Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 28.05.2012

6. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“ Lösung

Aufgabe 1: Sie kennen alle das Phänomen, dass Sie gelernten Stoff mit der Zeit wieder vergessen. Dieses Vergessen soll mathematisch modelliert werden. Dazu sei $P(t)$ der Prozentsatz des Wissens, den Sie zur Zeit t noch beherrschen. Wir nehmen an, dass Sie zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ den gesamten Stoff konnten, also $P(0) = 100$. Ferner gehen wir davon aus, dass ein bestimmter Prozentsatz $0 < b < 100$ nie vergessen wird. Die Änderung des Prozentsatzes in dem kleinen Zeitintervall $[\,t\,,\,t+\tau\,]$ sei proportional zu τ und zur Differenz von $P(t)$ und b, also zum Prozentsatz des Stoffes, den Sie zur Zeit t noch vergessen können.

a) Bestimmen Sie durch einen Grenzübergang $\tau \to 0$ eine Diffentialgleichung und das AWP, das P erfüllt.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem und untersuchen Sie die Lösung im Hinblick auf das Langzeitverhalten und Wendestellen. Skizzieren Sie die Lösung.

<u>Lösung:</u>

a) Die Änderung des Prozentsatzes im kleinen, τ andauernden, Zeitintervall wird durch $P(t+\tau)-P(t)$ beschrieben. Diese ist proportional zu τ und proportional zu $(P(t)-b)$. Da nun $P(t)$ abnehmen soll, wenn $P(t) > b$ gilt, muss die Proportionalitätskonstante negativ sein, somit gilt mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$

$$P(t+\tau) - P(t) = -\alpha \cdot \tau \cdot (P(t) - b)\ .$$

Umstellen liefert die Differenzengleichung

$$\frac{P(t+\tau) - P(t)}{\tau} = -\alpha \cdot (P(t) - b)\ ,$$

und wir erhalten im Grenzübergang $\tau \to 0$ die Differentialgleichung

$$P'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{P(t+\tau) - P(t)}{\tau} = -\alpha \cdot (P(t) - b)\ .$$

Das AWP lautet somit

$$\begin{cases} P'(t) = -\alpha \cdot (P(t) - b) \\ P(0) = 100\,. \end{cases}$$

b) Mit $P'(t) = -\alpha \cdot P(t) + \alpha b$ haben wir unter den Voraussetzungen $r(t) = -\alpha$ und $s(t) = \alpha b$ die inhomogen lineare DGL $P'(t) = r(t) \cdot P(t) + s(t)$ gegeben. Ihre homogene Lösung lautet (vgl. dazu Übungsblatt 5)

$$P_h(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Der Störterm ist konstant, wir setzen ebenfalls eine konstante partikuläre Lösung mit $P_p(t) = \kappa$ und $\kappa \in \mathbb{R}$ an und erhalten Gleichheit von

$$P_p'(t) = 0$$

und

$$-\alpha \cdot P_p(t) + \alpha b = -\alpha\kappa + \alpha b = \alpha \cdot (b - k)$$

bei $\kappa = b$. Somit lautet die allgemeine Lösung, die für jedes $c \in \mathbb{R}$ die DGL löst

$$P(t) = P_h(t) + P_p(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} + b\,.$$

Aus diesem Grund liegt die Lösungs*menge* $\{y \in \{t \mapsto c \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} + b \mid c \in \mathbb{R}\}\}$ vor. Abschließend passen wir noch c soweit an, um aus dieser Lösungsmenge die Funktion zu finden, die sowohl die DGL als auch den Anfangswert erfüllt. Es muss gelten

$$100 = P(0) = c \cdot \mathrm{e}^0 + b\,,$$

somit $c = 100 - b$, was auf die Lösung

$$P(t) = (100 - b) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} + b$$

führt. Wegen

$$\begin{aligned} P(t) > b \quad &\Leftrightarrow \quad (100 - b) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} + b > b \\ &\Leftrightarrow \quad (100 - b) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-\alpha t}}_{>0} > b \\ &\Leftrightarrow \quad 100 > b \end{aligned}$$

