Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 21.05.2012

5.Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“ Lösung

Aufgabe 1: In der Vorlesung wurde der folgende Satz behauptet:

Satz 1.2 Es seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $r, s\colon J \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= r(t) \cdot y + s(t)\,, \quad t \in J && (1) \\ y(t_0) &= y_0 && (2) \end{aligned}$$

gegeben durch die Funktion

$$y(t) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \int_{t_0}^t s(\tau) \cdot \mathrm{e}^{\int_\tau^t r(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau\,.$$

Beweisen Sie diesen Satz, indem Sie

a) nachrechnen, dass y die Differentialgleichung (1) und die Anfangsbedingung (2) erfüllt.

b) zeigen, dass die Lösung eindeutig ist. Wir setzen dazu $y_p(t) := \int_{t_0}^t s(\tau) \cdot \mathrm{e}^{\int_\tau^t r(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$. Nehmen Sie an, dass z eine weitere Lösung von (1)-(2) ist und betrachten Sie $\frac{y(t)-y_p(t)}{z(t)-y_p(t)}$.

Lösung:

a) Bevor wir mit dem Beweis des Satzes loslegen, beweisen wir zunächst zwei Behauptungen:

Beh. 1 Es sei $F(t) := \int_a^t f(t,s)\,\mathrm{d}s$, dann gilt für die Ableitung

$$F'(t) = f(t,t) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} f(t,s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Beweis:
Wir betrachten die Ableitung entsprechend ihrer Definition über den Differentialquotienten $F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h}$:

$$\begin{aligned}
F(t+h) - F(t) &= \int_a^{t+h} f(t+h,s)\,\mathrm{d}s - \int_a^t f(t,s)\,\mathrm{d}s \\
&\underset{1)}{=} \int_a^{t+h} \left(f(t,s) + \frac{\partial}{\partial t} f(t+h,s)\cdot h + R(h) \right) \mathrm{d}s - \int_a^t f(t,s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_t^{t+h} \left(f(t,s)\,\mathrm{d}s + h \cdot \int_a^{t+h} \frac{\partial}{\partial t} f(t+h,s) + \frac{R(h)}{h} \right) \mathrm{d}s \\
&\underset{2)}{=} h \cdot f(t,\xi) + h \cdot \int_a^{t+h} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(t+h,s) + \frac{R(h)}{h} \right) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{R(h)}{h} \underset{h\to 0}{\to} 0 \quad \text{und} \quad \xi \in [t, t+h]\,.$$

Hierbei nutzen wir unter 1) die Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung nach dem ersten Argument von f an der Stelle t mit dem Restglied $R(h)$ und unter 2) den Mittelwertsatz der Integralrechnung, wonach es für $\int_t^{t+h} f(t,s)\,\mathrm{d}s$ eine Zwischenstelle ξ gibt, sodass f an dieser Stelle eine für die Integralbildung „durchschnittliche Höhe“ besitzt, das Integral dieser „Höhe“ $f(t,\xi)$ mal „Breite“ h entspricht. Somit gilt

$$\begin{aligned}
F'(t) \quad \underset{h\to 0}{\leftarrow} \quad & \frac{F(t+h)-F(t)}{h} \\
&= \underbrace{f(t,\xi)}_{\xi\in[t,t+h]} + \int_a^{t+h} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(t+h,s) + \underbrace{\frac{R(h)}{h}}_{\to 0} \right) \mathrm{d}s \\
\underset{h\to 0}{\to} \quad & f(t,t) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} f(t,s)\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

//

<u>Beh. 2</u> Sei $y_p(t) := \int_{t_0}^t s(\tau)\cdot \mathrm{e}^{\int_\tau^t r(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$, dann ist y_p eine partikuläre Lösung des AWP.

Beweis:
Die partikuläre Lösung muss nicht den Anfangswert erfüllen, sie muss nur eine Lösung der DGL darstellen. Wir zeigen also bloß, y_p erfüllt die DGL. Setzen wir $F(t) := \int_{t_0}^t f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau$ mit $f(t,\tau) := s(\tau)\cdot \mathrm{e}^{\int_\tau^t r(\sigma)\mathrm{d}\sigma}$, dann ist $y_p(t) = F(t)$ und wir

können Beh. 1 zum Ableiten verwenden:

$$
\begin{aligned}
y_p'(t) = F'(t) = f(t,t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= s(t) \cdot \mathrm{e}^{\int_t^t r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma} + \int_{t_0}^{t} s(\tau) \cdot \mathrm{e}^{\int_\tau^t r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma} \cdot r(t)\,\mathrm{d}\tau \\
&= s(t) + r(t) \cdot \int_{t_0}^{t} s(\tau) \cdot \mathrm{e}^{\int_\tau^t r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}\tau \\
&= r(t) \cdot y_p(t) + s(t)
\end{aligned}
$$

