Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 04.06.2012

7. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“ Lösung

Aufgabe 1: In einem Raum, der $100\,m^3$ Luft enthält, befinden sich 15 Personen, wobei alle Fenster und Türen geschlossen sind. Dabei atme jede Person pro Minute etwa $0,25$ Liter CO_2 mehr aus als sie in dieser Zeit einatme. Nun werden durch eine Belüftungsanlage pro Minute $20\,m^3$ Frischluft, die $0,03$ Prozent CO_2 enthalte, in den Raum geblasen. Die Frischluft vermische sich sofort mit der Luft im Raum und von dieser Mischung werden durch die Belüftung pro Minute $20\,m^3$ aus dem Raum entfernt. Die Funktion $y(t)$ gebe den CO_2-Gehalt in Litern der Luft im Raum t Minuten nach dem Einschalten der Belüftungsanlage an ($t \geq 0$). Zum Zeitpunkt des Einschaltens der Belüftungsanlage enthalte die Luft im Raum $0,3$ Prozent CO_2.

a) Es sei $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Bestimmen Sie näherungsweise die Differenz $y(t+\tau) - y(t)$. Nehmen Sie dabei an, dass der CO_2-Gehalt der durch die Belüftung aus dem Raum entfernten Luft zwischen den Zeitpunkten t und $t+\tau$ Minuten konstant bleibt. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass y näherungsweise die Differentialgleichung $y' = -\frac{1}{5}y + 9,75$ für $t \geq 0$ erfüllt.

b) Berechnen Sie die Funktion $y(t)$, $t \geq 0$, durch lösen des zugehörigen Anfangswertproblems.

c) Wie lange dauert es nach dem Einschalten der Belüftung, bis die Luft im Raum noch $0,06$ Prozent CO_2 enthält?

Lösung:

a) Zu- und Abstrom an CO_2 lauten:

15 Personen amten pro Minute jeweils $0{,}25\,\mathrm{l}$ CO_2 mehr aus, als sie einatmen:

$$+\,15 \cdot 0{,}25\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} = 3{,}75\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}$$

Die Belüftungsanlage gibt pro Minute $20\,\mathrm{m}^3$ Luft ab, die zu einem Anteil von $0{,}03\,\%$ CO_2 enthält:

$$+\,0{,}03\,\% \cdot 20\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} = \frac{0{,}03}{100} \cdot 20 \cdot \frac{1000\,\mathrm{l}}{\mathrm{min}} = 6\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}$$

Die Belüftungsanlage entnimmt pro Minute $20\,\mathrm{m}^3$ Luft, die (bei für einen Zeitschritt angenommen konstante) Konzentration von $\frac{y(t)\,\mathrm{l}}{100\mathrm{m}^3}$ CO_2 beinhaltet:

$$-\frac{y(t)\,\mathrm{l}}{100\,\mathrm{m}^3}\cdot 20\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} = -\frac{1}{5}\cdot y(t)\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}$$

So erhalten wir in einem kleinen Zeitintervall τ an Zu- und Abstrom

$$\begin{aligned}(y(t+\tau)-y(t))\cdot \mathrm{l} &= +3{,}75\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}\cdot\tau\,\mathrm{min} + 6\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}\cdot\tau\,\mathrm{min} - \frac{1}{5}\cdot y(t)\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}\cdot\tau\,\mathrm{min}\\ &= 9{,}75\,\mathrm{l}\cdot\tau - \frac{1}{5}\,y(t)\,\mathrm{l}\cdot\tau\end{aligned}$$

bzw. Teilen durch l auf beiden Seiten

$$y(t+\tau)-y(t) = 9{,}75\cdot\tau - \frac{1}{5}\,y(t)\cdot\tau$$

ergibt einen dimensionslose Differenz, durch Teilen durch τ erhalten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{y(t+\tau)-y(t)}{\tau} = 9{,}75 - \frac{1}{5}\,y(t)$$

und mit dem Grenzübergang $\tau\to 0$ gehen wir zum Differentialquotienten

$$u'(t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{y(t+\tau)-y(t)}{\tau} = 9{,}75 - \frac{1}{5}\,y(t)$$