erreicht P niemals b und wegen

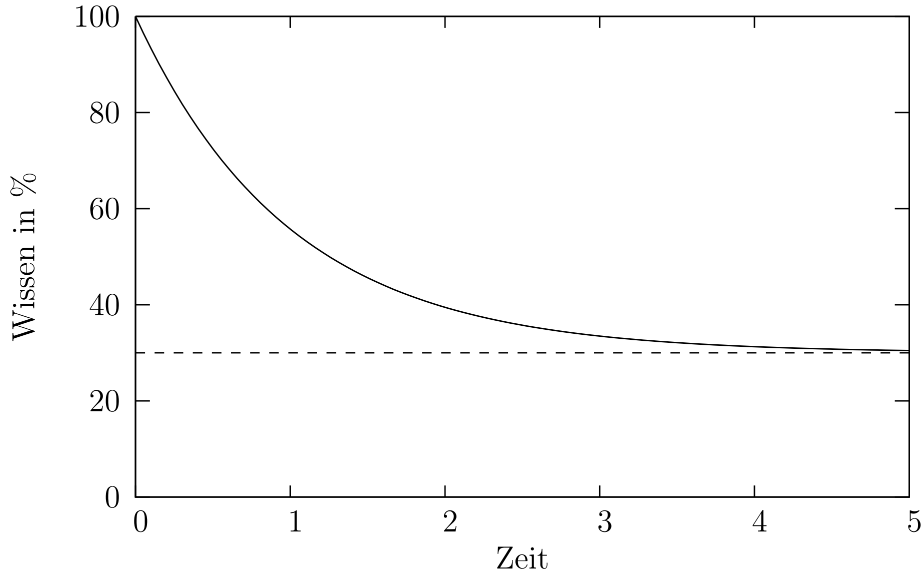
$$P'(t) = -\alpha \cdot \underbrace{(P(t) - b)}_{>0} < 0 \qquad \text{für } \alpha > 0 \text{ und } t \geq 0$$

ist P streng monoton fallend. Mit

$$P''(t) = -\alpha \underbrace{P'(t)}_{<0} > 0 \qquad \text{für } \alpha > 0 \text{ und } t \geq 0$$

ist P konvex.

Beispielhaft für $b = 30$ ergibt sich folgender Verlauf:



Aufgabe 2: Es soll der Salzhaushalt einer biologischen Zelle mathematisch modelliert werden. Wir bezeichnen mit $c(t)$ die Salzkonzentration in der Zelle zur Zeit t. Die Zelle wird zur Zeit $t_0 = 0$ in eine Flüssigkeit mit der Salzkonzentration c_A gebracht. Nun wird die Zelle ihre Salzkonzentration mit der Zeit an die Außenkonzentration anpassen, in dem sie Salz aufnimmt oder abgibt. Wir nehmen dabei an, dass die Flüssigkeitsmenge in die die Zelle gebracht wird, so groß ist, dass der Salzaustausch die Salzkonzentration c_A nicht nennenswert beeinflusst.

a) Modellieren Sie diesen Prozess mit Hilfe einer Differentialgleichung.

b) Diskutieren Sie die Lösungen für die beiden Fälle $c_A > c(0)$ und $c_A < c(0)$.

Lösung:

a) Die Änderung der Konzentration ist proportional zur Differenz von c_A und $c(t)$. Umstellen ergibt eine zu a) analoge DGL

$$c'(t) = -r \cdot (c(t) - c_A) \qquad \text{mit } r > 0$$

und somit die Lösung

$$c(t) = (c(0) - c_A) \cdot \mathrm{e}^{-rt} + c_A \,.$$

b) Wir erhalten mit einer zu a) analogen Rechnung

$$\begin{aligned} c(t) > c_A \quad &\Leftrightarrow \quad c(0) > c_A \\ c(t) = c_A \quad &\Leftrightarrow \quad c(0) = c_A \\ c(t) < c_A \quad &\Leftrightarrow \quad c(0) < c_A \end{aligned}$$

und so gilt

$$c'(t) = -r \cdot (c(t) - c_A) \begin{cases} < 0 & \text{für } c(0) > c_A \\ = 0 & \text{für } c(0) = c_A \\ > 0 & \text{für } c(0) < c_A \,. \end{cases}$$

Für die Untersuchung auf Wendestellen betrachten wir die zweite Ableitung von c, indem wir die DGL einmal ableiten und $c''(t) = -r \cdot c'(t)$ erhalten. Nun gilt

$$c''(t) = 0 \Leftrightarrow -r \cdot c'(t) = 0 \Leftrightarrow c'(t) = 0\,;$$

Wendestellen existieren keine, für $c(0) > c_A$ ist c konvex auf $t \geq 0$, für $c(0) < c_A$ konkav auf $t \geq 0$.