//

Wagen wir uns jetzt ans Satz 1.2:
Beweis:
Mit unserer Definition von y_p aus Beh. 2 ist

$$y(t) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + y_p(t)$$

und wir erhalten mit Beh. 2

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= r(t) \cdot y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \underbrace{r(t) \cdot y_p(t) + s(t)}_{y_p'(t)} \\
&= r(t) + \left(y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + y_p(t)\right) + s(t) \\
&= r(t) \cdot y(t) + s(t)\,.
\end{aligned}
$$

Einsetzen von t_0 in $y(t)$ liefert ferner

$$y(t_0) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_0} r(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \int_{t_0}^{t_0} s(\tau) \cdot \mathrm{e}^{\int_\tau^{t_0} r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}\tau = y_0 \cdot \mathrm{e}^0 + 0 = y_0\,.$$

□

$\boxed{2}$

b) Wir wollen nun die Eindeutigkeit der Lösung

$$y(t) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + y_p(t)$$

(mit y_p wie oben) nachweisen. Dadurch, dass wir gezeigt haben, dass y eine Lösung des AWP ist, wissen wir nun, die Menge aller Lösungen des AWP hat zumindest ein Element. Nehmen wir nun ein beliebiges Element dieser Lösungsmenge und bezeichnen es mit z. Wir können nicht mehr davon ausgehen, dass $z(t)$ ähnlich aussieht wie $y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + y_p(t)$, wir können nur davon ausgehen, z löst wie y das AWP. Somit wissen wir

$$y(t_0) = z(t_0) = y_0$$

$$y'(t) = r(t) \cdot y(t) + s(t)$$
$$z'(t) = r(t) \cdot z(t) + s(t)$$

und da y_p eine partikuläre Lösung ist,

$$y_p'(t) = r(t) \cdot y_p(t) + s(t)\,.$$

Betrachten wir nun den Quotienten $\frac{y(t)-y_p(t)}{z(t)-y_p(t)}$. Leiten wir ihn nach t ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y-y_p}{z-y_p}\right)'(t) &= \frac{(y-y_p)'(t)\cdot(z-y_p)(t)-(y-y_p)(t)\cdot(z-y_p)'(t)}{(z(t)-y_p(t))^2} \\
&= \frac{(r(t)\cdot y(t)+s(t)-r(t)\cdot y_p(t)-s(t))\cdot(z(t)-y_p(t))}{(z(t)-y_p(t))^2} \\
&\quad - \frac{(y(t)-y_p(t))\cdot(r(t)\cdot z(t)+s(t)-r(t)\cdot y_p(t)-s(t))}{(z(t)-y_p(t))^2} \\
&= \frac{r(t)\cdot(y(t)-y_p(t))\cdot(z(t)-y_p(t))}{(z(t)-y_p(t))^2} \\
&\quad - \frac{r(t)\cdot(y(t)-y_p(t))\cdot(z(t)-y_p(t))}{(z(t)-y_p(t))^2} \\
&= \frac{0}{(z(t)-y_p(t))^2} = 0 \qquad \text{für alle } t \in J
\end{aligned}$$

und können daraus schließen, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\frac{y(t)-y_p(t)}{z(t)-y_p(t)} = c \qquad \text{für alle } t \in J$$

schließen. Das heißt, für ein beliebiges z gibt es genau ein c, sodass $\frac{y(t)-y_p(t)}{z(t)-y_p(t)} = c$ unabhängig von t gilt. So muss dies natürlich auch für t_0 gelten und mit $y(t_0) = z(t_0) = y_0$ erhalten wir

$$c = \frac{y(t_0)-y_p(t_0)}{z(t_0)-y_p(t_0)} = \frac{y_0-y_p(t_0)}{y_0-y_p(t_0)} = 1$$

und damit $y(t)-y_p(t) = z(t)-y_p(t)$, also

$$y(t) = z(t) \quad \text{für alle } t \in J\,,$$

weshalb $y = z$ sein muss, und jedes beliebige Element der Lösungsmenge des AWP ist y, also gibt es genau eine Lösung. $\square$

$\boxed{2}$

Aufgabe 2:
Ein See habe ein Volumen von $1,5\,km^3$ Wasser. Pro Jahr strömen durch einen einmündenden Fluss $0,3\,km^3$ Wasser in den See, das Schadstoffe mit einer Konzentration von $500\,\frac{kg}{km^3}$ enthalte. Zusätzlich kommen durch am See liegende Fabriken pro Jahr $250\,kg$ Schadstoffe direkt in den See. Außerdem fließen pro Jahr $0,3\,km^3$ Wasser durch einen anderen Fluss wieder aus dem See hinaus. Wir nehmen an, dass sich die Schadstoffe stets sofort und gleichmäßig im See verteilen. Die Funktion $u(t)$ gebe den Schadstoffgehalt im See in kg nach t Jahren an ($t \geq 0$). Zur Zeit $t = 0$ enthalte der See $1000\,kg$ Schadstoffe.

a) Es sei $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Bestimmen Sie näherungsweise die Differenz $u(t + \tau) - u(t)$. Nehmen Sie dabei an, dass die Schadstoffkonzentration des zwischen den Zeitpunkten t und $t + \tau$ Jahren aus dem See abfließenden Wassers gleich ist und der Schadstoffkonzentration im See zur Zeit t entspricht. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u näherungsweise die Differentialgleichung $u' = -\frac{1}{5}u + 400$ für $t \geq 0$ erfüllt.

b) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, durch lösen der in Teil a) erhaltenen Differentialgleichung.

c) Skizzieren und beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf des Schadstoffgehaltes im See.