über und erhalten so die gesuchte DGL für $t \geq 0$. $\boxed{1}$

b) Zur Erinnerung machen wir uns nochmal klar:

Im Falle einer inhomogen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y(t) = \alpha\cdot(y(t)-\beta)$$

löst stets $y_h(t) = c\cdot \mathrm{e}^{\alpha t}$ das homogene Problem $y_h(t) = \alpha\cdot y(t)$ und $y_p(t) = \beta$ ist stets eine partikuläre Lösung der DGL, da sowohl $y_p'(t) = 0$ als auch $\alpha\cdot(y_p(t)-\beta) = 0$ gilt. Ist ein Startwert $y(0) = y_0$ (wichtig: der Startwert muss zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegen) gegeben, so lautet wegen $\mathrm{e}^{\alpha\cdot 0} = 1$ die Konstante $c = y_0 - \beta$. Somit existiert für das AWP

$$\begin{cases} y(t) = \alpha\cdot(y(t)-\beta)\\ y(0) = y_0\end{cases}$$

die eindeutige (siehe Aufgabe 1 Übung 5) Lösung

$$y(t) = (y_0-\beta)\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot t} + \beta\,.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ enthalten die $100\,\mathrm{m}^3$ Luft zu $0{,}3\,\%\,CO_2$, also sind $0{,}3\,\% \cdot 100\,\mathrm{m}^3 = \frac{0{,}3}{100} \cdot 100 \cdot 1000\,\mathrm{l} = 300\,\mathrm{l}\ CO_2$ im Raum. Wir erhalten das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{1}{5}\,y(t) + 9{,}75 = -\frac{1}{5} \cdot (y(t) - 48{,}75) \\ y(0) = 300\,, \end{cases}$$

was wir zu $y(t) = (300 - 48{,}75) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t} + 48{,}75 = 251{,}25 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t} + 48{,}75$ lösen. $\boxed{1}$

c) Wie leicht an $y'(t) = -\frac{1}{5} \cdot (y(t) - 48{,}75)$ zu erkennen, ist y stets streng monton fallend, solange $y(t)$ größer als 48,75 ist. Mit $y(0) = 300$ und der Stetigkeit von y ist die Lösung somit für alle Zeiten streng monoton fallend. Wir suchen nun nach dem Zeitpunkt t_0, in dem

$$0{,}06\,\% \cdot 100\,\mathrm{m}^3 = \frac{0{,}06}{100} \cdot 100 \cdot 1000\,\mathrm{l} = 60\,\mathrm{l}\,CO_2$$

im Raum verbleiben. Wegen

$$\begin{aligned} y(t) = 60 \quad &\Leftrightarrow \quad 60 = 251{,}25 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t} + 48{,}75 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{60 - 48{,}75}{251{,}25} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t} \\ &\Leftrightarrow \quad \log\frac{3}{67} = -\frac{1}{5}\,t \\ &\Leftrightarrow \quad t = -5 \cdot \log\frac{3}{67} \end{aligned}$$

ist $t_0 \approx 15{,}5304$.

Nach etwas über fünfzehneinhalb Minuten nach Einschalten der Belüftungsanlage ist der CO_2-Gehalt im Raum auf $0{,}06\,\%$ gesunken. $\boxed{1}$

Aufgabe 2: Die Funktion $y(t)$ gebe die Temperatur in Grad Celsius nach t Millisekunden in einem Explosionsprozess an. Durch die Explosion soll ein Motor ein Fahrzeug antreiben. Es sei bekannt, dass die Rate, mit der sich die Temperatur ändert, proportional zur Summe aus der aktuellen Temperatur und der dritten Potenz der aktuellen Temperatur sei. Dabei kann der Proportionalitätsfaktor $c > 0$ durch Veränderungen an der Steuerung des Motors beeinflusst werden. Der Explosionsprozess im Motor werde zur Zeit $t = 0$ gestartet und dabei herrsche im Motor eine Temperatur von 80 Grad Celsius.

a) Geben Sie das Anfangswertproblem an, das y löst.

b) Berechnen Sie die Funktion y.

c) Damit der Motor optimal funktioniert, soll die Explosion 15 Millisekunden nach dem Start stattfinden. Wie muss der Parameter c dazu gewählt werden?