Aufgabe 3: Eine Population y entwickle sich ähnlich des logistischen Prinzips, wobei nun die Sterberate proportional zu y^α mit einem $\alpha > 2$ sei. Somit entwickelt sich $y(t)$ gemäß

$$y' = a\,y - b\,y^\alpha, \quad t \geq 0, \quad \text{mit } y(0) = y_0 > 0,$$

wobei a und b positive Konstanten seien.

a) Lösen Sie das obige Anfangswertproblem und zeigen Sie insbesondere, dass die Lösung $y(t)$ für alle $t \geq 0$ existiert.

b) Wie verhält sich die Population für $t \to \infty$? Vergleichen Sie das Verhalten der Population ür große Zeiten t mit dem entsprechenden Verhalten der Population aus Beispiel IV 1.12 der Vorlesung.

Lösung:

a) Wir setzen $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$ dann ist $z(0) = y(0)^{1-\alpha} = y_0^{1-\alpha}$ und wir haben mit

$$\begin{aligned} z'(t) &= (1-\alpha) \cdot y(t)^{-\alpha} \cdot y'(t) \\ &= (1-\alpha) \cdot y(t)^{-\alpha} \cdot ((a \cdot y(t) - b \cdot y(t)^\alpha) \\ &= (1-\alpha) \cdot \big(a \cdot y(t)^{1-\alpha} - b\big) \\ &= (1-\alpha) \cdot (a \cdot z(t) - b) \\ &= (1-\alpha) \cdot a \cdot z(t) - (1-\alpha) \cdot b \end{aligned}$$

eine lineare DGL. Die Lösungsmenge des homogenen Problems wird durch

$$z_h(t) = c \cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot at} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

bestimmt. Ein konstanter Störterm führt bei linearen DGLen zur Möglichkeit einer konstanten partikulären Lösung, in unserem Fall ist diese $z_p(t) = \frac{b}{a}$, wie wir leicht sehen können: Es ist

$$z_p'(t) = 0$$

und

$$(1-\alpha) \cdot (a \cdot z_p(t) - b) = (1-\alpha) \cdot \left(a \cdot \frac{b}{a} - b\right) = 0\,,$$

also beide Seiten der DGL bei Einsetzen von $z_p(t) = \frac{b}{a}$ gleich. Somit wird die allgemeine Lösung zu

$$z(t) = c \cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot at} + \frac{b}{a}$$

und mit $z(0) = z_0$ auch $c = z_0 - \frac{b}{a}$ und damit

$$z(t) = \left(z_0 - \frac{b}{a}\right) \cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot at}\, \frac{b}{a}\,.$$

Rückeinsetzen von $y^{1-\alpha}(t) = z(t)$ liefert

$$y(t) = \left(\left(y_0^{1-\alpha} - \frac{b}{a}\right) \cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot at} + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\,.$$

Wegen $\left(y_0^{1-\alpha} - \frac{b}{a}\right) > -\frac{b}{a}$ gilt für alle $t \geq 0$

$$\left(y_0^{1-\alpha} - \frac{b}{a}\right) \cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot at} + \frac{b}{a} > -\frac{b}{a} \cdot \mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot at} + \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \big(-\underbrace{\mathrm{e}^{(1-\alpha)\cdot at}}_{<1} + 1\big) > 0\,,$$

somit ist $y(t)$ für alle $t \geq 0$ wohldefiniert.

b)

Aufgabe 4:
In einer chemischen Reaktion reagiert ein Atom Zink mit einem Atom Schwefel zu einem Molekül Zinksulfid. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich in einem Behälter a Mol Zink, b Mol Schwefel und noch kein Zinksulfid, wobei $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq b$ gelte. Die Funktion $u(t)$ gebe die Menge Zinksulfid in Mol im Behälter nach t Zeiteinheiten, $t \geq 0$, an. Dann erfüllt u die Differentialgleichung

$$u' = r \cdot (a - u) \cdot (b - u), \qquad t \geq 0,$$

wobei $r > 0$ eine Konstante ist.

a) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, durch Lösen des zugehörigen Anfangswertproblems.

b) Wie verhalten sich die Stoffmengen von Zink, Schwefel und Zinksulfid für sehr große Zeiten t in Abhängigkeit von den zu Beginn vorhandenen Stoffmengen a und b? Welche Bedeutung könnte die Konstante r in diesem Modell haben?