<u>Lösung:</u>

a) Zwischen den Zeitpunkten t und $t + \tau$ Jahren kommen $0,3 \cdot 500 \cdot \tau = 150\tau\,kg$ Schadstoffe durch den einmündenden Fluss in den See, da pro Jahr $0,3 \cdot 500 = 150\,kg$ durch den Fluss in den See kommen. Außerdem kommen durch die am See liegenden Fabriken $250 \cdot \tau\,kg$ Schadstoffe zwischen den Zeitpunkten t und $t + \tau$ Jahren in den See. Zum Zeitpunkt t enthält der See $u(t)\,kg$ Schadstoffe, also ist die Schadstoffkonzentration $\frac{u(t)}{1,5} = \frac{2}{3}u(t)\,\frac{kg}{km^3}$. Da zwischen den Zeitpunkten t und $t + \tau$ Jahren $0,3 \cdot \tau\,km^3$ Wasser aus dem See fließen, fließen mit diesem Wasser gemäß der Annahme $\frac{2}{3}u(t) \cdot 0,3 \cdot \tau = \frac{1}{5}u(t) \cdot \tau\,kg$ Schadstoffe aus dem See. Daher gilt näherungsweise

$$u(t + \tau) - u(t) = -\frac{1}{5}u(t) \cdot \tau + 150 \cdot \tau + 250 \cdot \tau.$$

Es folgt

$$\frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau} = -\frac{1}{5}u(t) + 400.$$

Mit dem Grenzübergang $\tau \to 0$ erhält man dann, dass u näherungsweise die Differentialgleichung

$$u'(t) = -\frac{1}{5}u(t) + 400$$

erfüllt. $\boxed{1}$

b) Die in Teil a) erhaltene Differentialgleichung ist eine lineare. Die allgemeine Lösung u_h der homogenen Gleichung $u' = -\frac{1}{5}u$ ist gegeben durch

$$u_h(t) = c \cdot e^{-\frac{t}{5}}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Um eine partikuläre Lösung u_p der inhomogenen Gleichung zu bestimmen, verwenden wir den Ansatz

$$u_p(t) = a$$

für ein $a \in \mathbb{R}$, da die Inhomogenität 400 eine Konstante ist. Durch Einsetzen in die Gleichung ergibt sich die Bedingung

$$0 = u_p'(t) = -\frac{1}{5}u(t) + 400 = -\frac{a}{5} + 400, \qquad t \geq 0,$$

also $a = 2000$. Somit ist $u_p(t) \equiv 2000$ eine partikuläre Lösung, so dass die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben ist durch

$$u_{allg}(t) = u_h(t) + u_p(t) = c \cdot e^{-\frac{t}{5}} + 2000, \qquad t \geq 0,$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangsbedingung $u(0) = 1000$ ergibt die Bedingung

$$1000 = u(0) = c + 2000,$$

also $c = -1000$. Somit folgt

$$u(t) = -1000 \cdot e^{-\frac{t}{5}} + 2000, \qquad t \geq 0.$$

$\boxed{1}$

c) Der Schadstoffgehalt im See nimmt mit wachsender Zeit immer weiter zu, da die Funktion $u(t)$ monoton wachsend ist. Außerdem pendelt sich der Schadstoffgehalt auf lange Sicht in der Nähe des Wertes 2000 kg ein, so dass er auf lange Sicht doppelt so groß wie zu Beginn ist. (Zusätzlich ist noch eine Skizze der Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, anzufertigen.) $\boxed{1}$

Aufgabe 3:
Wir betrachten eine Gruppe von Menschen, die alle dasselbe Alter haben. Die Funktion $y(t)$ gebe die Anzahl dieser Menschen an, die nach t Jahren noch leben ($t \geq 0$). Zu Beginn bestehe die Gruppe aus 100 000 Menschen. Die zeitliche Entwicklung von y werde durch die Differentialgleichung $y'(t) = -a(t) \cdot y(t)$, $t \geq 0$, beschrieben. Dabei werde die Sterbeintensität a im Laufe der Zeit immer größer und entwickle sich gemäß der Differentialgleichung $a' = \frac{1}{20}a$, $t \geq 0$, wobei $a(0) = \frac{1}{100}$ gelte.