Lösung:

a)

$$\begin{cases} y'(t) = c \cdot (y(t) + y(t)^3) \\ y(0) = 80 \end{cases}$$

$\boxed{1}$

b) Wir haben eine bernoullische Differentialgleichung der Form $y'(t) = r \cdot y(t) + s \cdot y(t)^\alpha$ vorliegen. Setzen wir $z(t) = y(t)^{1-\alpha} = \frac{1}{y(t)^2}$ an. Wir erhalten den Anfangswert $z(0) = \frac{1}{80^2}$. Ableiten von z führt auf

$$\begin{aligned} z'(t) &= -2 \cdot \frac{1}{y(t)^3} \cdot y'(t) \\ &= -2 \cdot \frac{1}{y(t)^3} \cdot c \cdot (y(t) + y(t)^3) \\ &= -2c \cdot \left(\frac{1}{y(t)^2} + 1 \right) \\ &= -2c \cdot (z(t) + 1) \end{aligned}$$

und wir haben das AWP

$$\begin{cases} -2c \cdot (z(t) + 1) \\ z(0) = \frac{1}{80^2} \end{cases}$$

vorliegen, das sich wie in Aufgabe 1 zu

$$z(t) = \left(\frac{1}{80^2} + 1 \right) \cdot \mathrm{e}^{-2ct} - 1$$

lösen lässt. Rückeinsetzen von $|y(t)| = \frac{1}{\sqrt{z(t)}}$, der Umstand, dass $y(0) > 0$ und $\frac{1}{\sqrt{z(t)}} \neq 0 \ \forall t \geq 0$ ist, also y als stetige Funktion stets positiv verläuft, ergibt

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{80^2} + 1 \right) \cdot \mathrm{e}^{-2ct} - 1}}.$$

Damit die Lösung existiert, muss der Ausdruck unter der Wurzel, und der ist $z(t)$, positiv sein.

$$\begin{aligned} & z(t) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{1}{80^2} + 1 \right) \cdot \mathrm{e}^{-2ct} - 1 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{1}{80^2} + 1 \right) \cdot \mathrm{e}^{-2ct} > 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \log \left(\frac{1}{80^2} + 1 \right) > 2ct \\ \Leftrightarrow \quad & t < \frac{1}{2c} \cdot \log \left(\frac{1}{80^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

$\boxed{1}$

c) Setze $t_0 := \frac{1}{2c} \cdot \log\left(\frac{1}{80^2} + 1\right)$. Für $t < t_0$ ist $z(t) > 0$. Für $y = t_0$ ist $z(t) = 0$. y wie auch z ist stetig auf $[0, t_0)$, so gilt $y(t) = \frac{1}{\sqrt{z(t)}} \underset{t \to t_0}{\to} \infty$.

Somit explodiert die Lösung zum Zeitpunkt t_0. Damit diese Explosion bei $t_0 = 15$ Millisekunden stattfindet, muss

$$r = \frac{1}{2t_0} \cdot \log\left(\frac{1}{80^2} + 1\right) = \frac{1}{30} \cdot (\log 6401 - \log 6400) \approx 5{,}208 \cdot 10^{-6}$$

gelten. $\boxed{1}$

Aufgabe 3: In einer Stadt mit 200 000 Einwohnern bricht eine ansteckende Krankheit aus. Wir nehmen an, dass jeder Einwohner der Stadt angesteckt werden kann und dass jede angesteckte Person ansteckend ist. Weiterhin sei die Krankheit nicht heilbar, aber auch nicht tödlich. Außerdem habe durchschnittlich jeder angesteckte Einwohner zwischen den Zeitpunkten t Tagen und $t+1$ Tagen $K(t)$ Kontakte mit anderen Einwohnern der Stadt. Dabei führt jeder Kontakt eines Kranken mit einem Gesunden zur Ansteckung des Gesunden. Die Funktion $y(t)$ gebe die Anzahl der erkrankten Einwohner der Stadt nach t Tagen an ($t \geq 0$), wobei 100 Einwohner zur Zeit $t = 0$ erkrankt seien.