Lösung:

a) Wir Lösen durch Trennen der Variablen. Wir haben $u(0) = 0$. Für $u(t) \neq a$ und $u(t) \neq b$ für $t \geq 0$ gilt

$$u'(t) = r \cdot (a - u(t)) \cdot (b - u(t))$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{u'(t)}{(a-u(t))\cdot(b-u(t))} = r \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^t \frac{u'(\tau)}{(a-u(\tau))\cdot(b-u(\tau))}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t r\,\mathrm{d}\tau \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^{u(t)} \frac{1}{(a-\xi)\cdot(b-\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t r\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Für das weitere Vorgehen zerlegen wir $\frac{1}{(a-\xi)\cdot(b-\xi)}$ in die Summe der Partialbrüche $\frac{A}{\xi-a}$ und $\frac{B}{\xi-b}$ mit $A,B \in \mathbb{R}$. Um hierbei A und B zu bestimmen, können wir das erwünschte Resultat wieder zusammen auf einen Nenner bringen und einen Koeffizientenvergleich durchführen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a-\xi)\cdot(b-\xi)} &= \frac{A}{a-\xi} + \frac{B}{b-\xi} \\
&= \frac{A\cdot(b-\xi) + B\cdot(a-\xi)}{(a-\xi)\cdot(b-\xi)} \\
&= \frac{(-A-B)\cdot\xi + (Ab+Ba)}{(a-\xi)\cdot(b-\xi)}
\end{aligned}$$

Damit nun für alle ξ die Gleichung $1 = (-A-B)\cdot\xi + (Ab+Ba)$ gilt, muss $-A-B=0$ und $Ab+Ba=1$ sein. Dies führt auf $B=-A$ und $Ab-Aa = A(b-a) = 1$ also $A = \frac{1}{b-a}$ und $B = -\frac{1}{b-a}$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
& \int_0^{u(t)} \frac{1}{(a-\xi)\cdot(b-\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t r\,\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow\quad & \int_0^{u(t)} \left(\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{a-\xi} - \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{b-\xi}\right)\mathrm{d}\xi = \int_0^t r\,\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow\quad & \int_0^{u(t)} \left(\frac{1}{a-\xi} - \frac{1}{b-\xi}\right)\mathrm{d}\xi = (b-a)\cdot\int_0^t r\,\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow\quad & \int_0^{u(t)} \frac{1}{a-\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^{u(t)} \frac{1}{b-\xi}\,\mathrm{d}\xi = (b-a)\cdot\int_0^t r\,\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow\quad & \int_{a-0}^{a-u(t)} -\frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_{b-0}^{b-u(t)} \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = (b-a)\cdot\int_0^t r\,\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow\quad & -\Big[\log|\xi|\Big]_a^{a-u(t)} + \Big[\log|\xi|\Big]_b^{b-u(t)} = (b-a)\cdot\Big[r\tau\Big]_0^t \\
\Leftrightarrow\quad & \quad -\log|a-u(t)| + \log|b-u(t)| + \log|a-0| - \log|b-0| \\
& = (b-a)\cdot rt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \log\left|\frac{b-u(t)}{a-u(t)}\cdot\frac{a}{b}\right| = (b-a)\cdot rt \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{b-u(t)}{a-u(t)}\right| = \frac{b}{a}\cdot \mathrm{e}^{(b-a)\cdot rt} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{b-u(t)}{a-u(t)} = \frac{b}{a}\cdot \mathrm{e}^{(b-a)\cdot rt} \ .
\end{aligned}
$$

In der Umformung von der vorletzten auf die letzte Zeile nutzen wir aus, dass die rechte Seite niemals null wird und der Ausdruck auf der linken Seite als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. Ein Vorzeichenwechsel in $\frac{b-u(t)}{a-u(t)}$ muss allerdings die Null wegen des Zwischenwertsatzes durchlaufen. Da nun $u(0) = 0$ ist, startet die linke Seite innerhalb der Betragsstriche bei $\frac{b}{a}$, die Betragsfunktion wird durch das Weglassen der Betragsstriche für $u(0)$ durch die Identität ersetzt, so kann dieses Weglassen für alle $t \geq 0$ geschehen. Insgesamt erhalten wir

