''(t) = \underbrace{-y'(t)}_{\text{Luftwiderst. bleibt erhalten}} -1$ mit $y(0) = 0$ und $\underbrace{y'(0) = \beta = 0}_{\text{Anfangsgeschw. wird null}}$,

   also $y'' = -y'(t) - 1$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$: Der Körper wird aus dem Stand nach unten beschleunigt. Dies entspricht nicht unserem Modell des Wurfes nach oben.

   Diese angenäherte Modellierung ist dem Problem nicht angemessen!

2. $y''(t) = -y'(t) \underbrace{-\frac{1}{0}}_{\text{nicht definiert}}$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = \beta = 1$,

   also ist die Differentialgleichung nicht mehr definiert.

   Diese angenäherte Modellierung ist dem Problem nicht angemessen!

3. $y''(t) = \underbrace{-0 \cdot y'(t)}_{\text{Luftwiderst. wird null}} -1$ mit $y(0) = 0$ und $\underbrace{y'(0) = 1}_{\text{Anfangsgeschw. bleibt erhalten}}$,

also bewegt sich der Körper nach oben und wird dabei konstant nach unten beschleunigt. Ersetzen wir die dimensionslosen Größen wieder durch die dimensionsbehafteten und vergleichen das so erzeugte AWP mit dem ursprünglichen: Aus $y'' = -1$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$ wird mit $\overline{t} = \frac{v}{g}$ und $\overline{x} = \frac{v^2}{g}$

$$x''(t) = \frac{\overline{x}}{\overline{t}^2} \cdot y''(\tau) = \frac{\overline{x}}{\overline{t}^2} \cdot y''(\frac{t}{\overline{t}}) = \frac{\frac{v^2}{g}}{\frac{v^2}{g^2}} \cdot 1 = -g$$

Der Luftwiderstand hat sich aus unserer DGL verabschiedet. Wir können die aus dem ersten Übungsblatt bekannte Formel für den senkrechten Wurf $x(t) = -\frac{1}{2}gt - v$ erwarten. Überprüfen wir dies, indem wir unser entdimensionalisiertes, vereinfachtes Problem lösen:

$y''(\tau) = -1$ führt durch Integration nach τ auf die Stammfunktion $y'(\tau) = -\tau + \text{const}$. Wegen $1 = y'(0) = -0 + \text{const}$ ist dann $y'(\tau) = -\tau + 1$. Erneutes Integrieren ergibt $y(\tau) = -\frac{1}{2}\tau^2 + \tau + \text{const}$. Wegen $0 = -\frac{1}{2}0^2 + 0 + \text{const}$ erhalten wir

$$y(\tau) = -\frac{1}{2}\tau^2 + \tau\,.$$

Dimensionalisieren führt dann auf

$$\begin{aligned} x(t) &= \overline{x} \cdot y\left(\frac{t}{\overline{t}}\right) \\ &= \frac{v^2}{g} \cdot y\left(\frac{tg}{v}\right) \\ &= \frac{v^2}{g}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{tg}{v}\right)^2 + \frac{tg}{v}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{g} \cdot \frac{t^2g^2}{v^2} + \frac{v^2}{g} \cdot \frac{tg}{v} \\ &= -\frac{1}{2}gt^2 + vt\,, \end{aligned}$$

also auf genau das Erwartete.