a) Es sei $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Bestimmen Sie näherungsweise die Differenz $y(t + \tau) - y(t)$. Nehmen Sie dabei an, dass die Anzahl der erkrankten Einwohner der Stadt zwischen den Zeitpunkten t und $t + \tau$ Minuten ungefähr konstant bleibt. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass y näherungsweise die Differentialgleichung $y' = K(t) \cdot y - \frac{K(t)}{200\,000} \cdot y^2$ für $t \geq 0$ erfüllt.

b) Es seien $k, \kappa \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für die Fälle $K(t) := k$, $t \geq 0$, sowie $K(t) := \kappa \cdot e^{-t}$, $t \geq 0$, jeweils die Funktion $y(t)$, $t \geq 0$.

c) Es seien nach einer Woche 5000 Einwohner der Stadt erkrankt. Bestimmen Sie für die beiden in Teil b) betrachteten Modelle jeweils, wie viele Einwohner der Stadt nach 10 Wochen erkrankt sein werden. Geben Sie für die beiden Modelle jeweils eine Bedingung an das Verhalten der Einwohner der Stadt an, unter denen Ihnen das jeweilige Modell sinnvoll erscheint.

Lösung:

a)

$$y(t+\tau) - y(t) = \underbrace{y(t)}_{\text{jeder Einw.}} \cdot \underbrace{\tau \cdot K(t)}_{\text{hat in } \tau \text{ soviel Kontakte}} \cdot \underbrace{\frac{200\,000 - y(t)}{200\,000}}_{\text{WK gesund zu sein}}$$

Umstellen und Grenzübergang $\tau \to 0$ ergibt

$$\begin{aligned} y'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} &= y(t) \cdot K(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{200\,000}\right) \\ &= K(t) \cdot y(t) - \frac{K(t)}{200\,000} \cdot y(t)^2 \end{aligned}$$

$\boxed{1}$

b) Wir haben es, wie in Aufgabe 2, mit einer bernoullischen Differentialgleichung der Form $y'(t) = r \cdot y(t) + s \cdot y(t)^\alpha$ vorliegen. Setzen wir wieder $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$ diesmal $\frac{1}{y(t)}$, dann erhalten wir mit

$$\begin{aligned} z'(t) &= -\frac{1}{y(t)^2} \cdot y'(t) \\ &= -\frac{1}{y(t)^2} \cdot \left(K(t) \cdot y(t) - \frac{K(t)}{200\,000} \cdot y(t)^2\right) \\ &= -K(t) \cdot \frac{1}{y(t)} + \frac{K(t)}{200\,000} \\ &= -K(t) \cdot z(t) - \frac{K(t)}{200\,000} \\ &= -K(t) \cdot \left(z(t) - \frac{1}{200\,000}\right) \end{aligned}$$

eine inhomogen lineare DGL mit Anfangswert $z(0) = \frac{1}{y(0)} = \frac{1}{100}$. Die Menge der Lösungen des homogenen Problems $z_h'(t) = -K(t) \cdot z(t)$ werden durch

$$z_h(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\int_0^t K(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

bestimmt, wie man auch leicht durch Ableiten nachprüfen kann. Auch leicht einsichtig ist die partikuläre Lösung $y_p(t) = \frac{1}{200\,000}$ mit ähnlichen Überlegungen wie in den Aufgaben 2 und 3: Sowohl $y_p'(t)$ als auch $-K(t) \cdot \left(z(t) - \frac{1}{200\,000}\right)$ sind für $y_p(t) = \frac{1}{200\,000}$ gleich 0, $y_p(t)$ erfüllt somit die DGL (ohne den Anfangswert zu erfüllen). Die Summe einer homogenen und einer partikulären Lösung erfüllt selbst wieder die DGL, wir erhalten somit