$$
u'(t) = r\cdot(b-u(t))\cdot(a-u(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b-u(t)}{a-u(t)} = \frac{b}{a}\cdot \mathrm{e}^{(b-a)\cdot rt}
$$

und können nur weiter umformen. Hierzu substituieren wir $\Phi(t) := \frac{b}{a}\cdot \mathrm{e}^{(b-a)\cdot rt}$ der Einfachheit halber:

$$
\begin{aligned}
& \frac{b-u(t)}{a-u(t)} = \Phi(t) \\
\Leftrightarrow \quad & b-u(t) = \Phi(t)\cdot a - \Phi(t)\cdot u(t) \\
\Leftrightarrow \quad & (-1+\Phi(t))\cdot u(t) = -b + \Phi(t)\cdot a \\
\Leftrightarrow \quad & u(t) = \frac{-b+\Phi(t)\cdot a}{-1+\Phi(t)}
\end{aligned}
$$

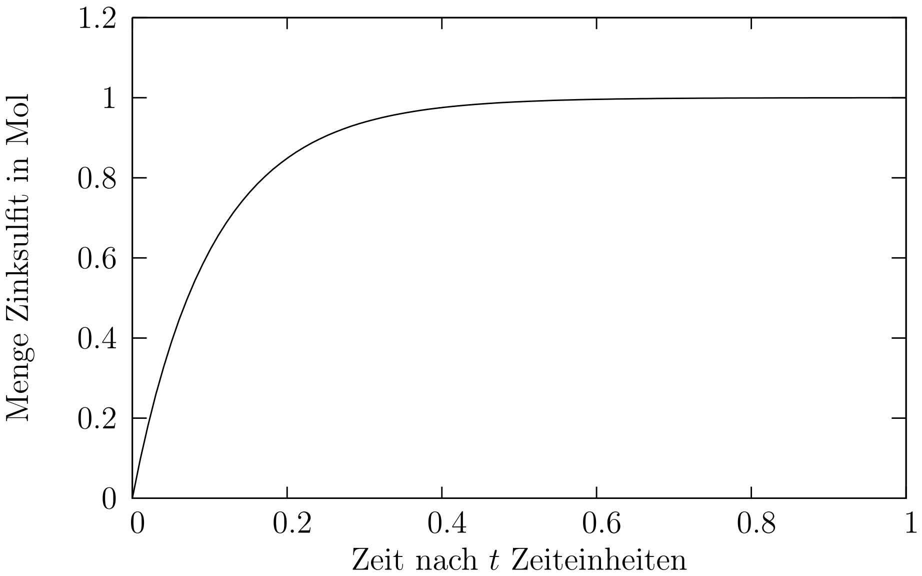
Nun formen wir noch etwas um und setzen für $\Phi(t)$ wieder unseren Ausdruck ein:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \frac{-b+\Phi(t)\cdot a}{-1+\Phi(t)} \\
&= \frac{-b+a-a+\Phi(t)\cdot a}{-1+\Phi(t)} \\
&= \frac{-b+a}{-1+\Phi(t)} + a\cdot\frac{-1+\Phi(t)}{-1+\Phi(t)} \\
&= \frac{a-b}{\frac{b}{a}\cdot \mathrm{e}^{(b-a)\cdot rt} - 1} + a
\end{aligned}
$$

b) Ist $b = a$, so gilt $\mathrm{e}^{(b-a)\cdot rt} = \mathrm{e}^0 = 1$, ist $b > a$, so gilt $\mathrm{e}^{(b-a)\cdot rt} \to \infty$, ist $b < a$, so gilt $\mathrm{e}^{(b-a)\cdot rt} \to 0$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} u(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{a-b}{\frac{b}{a}\cdot \mathrm{e}^{(b-a)\cdot rt} - 1} + a \\
&= \begin{cases} \frac{a-b}{\frac{b}{a}\cdot \mathrm{e}^{\infty} - 1} + a & \text{für } a < b \\ \frac{a-b}{\frac{b}{a}\cdot \mathrm{e}^{-\infty} - 1} + a & \text{für } a > b \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 + a & \text{für } a < b \\ \frac{a-b}{-1} + a & \text{für } a > b \end{cases} \\
&= \min\{a, b\}
\end{aligned}$$

Das Gleichgewicht strebt stets der kleineren der beiden Stoffmengen zu. Für $a = 1$, $b = 10$ und $r = 1$ erhalten wir den beispielhaften Verlauf:



Gebe $z(t)$ die Menge Zink in Mol im Behälter, $s(t)$ die Menge Schwefel in Mol im Behälter jeweils nach t Zeiteinheiten an, dann gilt

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{a-b}{\frac{b}{a}\cdot \mathrm{e}^{(b-a)\cdot rt} - 1} + a \to \min\{a, b\} \\
z(t) &= a - u(t) \to \max\{0, a-b\} \\
s(t) &= b - u(t) \to \max\{0, b-a\}\,.
\end{aligned}$$

Die so definierten Funktionen lösen das Anfangswertproblem, das durch ein System von drei Differentialgleichungen mit drei Anfangswerten gegeben ist

$$\begin{cases} u'(t) = +r\cdot z(t)\cdot s(t) \\ z'(t) = -r\cdot z(t)\cdot s(t) \\ s'(t) = -r\cdot z(t)\cdot s(t) \\ u(0) = 0,\ z(0) = a,\ s(0) = b\,, \end{cases}$$

welches uns aber nicht mehr Information zum Lösen liefert, als $u'(t) = r \cdot (a - u(t)) \cdot (b - u(t))$ mit $u(0) = 0$ und dem Wissen, zu Beginn a Mol Zink und b Mol Schwefel zu haben.

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils das maximale Intervall an, auf dem die Lösung existiert.

a) $y' = t \cdot e^{t^2 - 2y}$ mit $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

b) $(1 + t^2)y' - \sqrt{y + 3} = 0$ mit $y(0) = y_0 \geq 0$.

Lösung:

a) Sei $y(0) = y_0$, dann erhalten wir durch die Methode der Trennung der Veränderlichen

$$
\begin{aligned}
& y'(t) = t \cdot \mathrm{e}^{t^2 - 2y(t)} \\
\Leftrightarrow \quad & y'(t) = \mathrm{e}^{-2y(t)} \cdot t \cdot \mathrm{e}^{t^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{-2y(t)} \cdot y'(t) = t \cdot \mathrm{e}^{t^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^t \mathrm{e}^{2y(\tau)} \cdot y'(\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \tau \cdot \mathrm{e}^{\tau^2} \, \mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{y_0}^{y(t)} \mathrm{e}^{2\xi} \, \mathrm{d}\xi = \int_0^t \tau \cdot \mathrm{e}^{\tau^2} \, \mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow \quad & \left[\frac{1}{2} \mathrm{e}^{2\xi} \right]_{y_0}^{y(t)} = \left[\frac{1}{2} \mathrm{e}^{\tau^2} \right]_0^t \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{2y(t)} - \mathrm{e}^{2y_0} = \mathrm{e}^{t^2} - 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{2y(t)} = \mathrm{e}^{2y_0} + \mathrm{e}^{t^2} - 1 \\
\Leftrightarrow \quad & y(t) = \frac{1}{2} \log \left(\mathrm{e}^{2y_0} + \mathrm{e}^{t^2} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

Solange $\mathrm{e}^{2y_0} + \mathrm{e}^{t^2} - 1 > 0$ ist, existiert die Lösung. Nun ist $e^{2y_0} > 0$ für alle y_0, $e^{t^2} \geq 1$ für $t \geq 0$, also $\mathrm{e}^{2y_0} + \mathrm{e}^{t^2} - 1 > 0 + 1 - 1 = 0$; die Lösung existiert somit auf ganz $\mathbb{R}$.

b) Auch hier trennen wir wieder die Veränderlichen. Sei $y(0) = y_0 \geq 0$, dann gilt für $y(t) > -3$:

$$
\begin{aligned}
& (1 + t^2) \cdot y'(t) - \sqrt{y(t) + 3} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t) + 3}} = \frac{1}{1 + t^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^t \frac{y'(\tau)}{\sqrt{y(\tau) + 3}} \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{1}{1 + \tau^2} \, \mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