a) Berechnen Sie zunächst die Funktion $a(t)$, $t \geq 0$, und lösen Sie dann das Anfangswertproblem, das $y(t)$, $t \geq 0$, erfüllt.

b) Eine andere Gruppe von Menschen, die alle dasselbe Alter wie die zuvor betrachteten Menschen haben, sei durch eine Naturkatastrophe stark geschwächt und bestehe zu Beginn ebenfalls aus 100 000 Menschen. Diese Gruppe entwickle sich gemäß der Differentialgleichung $x'(t) = -a(t) \cdot x(t) - 10 \cdot e^{\frac{t}{20}}$, $t \geq 0$, wobei $x(t)$ die Anzahl der nach t Jahren noch lebenden Menschen dieser Gruppe angebe. Berechnen Sie die Funktion $x(t)$, $t \geq 0$.

c) Beschreiben Sie die Unterschiede, die in der zeitlichen Entwicklung der beiden Gruppen auf lange Sicht auftreten.

Lösung:

a) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $a' = \frac{1}{20}a$ ist gegeben durch $a(t) = c \cdot e^{\frac{t}{20}}$. Unter Berücksichtigung des Anfangswertes folgt daher

$$a(t) = \frac{1}{100} \cdot e^{\frac{t}{20}}, \qquad t \geq 0.$$

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = -a(t) \cdot y(t)$ verwenden wir die Methode der getrennten Variablen. Es folgt für $c \in \mathbb{R}$

$$\int_c^{y(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{1}{100} \int_0^t e^{\frac{s}{20}} \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

Somit folgt

$$\ln(y(t)) - \ln c = -\frac{1}{5}\left(e^{\frac{t}{20}} - 1\right),$$

so dass die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung gegeben ist durch

$$y(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)}, \qquad t \geq 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Setzt man nun die Anfangsbedingung $y(0) = 100\,000$ ein, so folgt

$$y(t) = 100\,000 \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)}, \qquad t \geq 0.$$

$\boxed{1}$

b) Nach Teil a) ist die allgemeine Lösung x_h der homogenen Differentialgleichung $x' = -a(t)x$ gegeben durch

$$x_h(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)}, \qquad t \geq 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Mit der Methode der Variation der Konstanten bestimmen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $x' = -a(t) \cdot x - 10 \cdot e^{\frac{t}{20}}$ mit dem Ansatz

$$x_p(t) = c(t) \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)}, \qquad t \geq 0.$$

Durch einsetzen in die Gleichung ergibt dies die Bedingung

$$\begin{aligned}
& c'(t) \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)} - c(t) \cdot \frac{1}{100} e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)} \\
= \; & x_p'(t) = -a(t) \cdot x_p(t) - 10 \cdot e^{\frac{t}{20}} \\
= \; & -\frac{1}{100} e^{\frac{t}{20}} \cdot c(t) \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)} - 10 \cdot e^{\frac{t}{20}}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$c'(t) \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)} = -10 \cdot e^{\frac{t}{20}}$$

und daher

$$c'(t) = -10 \cdot e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)}, \qquad t \geq 0.$$

Mit der Substitution $z(t) = \frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}} - 1)$ folgt somit

$$\begin{aligned} c(t) &= \int -10 \cdot e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)} \mathrm{d}t = -\int 1000 \cdot z'(t) e^{z(t)} \mathrm{d}t = -1000 \int e^z \mathrm{d}z \\ &= -1000 \cdot e^z + d = -1000 \cdot e^{\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)} + d, \end{aligned}$$

wobei $d \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar ist. Da wir nur eine partikuläre Lösung suchen, setzen wir $d = 0$ und erhalten

$$x_p(t) = c(t) \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)} = -1000, \qquad t \geq 0.$$

Die Lösung $x(t)$ ist also gegeben durch

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)} - 1000, \qquad t \geq 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt werden muss, dass $x(0) = 100\,000$ gilt. Es folgt

$$x(t) = 101\,000 \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t}{20}}-1)} - 1000, \qquad t \geq 0.$$

$\boxed{1}$

c) Da die Funktion $x(t)$ für große t negativ wird, macht es nur Sinn, $x(t)$ für $t \in [0, t_0]$ zu betrachten, wobei t_0 die Zeit ist, für die $x(t_0) = 0$ gilt und alle Mitglieder der Gruppe gestorben sind. Für t_0 muss also die Bedingung

$$101\,000 \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{\frac{t_0}{20}}-1)} = 1000,$$

also $101 = e^{\frac{1}{5}(e^{\frac{t_0}{20}}-1)}$ gelten. Es folgt $\ln(101) = \frac{1}{5}(e^{\frac{t_0}{20}} - 1)$, also