$$z(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\int_0^t K(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{200\,000} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

und durch Anpassen von c mit

$$z_0 = z(0) = c \cdot \mathrm{e}^{\int_0^0 K(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{200\,000} = c \cdot \mathrm{e}^0 + \frac{1}{200\,000} = c + \frac{1}{200\,000}$$

erhalten wir die Lösung des AWPs für z:

$$z(t) = \left(z_0 - \frac{1}{200\,000}\right) \cdot \mathrm{e}^{\int_0^t K(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{200\,000}$$

Rückeinsetzen von $y(t) = \frac{1}{z(t)}$ ergibt

$$y(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{200\,000}\right) \cdot \mathrm{e}^{\int_0^t K(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{200\,000}}$$

für $t \geq 0$ als Lösung des ursprünglichen AWPs

$$\begin{cases} y'(t) = K(t) \cdot y(t) - \frac{K(t)}{200\,000} \cdot y(t)^2 \\ y(0) = 100\,. \end{cases}$$

Modell 1
Für $K(t)=k$ gilt $\int_0^t k\,\mathrm{d}\tau = kt$, also

$$y(t)=\frac{1}{\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{200\,000}\right)\cdot \mathrm{e}^{kt}+\frac{1}{200\,000}}\,.$$

Modell 2
Für $K(t)=\kappa\cdot\mathrm{e}^{-t}$ gilt $\int_0^\kappa \cdot\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\tau=\left[-\kappa\,\mathrm{e}^{-\tau}\right]_0^t=-\kappa\cdot\mathrm{e}^{-t}+\kappa$, also

$$y(t)=\frac{1}{\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{200\,000}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\kappa\cdot\mathrm{e}^{-t}+\kappa}+\frac{1}{200\,000}}\,.$$

$\boxed{2}$

c) Es soll

$$5000=y(7)=\frac{1}{\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{200\,000}\right)\cdot \mathrm{e}^{\int_0^7 K(\tau)\,\mathrm{d}\tau}+\frac{1}{200\,000}}$$

gelten. Stellen wir um zu

$$\frac{1}{5000}-\frac{1}{200\,000}=\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{200\,000}\right)\cdot\mathrm{e}^{\int_0^7 K(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

also

$$\int_0^7 K(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\log\frac{\frac{1}{5000}-\frac{1}{200\,000}}{\frac{1}{100}-\frac{1}{200\,000}}=\log\frac{\frac{39}{200\,000}}{\frac{1999}{200\,000}}=\log\frac{39}{1999}\,.$$

Modell 1
Für $K(t)=k$, also $\int_0^7 k\,\mathrm{d}\tau=k\cdot 7$, erhalten wir

$$k=\frac{1}{7}\cdot\log\frac{39}{1999}\approx -0{,}5624\,.$$

was auf

$$\begin{aligned}y(t)&=\left(\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{200\,000}\right)\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{7}\cdot\log\frac{39}{1999}\cdot t}+\frac{1}{200\,000}\right)^{-1}\\&=\left(\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{200\,000}\right)\cdot\left(\frac{39}{1999}\right)^{\frac{1}{7}\cdot t}+\frac{1}{200\,000}\right)^{-1}\end{aligned}$$

führt. Wir bekommen $y(70)\approx 200\,000$.

Nach 10 Wochen, also 70 Tagen sind in diesem Modell also alle 200 000 Personen erkrankt. Ist $K(t)=\text{const.}$ so verändert sich die Kontaktrate eines Kranken zu anderen Personen nicht. Dies erscheint plausibel, wenn die Krankheit nicht zu zunehmender Isolation (z. B. Einschränkung der Mobilität, Quarantäne, etc.) führt.