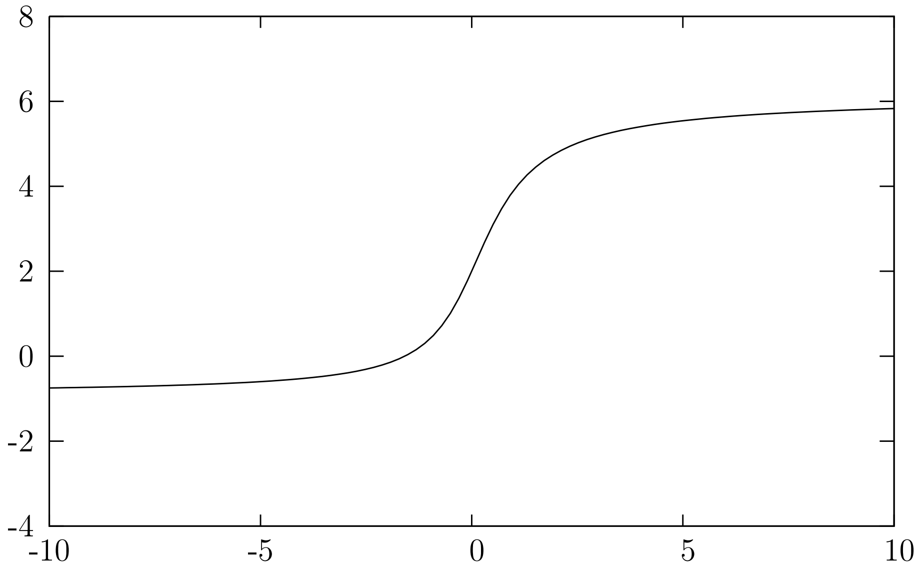
$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt{\xi+3}}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t \frac{1}{1+\tau^2}\,\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{y_0+3}^{y(t)+3} \frac{1}{\sqrt{\xi}}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t \frac{1}{1+\tau^2}\,\mathrm{d}\tau \\
\Leftrightarrow \quad & \left[2\sqrt{\xi}\right]_{y_0+3}^{y(t)+3} = [\arctan(\tau)]_0^t \\
\Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{y(t)+3} - 2\sqrt{y_0+3} = \arctan(t) - 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{y(t)+3} = \sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2}\cdot\arctan(t) \\
\Leftrightarrow \quad & y(t) = \left(\sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2}\cdot\arctan(t)\right)^2 - 3
\end{aligned}
$$

Prüfen wir nun. Wir müssen mit der Lösung einerseits $y(t) \geq -3$ für alle $t \geq -3$ garantieren, da die DGL wegen des Ausdrucks $\sqrt{y(t)+3}$ nur für solche $y(t)$ definiert ist. Andererseits würde für $y(t) = -3$ möglicherweise die DGL erfüllt, allerdings wäre unsere Herleitung der Lösung wegen der Ungültigkeit von Zeile eins auf Zeile zwei selbst ungültig. Hier müsste dann durch Ableiten der Lösung und Einsetzen in die DGL die Probe gemacht werden, ob die Lösung nicht nur unter der Einschränkung $y(t) > 3$ die DGL erfüllt.

Betrachten wir den Bildbereich von arctan ist $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, so erhalten wir mit $y_0 \geq 0$

$$
\begin{aligned}
y(t) &> (\sqrt{0+3} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 - 3 \\
&= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}\right)^2 - 3 \\
&> \left(\sqrt{1} - \frac{4}{4}\right)^2 - 3 = -3\,,
\end{aligned}
$$

und unsere Lösung $y(t) = \left(\sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2}\cdot\arctan(t)\right)^2 - 3$ ist stets größer -3, obige Probleme können nicht auftregen und die Lösung existiert somit auf ganz $\mathbb{R}$. Für $y_0 = 2$ stellt sie sich dar als



Ergänzung für Interessierte: Für $y_0 < 0$ klein genug berührt der Graph von y die -3 und obige Rechnung allein lässt uns nicht mehr auf die Existenz der Lösung für ganz $\mathbb{R}$ schließen!

Dies passiert genau, wenn es zu y_0 ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit $\sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) = 0$ ist. Dies ist der Fall, wenn $\sqrt{y_0+3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ gilt. Wir formen äquivalent um

$$\begin{aligned} & \sqrt{y_0+3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{y_0+3} \leq \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leq y_0 + 3 \leq \frac{\pi^2}{16} \\ \Leftrightarrow \quad & -3 \leq y_0 \leq \frac{\pi^2}{16} - 3 \end{aligned}$$