$$t_0 = 20 \cdot \ln(1 + 5 \cdot \ln(101)) \approx 63{,}6.$$

Nach ungefähr $63{,}6$ Jahren sind also alle Mitglieder der geschwächten Gruppe gestorben. Zur gleichen Zeit leben noch etwa 990 Mitglieder der ersten Gruppe. Wegen $y(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ und $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ werden theoretisch nie alle Mitglieder der ersten Gruppe gestorben sein. Da die Anzahl der Mitglieder der Gruppe aber ganzzahlig ist, kann man erwarten, dass nach einer endlichen Zeit auch alle Mitglieder der ersten Gruppe gestorben sind. So lebt nach etwa $81{,}4$ Jahren noch ein Mitglied der ersten Gruppe. Die Mitglieder der geschwächten Gruppe sterben also im Mittel deutlich früher als die Mitglieder der anderen Gruppe. $\boxed{1}$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

a) $y' = \frac{4a}{t} + t^4$ für $t > 0$

b) $y' = y\tan(t) - 2\sin(t)$ für $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

c) $t^2 y' = 1 - y$ für $t < 0$

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

d) $y' = 2ty + t, \quad y(0) = 1$

e) $y' = \frac{2}{t} y + 2t^3, \quad y(2) = 20$

Lösung:

a) Wir haben

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{4 \cdot y(t)}{t} + t^4 \\ &= r(t) \cdot y(t) + s(t) \end{aligned}$$

für $t > 0$ und mit $r(t) = \frac{1}{t}$ und $s(t) = t^4$ gegeben und suchen nach der Menge der Lösungen, welche diese DGL erfüllen. Wir arbeiten in mehreren Schritten:

1. Betrachten wir zunächst

$$y_h'(t) = \frac{4 \cdot y_h(t)}{t} = r(t) \cdot y_h(t)\,,$$

also lassen wir den den Störterm t^4 weg und suchen nach der Menge der Funktionen y_h, welche diese homogene DGL erfüllen (aber somit keine Lösung für unsere DGL $y'(t) = r(t) \cdot y(t) + s(t)$ sind!)

Wir können per „Trennung der Veränderlichen" lösen. D. h. wir sortieren die Terme so, dass wir einen Ausdruck, der nur von y_h abhängt, multipliziert mit y' auf der linken, einen Ausdruck, der nur von t abhängt, auf der rechten Seite haben und Lösen durch Integrieren.

Angenommen, es gilt $y_h(t) \neq 0$ für alle $t > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} & y_h'(t) = \frac{4 \cdot y_h(t)}{t} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{y_h'(t)}{y_h(t)} = \frac{4}{t} \\ \Leftrightarrow\ & \int^t \frac{y_h'(\tau)}{y_h(\tau)} \,\mathrm{d}\tau = \int^t \frac{4}{\tau} \,\mathrm{d}\tau \qquad \text{subst. } y := y_h(t) \\ \Leftrightarrow\ & \int^{y_h(t)} \frac{1}{\xi} \,\mathrm{d}\xi = \int^t \frac{4}{\tau} \,\mathrm{d}\tau \\ \Leftrightarrow\ & \log|y_h(t)| = 4\log|t| + c = \log\left(|t|^4 \cdot \mathrm{e}^c\right) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & |y_h(t)| = |t|^4 \underbrace{\mathrm{e}^c}_{>0} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y_h(t) = \tilde{c}t^4 \quad \text{mit } \tilde{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In der letzten Umformung nutzen wir aus: Für $t > 0$ ist die rechte Seite stetig und ungleich Null.

Ist y_h nun stetig, so kann das sich Vorzeichen von $y_h(t)$ für $t > 0$ nicht ändern, ohne $y_h(t) = 0$ zu erreichen. Für $y_0 > 0$ gilt $y_h(t) < 0$, für $y_0 > 0$ gilt $y_h(t) > 0$ für alle $t > 0$. Deshalb lassen wir die Betragsstriche um y weg und ersetzen im Gegenzug $\mathrm{e}^c > 0$ durch $\tilde{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir nahmen bislang $y_h(t) \neq 0$ an. Für $y_0 = 0$ ist die Nullfunktion eine Lösung, so ist insgesamt

$$y_h(t) = \tilde{c}t^4 \quad \text{mit } \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

die Lösungsmenge.

Die gleichen Schritte, allgemein für $y_h'(t) = r(t) \cdot y_h(t)$ ausgeführt, ergeben analog:

Für $y_h(t) \neq 0$ für alle $t > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
& y_h'(t) = r(t) \cdot y_h(t) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{y_h'(t)}{y_h(t)} = r(t) \\
\tau \Leftrightarrow\ & \int^t \frac{y_h'(\tau)}{y_h(t)} \,\mathrm{d}t = \int^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow\ & \int^{y_h(t)} \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow\ & \log|y_h(t)| = R(t) + c \quad \text{mit } R'(t) = r(t) \\
\Leftrightarrow\ & |y_h(t)| = \mathrm{e}^c \cdot \mathrm{e}^{R(t)} \\
\Leftrightarrow\ & y_h(t) = \tilde{c} \cdot \mathrm{e}^{R(t)} \quad \text{mit } \tilde{c} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Mit $r(t) = \frac{4}{t}$ und somit $R(t) = 4\log|t| = \log t^4$ erhalten wir auch wie oben

$$\{y_h \in \{t \mapsto ct^4\} \mid c \in \mathbb{R}\}$$

als Lösungsmenge des homogenen Problems.