Modell 2
Für $K(t) = \kappa \cdot \mathrm{e}^{-t}$, also $\int_0^7 k \, \mathrm{d}\tau = -\kappa \cdot \mathrm{e}^{-7} + \kappa = \kappa \cdot (1 - \mathrm{e}^{-7})$, erhalten wir

$$\kappa = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-7}} \cdot \log \frac{39}{1999} \approx -3{,}9404 \, .$$

was auf

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{200\,000} \right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-7}} \cdot \log \frac{39}{1999} \cdot \left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)} + \frac{1}{200\,000} \right)^{-1} \\ &= \left(\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{200\,000} \right) \cdot \left(\frac{39}{1999} \right)^{\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-7}}} + \frac{1}{200\,000} \right)^{-1} \end{aligned}$$

führt. Wir bekommen $y(70) \approx 5017{,}54$.

Nach 10 Wochen, also 70 Tagen sind in diesem Modell also etwa 5018 Personen erkrankt. Ist K exponentiell über die Zeit fallend, so verringert sich die Kontaktrate eines Kranken zu anderen Personen zunehmend. Dies erscheint plausibel, wenn die Krankheit zu zunehmender Isolation (mit oben genannten Gründen) führt. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Es seien $a, b, t_0, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das AWP

$$x'' + ax' + bx = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1 \tag{1}$$

lösbar ist und die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ existiert. In dieser Aufgabe soll nun gezeigt werden, dass diese Lösung auch eindeutig ist. Dazu sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in J$ und x eine Lösung von (1) auf J

a) Begründen Sie, dass es reicht zu zeigen, dass die Lösung zu

$$x'' + ax' + bx = 0, \quad x(t_0) = 0, \quad x'(t_0) = 0 \tag{2}$$

eindeutig ist.

b) Zeigen Sie, dass jede Lösung von (1) beliebig oft differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie durch Induktion nach n: Für jedes kompakte Intervall $I \subset J$ gibt es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ so dass für alle $t \in I$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\left| x^{(n)}(t) \right| \leq C_1 (2C_2)^n \, . \tag{3}$$

d) Zeigen Sie mit Hilfe von (3), dass die Taylorreihe der Lösung $x(t)$ von (1) um t_0 auf ganz J gegen $x(t)$ konvergiert.

e) Begründen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung, dass die Lösung $x(t)$ von (2) die Nullfunktion ist.

Lösung:

Vorweg eine kurze Erläuterung der Stategie, die Eindeutigkeit der Lösung von (1) zu zeigen:

Wir werden in a) feststellen, dass wir die Eindeutigkeit der Lösung von (1) darauf zurückführen können, dass (1) mit Startwerten $x(t_0) = x'(t_0) = 0$ eindeutig lösbar, diese Lösung die Nulllösung ist. Dann werden wir erkennen, dass die Lösung $x(t)$ von (1) stets beliebig häufig differenzierbar ist und für der Fall $x(t_0) = x'(t_0) = 0$ alle Ableitungen an der Stelle t_0 null sind, also $x^{(n)}(t_0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ferner werden wir $x(t)$ durch die Taylorreihe zum Entwicklungspunkt t_0 darstellen können, in der dann alle Summanden $\frac{1}{n!}x^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n$ den Wert null besitzen. Alles in allem ist damit $x(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ bei $x(t_0) = x'(t_0) = 0$.

a) Ist x die Nullfunktion, so gilt $x(t) = 0$, $x'(t) = 0$ und $x''(t) = 0$ für alle $t \in J$ und damit

$$x''(t) + a \cdot x'(t) + b \cdot x(t) = 0 + 0 + 0 = 0 \qquad \text{für } t \in J\,.$$

Somit ist die Nullfunktion eine Lösung von (2).