Also berührt der Graph von y genau dann die -3 für $y_0 \in \left(-3, \frac{\pi^2}{16} - 3\right) \approx (-3, -2{,}38)$. Für solche y_0 existiert jeweils ein t mit $y(t) = -3$ und wir dürfen für diese t die obige Umformung von Zeile 1 auf Zeile 2 bei der Lösung der DGL nicht durchführen. Für alle anderen Zeitpunkte ist selbst für $y_0 \in \left(-3, \frac{\pi^2}{16} - 3\right)$ nach unserer Rechnung die DGL anscheinend erfüllt. Existiert selbst dann unsere Lösung vielleicht sogar auf ganz $\mathbb{R}$? Dies können wir überprüfen, indem wir ableiten:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t)\right) \\ &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \left(\sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t)\right) \end{aligned}$$

Hier Vorsicht: Es gilt nicht $\sqrt{x^2} = x$, sondern $\sqrt{x^2} = |x|$ und deshalb

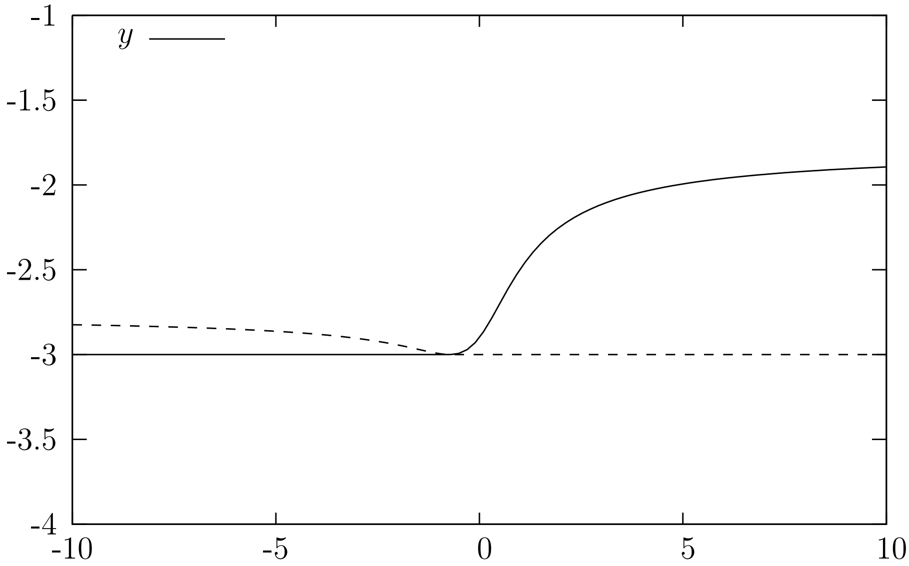
$$\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \Bigg(\left(\sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \right) \\
&\qquad - \left| \sqrt{y_0+3} - \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \right| + \left| \sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \right| \Bigg) \\
&= \frac{1}{1+t^2} \cdot \Bigg(\left(\sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \right) \\
&\qquad - \left| \sqrt{y_0+3} - \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \right| + \sqrt{\left(\sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \right)^2 - 3 + 3} \Bigg) \\
&= \frac{1}{1+t^2} \cdot \Bigg(\left(\sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \right) + \left| \sqrt{y_0+3} - \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \right| + \sqrt{y(t)+3} \Bigg).
\end{aligned}$$

Wir sehen nun, wegen

$$\begin{aligned}
y'(t) = \frac{\sqrt{y(t)+3}}{1+t^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) = \left| \sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \right| \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \arctan(t) \geq -2\sqrt{y_0+3} \\
&\Leftrightarrow \quad t \geq \tan\left(-2\sqrt{y_0+3} \right) =: t^*
\end{aligned}$$

hängt das Erfülltsein der DGL von t ab; nur für $t \geq t^*$ ist die DGL erfüllt, für kleinere Zeiten nicht! Nun ist $x \mapsto -3$ aber eine (konstante) Lösung der DGL. Diese erfüllt aber nicht den Anfangswert $y(t_0) = y_0 \geq 0$. Da aber $y'(t^*) = \frac{1}{1+t^2} \cdot \left(0 - 0 + \sqrt{-3+3}\right) = 0$ und $y(t^*) = 0^2 - 3 = -3$ gilt, lässt sich y für $t < t^*$ zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen und differenzierbaren Lösung ergänzen:

$$y(t) := \begin{cases} -3 & \text{für} \quad t < \tan(-2 \cdot \sqrt{y_0+3}) \\ \left(\sqrt{y_0+3} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(t) \right)^2 - 3 & \text{für} \quad t \geq \tan(-2 \cdot \sqrt{y_0+3}) \end{cases}$$



-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-10
-5
0
5
10
y