2. Im ersten Schritt haben wir die Menge der Lösungen bestimmt, welche nicht die zu untersuchende DGL, sondern nur die homogene Variante erfüllen. Im zweiten Schritt finden wir nun *eine*, die partikuläre Lösung der zu untersuchenden DGL, aber dafür im Gegenzug nun ohne die gesamte Menge zu finden. Hätten wir nun ein AWP gegeben, also noch einen Anfangswert zu erfüllen, wäre nicht zu erwarten, dass die partikuläre Lösung diesen erfüllt.

   Was wir nun tun, ist etwas sehr Typisches im Umgang mit Differentialgleichungen: Wir suchen nach einer partikulären Lösung, finden könnten wir eine ganze Menge, haben aber keinen allgemeinen Ansatz, sie aufzuspüren. Wählen wir aber einen Ansatz, der diese Menge möglicher partikulärer Lösungen einschränkt, finden wir vielleicht eine. Finden wir keine, hat uns der Ansatz nicht genug geholfen oder hat die Menge der Lösungen zu sehr eingeschränkt.

Ein Ansatz, der bei lineare Differentialgleichungen zum Erfolg führt, ist die Variation der Konstanten. Wir setzen in unserem Fall

$$y_p(t) = c(t) \cdot t^4 = c(t) \cdot \mathrm{e}^{R(t)}$$

an, ersetzen die Konstante in der Menge der Lösungen des homogenen Problems durch eine Funktion $c\colon J \to \mathbb{R}$.

Dass nun dieser Ansatz sinnvoll war, sehen wir, wenn wir y_p nach t ableiten

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= c(t) \cdot 4t^3 + c'(t) \cdot t^4 \\ &= 4 \cdot \frac{c(t)t^4}{t} + c'(t) \cdot t^4 \\ &= \frac{4 \cdot y_p(t)}{t} + c'(t) \cdot t^4 \end{aligned}$$

und mit der zu erfüllenden DGL

$$y_p'(t) = \frac{4 \cdot y_p(t)}{t} + t^4$$

vergleichen: Genau, wenn $c'(t) \cdot t^4 = t^4$ also $c'(t) = 1$ gilt, ist unser Ansatz $y_p(t) = c(t) \cdot t^4$ eine partikuläre Lösung. Dies ist beispielsweise für $y_p(t) = t^5$ der Fall.

Betrachten wir unser Vorgehen nochmal allgemein für $y_p(t) = c(t) \cdot \mathrm{e}^{R(t)}$. Wir leiten ab

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= c(t) \cdot r(t) \cdot \mathrm{e}^{R(t)} + c'(t) \cdot \mathrm{e}^{R(t)} \\ &= r(t) \cdot y_p(t) + c'(t) \cdot \mathrm{e}^{R(t)} \end{aligned}$$

und vergleichen mit

$$y_p'(t) = r(t) \cdot y_p(t) + s(t)\,.$$

Genau wenn $c'(t) \cdot \mathrm{e}^{R(t)} = s(t)$, also wenn

$$c(t) = \int^t \mathrm{e}^{-R(\tau)} \cdot s(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

gilt, ist y_p eine partikuläre Lösung, also

$$y_p(t) = \int^t \mathrm{e}^{-R(\tau)} \cdot s(\tau)\,\mathrm{d}\tau \cdot \mathrm{e}^{R(t)} = \int^t \mathrm{e}^{R(t)-R(\tau)} \cdot s(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

3. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt $y_h'(t) = \frac{4 \cdot y_h(t)}{t}$ und es gilt $y_p'(t) = \frac{4 \cdot y_p(t)}{t} + t^4$. Summieren wir beide Gleichungen auf, erhalten wir

$$y_h'(t) + y_p'(t) = \frac{4 \cdot y_h(t)}{t} + \frac{4 \cdot y_p(t)}{t} + t^4$$

und damit

$$(y_h(t) + y_p(t))' = \frac{4 \cdot (y_h(t)t + y_p(t)}{t} + t^4 \,.$$

Setzen wir $y = y_h + y_p$, so erhalten wir

$$y'(t) = \frac{4 \cdot y(t)}{t} + t^4 \,.$$

Somit löst $y(t) = c \cdot t^4 + t^5$ für alle $c \in \mathbb{R}$ die DGL und

$$\{y \in \{t \mapsto c \cdot t^4 + t^5\} \mid c \in \mathbb{R}\}$$

ist unsere gesuchte Lösungsmenge. Die Probe

$$\begin{aligned} y'(t) &= 4ct^3 + 5t^4 \\ &= 4 \cdot \frac{ct^4}{t} + 4\frac{t^5}{t} + t^4 \\ &= \frac{4 \cdot (ct^4 + t^5)}{t} + t^4 \end{aligned}$$

bestätigt unser Ergebnis.