Seien x_1, x_2 Lösungen von (1), dann ist $x := x_1 - x_2$ wegen

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)(t_0) &= x_1(t_0) - x_2(t_0) = x_0 - x_0 = 0\\ (x_1' - x_2')(t_0) &= x_1'(t_0) - x_2'(t_0) = x_1 - x_1 = 0\end{aligned}$$

eine Lösung von (2).

Ist die Lösung von (2) eindeutig, muss sie, weil die Nullfunktion eine Lösung ist, die Nullfunktion selbst sein. Also gilt $x_1 - x_2 = 0$ und damit $x_1 = x_2$; falls (1) lösbar ist, gibt es somit genau eine Lösung. $\boxed{1}$

b) Ist x eine Lösung von (1), so ist x zumindest zweimal differenzierbar.

Ist x eine Lösung von (1) und n-mal differenzierbar, so gilt

$$x^{(n)}(t) = -a \cdot x^{(n-1)}(t) - b \cdot x^{(n-2)}(t)\,.$$

Da x n-mal differenzierbar ist, sind $x^{(n-1)}$ und $x^{(n-2)}$ differenzierbar und die rechte Seite lässt sich zu

$$-a \cdot x^{(n)}(t) - b \cdot x^{(n-1)}(t)$$

ableiten. Also ist auch die linke Seite differenzierbar; die Ableitung der linken Seite ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^{(n)}(t) = x^{(n+1)}(t)$. $\boxed{1}$

c) x ist beliebig oft differenzierbar, so sind x und x' stetig, also nehmen sowohl x als auch x' ihr Maximum auf dem kompakten Intervall J an. Wir setzen

$$\begin{aligned} \alpha &:= \max\Big\{ \max_{t\in J}|x(t)|\,,\ \max_{t\in J}|x'(t)|\,,\ 1\Big\} \\ C_2 &:= \max\Big\{\max\{|a|,|b|,1\},1\Big\}\,. \end{aligned}$$

Definieren wir noch $C_1 := C_2 \cdot \alpha$, dann ist

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \alpha \leq C_1 = ((2C_2)^0 \cdot C_1 \\ |x'(t)| &\leq \alpha \leq C_1 \leq 2C_2C_1 = (2C_2)^1 \cdot C_1 \\ |x''(t)| &\leq |a \cdot x'(t)| + |b \cdot x(t)| \\ &\leq C_2 \cdot (2C_2)^1 \cdot C_1 + C_2 \cdot (2C_2)^0 \cdot C_1 \\ &\leq C_2 \cdot (2C_2)^1 \cdot C_1 + C_2 \cdot (2C2)^1 \cdot C_1 \\ &= 2C_2 \cdot (2C_2)^1 \cdot C1 \\ &= (2C_2) \cdot C_1 \\ |x^{(3)}(t)| &\leq |a \cdot x''(t)| + |b \cdot x'(t)| \\ &\leq C_2 \cdot (2C_2)^2 \cdot C_1 + C_2 \cdot (2C_2)^1 \cdot C_1 \\ &\leq C_2 \cdot (2C_2)^2 \cdot C_1 + C_2 \cdot (2C_2)^2 \cdot C_1 \\ &= 2C_2 \cdot (2C_2)^2 \cdot C_1 \\ &= (2C_2)^3 \cdot C1 \end{aligned}$$

Somit ist der Induktionsanfang für $n = 0, n = 1$ (und auch für $n = 2$, $n = 3$) gesetzt, wollen wir

$$|x^{(n)}(t)| \leq (2C_2)^n \cdot C_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

per vollständiger Induktion über n beweisen (die Anfänge $n = 2$ und $n = 3$ sind für unseren Beweis gar nicht nötig, helfen uns aber, die Struktur zu erahnen). Nehmen wir also an, $|x^{(n)}(t)| \leq (2C_2)^n \cdot C_1$ gilt für $n-1$ und n, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |x^{(n+1)}(t)| &\leq |a \cdot x^{(n)}(t)| + |b \cdot x^{(n-1)}(t)|| \\ &\leq C_2 \cdot (2C_2)^n \cdot C_1 + C_2 \cdot (2C_2)^{n-1} \cdot C_1 \\ &\leq C_2 \cdot (2C_2)^n \cdot C_1 + C_2 \cdot (2C_2)^n \cdot C_1 \\ &= 2C_2 \cdot (2C_2)^n \cdot C_1 \\ &= (2C_2)^{n+1} \cdot C_1\,, \end{aligned}$$