Allgemein für $y'(t) = r(t) \cdot y(t) + s(t)$ erhalten wir analog

$$y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{R(t)} + \int^t \mathrm{e}^{R(t)-R(\tau)} \cdot s(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}\,,$$

eine zu Satz 1.2 konforme Aussage, Unterschiede sind auf das Fehlen der Anfangsbedingung zurückzuführen.

$\boxed{1}$

b) Mit $r(t) = \tan(t)$ und $s(t) = -2\sin(t)$ ist die DGL $y'(t) = r(t) \cdot y(t) + s(t)$ gegeben. Verwenden wir die in a) allgemein gezeigten Schritte:

1. Eine Stammfunktion von r ist $R \colon J \to \mathbb{R}$ mit $J := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ und $R(t) = -\log|\cos(t)|$. Für die Lösung des homogenen Problems $y_h'(t) = r(t) \cdot y(t)$ erhalten wir $y_h(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\log|\cos(t)|} = c \cdot \frac{1}{\cos(t)}$ für alle $t \in J$.
2. Wir erhalten, unter Ausnutzung der trigonometrischen Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\,, \end{aligned}$$

als partikuläre Lösung

$$
\begin{aligned}
y_p(t) &= \int^t s(\tau) \cdot \mathrm{e}^{R(t)-R(\tau)} \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int^t -2\sin(\tau) \cdot \mathrm{e}^{-\log|\cos(t)|+\log|\cos(\tau)|} \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int^t -2\sin(\tau) \cdot \frac{1}{\cos(t)} \cdot \cos(\tau) \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int^t -\sin(2\tau) \,\mathrm{d}\tau \cdot \frac{1}{\cos(t)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \cos(2t) \cdot \frac{1}{\cos(t)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \big(\cos^2(t) - \sin^2(t)\big) \cdot \frac{1}{\cos(t)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \big(2\cos^2(t) - 1\big) \cdot \frac{1}{\cos(t)} \\
&= \cos(t) - \frac{1}{2\cos(t)} \,.
\end{aligned}
$$

Da $-\frac{1}{2\cos(t)}$ selbst schon in der Lösungsmenge der homogenen Gleichung vertreten ist, ist auch $y_p(t) = \cos(t)$ eine partikuläre Lösung. Dies können wir gut einsehen, vergleichen wir

$$\cos(t) \cdot \frac{\sin(t)}{\cos(t)} - 2\sin(t) = \sin(t) - 2\sin(t) = -\sin(t)$$

mit

$$\cos'(t) = -\sin(t) \,.$$

3. Die allgemeine Lösungsmenge wird somit bestimmt durch

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \frac{c - \frac{1}{2}}{\cos(t)} + \cos(x) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \,,$$

beziehungsweise, ersetzen wir $c - \frac{1}{2}$ durch eine neue neue Konstante, durch

$$y(t) = \frac{c}{\cos(t)} + \cos(t) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \,.$$

Eine Probe ergibt

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= -\sin(t) \cdot \left(-\frac{c}{\cos^2(t)} \right) - \sin(t) \\
&= \frac{c}{\cos(t)} \cdot \frac{\sin(t)}{\cos(t)} + \cos(t) \cdot \frac{\sin(t)}{\cos(t)} - 2\sin(t) \\
&= \left(\frac{c}{\cos(t)} + \cos(t) \right) \cdot \tan(t) - 2\sin(t) \\
&= y(t) \cdot \tan(t) - 2\sin(t) \,.
\end{aligned}
$$

$\boxed{1}$

c) Für $J := (-\infty, 0]$ gilt $t^2 \cdot y'(t) = 1 - y(t) \Leftrightarrow y'(t) = \frac{1-y(t)}{t^2}$. Dann ist mit $r(t) = -\frac{1}{t^2}$ und $s(t) = \frac{1}{t^2}$ ist die DGL $y'(t) = r(t) \cdot y(t) + s(t)$ gegeben. Verwenden wir abermals die in a) allgemein gezeigten Schritte:

1. Eine Stammfunktion von r ist $R\colon J \to \mathbb{R}$ mit $R(t) = \frac{1}{t}$. Für die Lösung des homogenen Problems $y_h'(t) = r(t) \cdot y(t)$ erhalten wir $y_h(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$.
2. Wir erhalten als partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int^t s(\tau) \cdot \mathrm{e}^{R(t)-R(\tau)} \,\mathrm{d}\tau \\ &= \int^t \frac{1}{\tau^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}} \,\mathrm{d}\tau \\ &= \int^t \frac{1}{\tau^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}} \,\mathrm{d}\tau \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \\ &= t \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} = 1 \end{aligned}$$

3. Die allgemeine Lösungsmenge wird somit bestimmt durch

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} + 1\,.$$

Eine Probe ergibt

$$\begin{aligned} y'(t) &= -\frac{1}{t^2} \cdot c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \\ &= \frac{1}{t^2} \cdot \left(-c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - 1 + 1\right) \\ &= \frac{-y(t) + 1}{t^2}\,. \end{aligned}$$

$\boxed{1}$

Für das Lösen der folgenden Anfangswertprobleme reicht uns nicht mehr nur das Aufstellen der Lösungsmenge, also der Menge aller die Differentialgleichung erfüllenden Funktionen. Mit einem 4. Schritt, dem Auswählen genau des $c \in \mathbb{R}$, dass das entsprechende Element der Menge sowohl die DGL als auch den gegebenen Anffangswert erfüllt.

d) Für $J := \mathbb{R}$ ist mit $r(t) = 2t$ und $s(t) = t$ ist die DGL $y'(t) = r(t) \cdot y(t) + s(t)$ gegeben. Zunächst verwenden wie wie in a) bis c) die gezeigten Schritte:

1. Eine Stammfunktion von r ist $R\colon J \to \mathbb{R}$ mit $R(t) = t^2$. Für die Lösung des homogenen Problems $y_h'(t) = r(t) \cdot y(t)$ erhalten wir $y_h(t) = c \cdot \mathrm{e}^{t^2}$.

2. Wir erhalten als partikuläre Lösung

$$
\begin{aligned}
y_p(t) &= \int^t s(\tau) \cdot \mathrm{e}^{R(t)-R(\tau)} \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int^t \tau \mathrm{e}^{t^2-\tau^2} \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int^t \tau \mathrm{e}^{-\tau^2} \,\mathrm{d}\tau \cdot \mathrm{e}^{t^2} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \mathrm{e}^{t^2} = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

3. Wieder erhalten wir für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL

$$
y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c \cdot \mathrm{e}^{t^2} - \frac{1}{2}\,.
$$

4. Nun passen wir noch c an – das Erfüllen des Anfangswert bedeutet für die Wahl von c:

$$
1 = y(0) = c \cdot \mathrm{e}^0 - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{3}{2}\,.
$$

Somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$
y(t) = \frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{t^2} - \frac{1}{2}\,.
$$

Eine Probe ergibt

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= 2t \cdot \frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{t^2} \\
&= 2t \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{t^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
&= 2t \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{t^2} - \frac{1}{2} \right) + t \\
&= 2t \cdot y(t) + t
\end{aligned}
$$

wie auch

$$
y(0) = \frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^0 - \frac{1}{2} = 1\,.
$$

$\boxed{1}$

e) Wir gehen wie in d) vor. Es ist $J := \mathbb{R}$. Mit $r(t) = \frac{2}{t}$ und $s(t) = 2t^3$ ist die DGL $y'(t) = r(t) \cdot y(t) + s(t)$ gegeben.

1. Eine Stammfunktion von r ist $R\colon J \to \mathbb{R}$ mit $R(t) = 2 \log |t|$. Für die Lösung des homogenen Problems $y_h'(t) = r(t) \cdot y(t)$ erhalten wir $y_h(t) = c \cdot \mathrm{e}^{2 \log |t|} = c \cdot t^2$.

2. Wir erhalten als partikuläre Lösung

$$
\begin{aligned}
y_p(t) &= \int^t s(\tau) \cdot \mathrm{e}^{R(t)-R(\tau)} \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int^t 2\tau^3 \mathrm{e}^{2\log|t| - 2\log|\tau|} \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int^t 2\tau^3 \cdot \tau^{-2} \, \mathrm{d}\tau \cdot t^2 \\
&= \int^t 2\tau \, \mathrm{d}\tau \cdot t^2 \\
&= t^4
\end{aligned}
$$

3. Zusammen erhalten wir $y(t) = c \cdot t^2 + t^4$ mit $c \in \mathbb{R}$.
4. Passen wir c entsprechend an:

$$20 = y(2) = c2^2 + 2^4 = 4c + 16$$

lässt uns auf $c = 1$ schließen und wir haben als Lösung des AWP

$$y(t) = t^2 + t^4 \, .$$

Eine Probe ergibt

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= 2t + 4t^3 \\
&= 2 \cdot \frac{t^4}{t} + 2 \cdot \frac{t^2}{t} + 2t^3 \\
&= 2 \cdot \frac{y(t)}{t} + 2t^3
\end{aligned}
$$

wie auch

$$y(2) = 2^2 + 2^4 = 4 + 16 = 20 \, .$$

$\boxed{1}$