also das zu Beweisende. $\boxed{1}$

d) Ist x beliebig oft differenzierbar, so gilt nach der Taylorformel

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + x'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}x''(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\,x^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + R_n(h) \\ &= \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n!}\,x^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + R_n(h)\,. \end{aligned}$$

Damit der Grenzwert von $\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n!} x^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n$, die Taylorreihe, auf ganz J gegen $x(t)$ konvergiert, also

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n \qquad \text{für alle } t, t_0 \in J\,,$$

muss das Restglied für $n \to \infty$ verschwinden. Dies prüfen wir:

$$\begin{aligned}
|R_n(h)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \right| \\
&\underset{c)}{\leq} \frac{C_1(2C_2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot |x-a|^{n+1} \\
&\leq \frac{C_1(2C_2C_3)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{mit } C_3 := \max_{x\in J} |x-a| \\
&= \frac{C_1 C}{(n+1)} \cdot \frac{C^n}{n!} \qquad \text{mit } C := 2C_2C_3
\end{aligned}$$

Es gilt $\frac{C_1 C}{(n+1)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, aber was ist mit $\frac{C^n}{n!}$ für große n?

Wenn wir trickreich vorgehen, können wir die Folge $a_n = \frac{C^n}{n!}$ in die Reihe der Partialsummen $\sum a_n$ einbetten, für die wir wissen, dass sie stets konvergiert mit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!} = \exp(C)$. So muss a_n eine Nullfolge sein.

Ohne diesen Kniff wählen wir $n_0 > C$, dann gilt für $n := n_0 + k > n_0$, $k \in \mathbb{N}$:

$$0 < \frac{C^n}{n!} < \frac{n_0^n}{n!} = \frac{n_0^{n-n_0}}{\frac{n!}{n_0!}} \cdot \frac{n_0^{n_0}}{n_0!} = \frac{n_0}{n_0+k} \cdot \underbrace{\frac{n_0}{n_0+k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n_0}{n_0+1}}_{\text{alle Faktoren } \leq 1} \cdot \frac{n_0^{n_0}}{n_0!}$$

$$\leq \frac{n_0}{n_0+k} \cdot \frac{n_0^{n_0}}{n_0!} \leq \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{n_0^{n_0+1}}{n_0!}}_{\text{const.}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Also gilt auch $\frac{C^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ und damit $|R_n(h)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

$\boxed{1}$

e) Zunächst beweisen wir noch folgende

Behauptung: Ist $x^{(n+1)} = -ax^{(n)} - bx^{(n-1)}$, $x(t_0) = 0$ und $x'(t_0) = 0$ dann gilt

$$x^{(n)}(t_0) = 0 \qquad \forall t \in J, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Beweis:
Der Induktionsanfang für $n = 0$ und $n = 1$ gilt aus der Bedingung der Behauptung. Gelte nun für den Induktionsschritt $x^{(n)} = 0$ und $x^{(n-1)} = 0$ für alle $t \in J$, dann erhalten wir aus der mehrfachen Ableitung der DGL

$$x^{(n+1)}(t_0) = -a \cdot x^{(n)}(t_0) - b \cdot x^{(n-1)}(t_0) = -a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

für alle $t \in J$. //

Damit können wir nun leicht zeigen, dass die Lösung $x(t)$ von (2) die Nullfunktion ist: Es gilt nämlich mit $x^{(n)}(t_0) = 0$ und $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 0 \cdot (t - t_0)^n = 0$$

für alle $t \in J$; die Lösung von (2) ist somit eindeutig, was nach a) die Eindeutigkeit der Lösung von (1) impliziert. $\boxed{1}$