Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 11.06.2012

8. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“ Lösung

In dieser Übung sollen in Aufgabe 1 und 2 die qualitativ unterschiedlichen Verhaltensweisen eines schwingenden Systems am Beispiel des Federpendels untersucht werden. Dazu sei M ein Massenpunkt der Masse m, der an einer horizontalen Feder befestigt ist und sich horizontal längs einer Geraden bewegt. Ist M im Punkt 0, so sei die Feder ungespannt. Weiter sei $x(t)$ der gerichtete Abstand von M zu 0 und $v(t)$ die gerichtete Geschwindigkeit von M zur Zeit $t \geq 0$. Durch die Feder wirkt auf M eine Rückstellkraft $F_1 := -kx$, wobei $k > 0$ eine Federkonstante ist. Weiterhin werde M durch eine äußere Kraft $K(t)$, $t \geq 0$, angeregt und es wirkt die Reibungskraft $F_2 := -rx'$, wobei $r \geq 0$ eine Reibungskonstante ist. Die Bewegung des Massenpunktes wird dann beschrieben durch die DGl

$$mx'' = -rx' - kx + K(t)\ . \tag{1}$$

Es wird stets die Zeit t in Sekunden und die Auslenkung x in Meter und die Masse m in kg angegeben. (Zur Information: Die Standardeinheit der Kraft, das Newton, ist definiert als $1\mathrm{N} = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{s^2}$)

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe gelte $r = 0$, man spricht dann vom ungedämpften Fall, da die Reibung vernachlässigt wird. Weiterhin sei $m = 10$ (kg) und $k = 90$ (N/m).

a) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung für den „freien“ Fall, $K(t) = 0$ mit den Anfangswerten $x(0) = 1$ und $v(0) = 0$.

b) Nun werde das Pendel durch eine äußere Kraft der Form $K(t) = 10\cdot\cos(6t)$ angeregt. Berechnen Sie die Lösung zu den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$.

c) Dieselbe Aufgabenstellung wie in b) mit $K(t) = 10 \cdot \cos(3t)$.

d) Vergleichen Sie das Verhalten der drei Lösungen aus den Aufgabenteilen a)-c). Plotten Sie dazu die Lösungen in dem Zeitintervall $t \in [\,0\,,\,10\,]$ z.B. mit dem freeware Programm *geogebra*. Erläutern Sie, warum man im Fall c) von der „Resonanzkatastrophe“ spricht.

Lösung:

a) Wir haben $10x''(t) = -0x'(t) - 90x(t) + 0$ also $x''(t) + 9x(t) = 0$ mit $x(0) = 1$ und $x'(0) = v(0) = 0$. Lösungen sind $x_1(t) = \sin(3t)$ und $x_2(t) = \cos(3t)$ also als Lösungsmenge

$$x(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ableiten liefert

$$x'(t) = 3c_1 \cos(3t) - 3c_2 \sin(3t)\,.$$

Nun verwenden wir die Anfangsbedingungen, um c_1 und c_2 zu ermitteln. Es ist $1 = x(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = c_2$, somit $c_2 = 1$. Und es ist $0 = x'(0) = 3c_1 \cdot 1 - 3c_2 \cdot 0 = 3c_1$ somit $c_1 = 0$, also als Lösung des AWP

$$x(t) = \cos(3t)\,.$$

$\boxed{1}$

b) Nun haben wir $x''(t) = -9x(t) + \frac{1}{10}K(t) = -9x(t) + \cos(6t)$. Das homogene Problem entspricht dem aus a) und hat die Lösungsmenge

$$x_h(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Als partikuläre Lösung setzen wir unter dem Prinzip der Ähnlichkeit zum Störterm $\cos(6t)$

$$x_p(t) = A \sin(6t) + B \cos(6t)$$

an. Dann erhalten wir durch Ableiten

$$x_p'(t) = 6A \cos(6t) - 6B \sin(6t)$$

und

$$x_p''(t) = -36A \sin(6t) - 36B \cos(6t) = -36x_p(t)\,.$$

Erfüllt dieser Ansatz die DGL, so ist x_p eine partikuläre Lösung. Also setzen wir ein

$$-36x_p(t) = -9x_p(t) + \cos(6t)$$

und erhalten $x_p(t) = -\frac{1}{27}\cos(6t)$ und

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t) - \frac{1}{27}\cos(6t)\,.$$

Ableitung ergibt

$$x'(t) = 3c_1 \cos(3t) - 3c_2 \sin(3t) + \frac{2}{9}\sin(6t)\,.$$

Die Anfangswerte $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$ erfordern nun

$$0 = x(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 - \frac{1}{27} \cdot 1 = c_2 - \frac{1}{27}\,,$$

also $c_2 = \frac{1}{27}$ und

$$0 = x'(0) = 3c_1 \cdot 1 - 3c_2 \cdot 0 + \frac{2}{9} \cdot 0 = 3c_1$$

also $c_1 = 0$. Insgesamt erhalten wir

$$x(t) = \frac{1}{27} \left(\cos(3t) - \cos(6t)\right) .$$

$\boxed{1}$

c) Versuchen wir eine partikuläre Lösung durch die Methode eines geeigneten Ansatzes zu finden:

Da $\cos(3t)$ Element der Lösungsmenge des homogenen Problems ist, wird für jeden Ansatz $y_p(t) = A\sin(3t) + B\cos(3t)$ immer $y_p''(t) + 9y_p(t) = 0 \neq \cos(3t)$ gelten. Wir können so also die DGL nicht erfüllen. Wir brauchen einen Ansatz, in dem $\sin(3t)$ und $\cos(3t)$ vorkommen, so wie auch in seinen Ableitungen. Würden wir z. B. $(At+C)\sin(3t)+(Bt+D)\cos(3t)$ ansetzen, so hätten wir Chancen, dass dies durch Anwendung der Produktregel glückt. Aber hierbei ist zu bedenken, sowohl $C\sin(3t)$ als auch $D\cos(3t)$ sind selbst wieder Elemente der Lösungsmenge des homogenen Problems und werden so keinen Einfluss auf das Erfüllen der DGL haben. Also können wir gleich

$$y_p(t) = t(A\sin(3t) + B\cos(3t))$$

ansetzen. Die Ableitungen sind dann

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= A\sin(3t) + B\cos(3t) \\ &\quad + t(3A\cos(3t) - 3B\sin(3t)) \\ y_p''(t) &= 3A\cos(3t) - 3B\sin(3t) \\ &\quad + t(-9A\sin(3t) - 9B\cos(3t)) \\ &= 3A\cos(3t) - 3B\sin(3t) - 9y_p(t) \,. \end{aligned}$$

Setzen wir nun in die mit dem Ansatz zu erfüllende DGL ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} & y_p''(t) = -9y_p(t) + \cos(3t) \\ \Leftrightarrow\quad & 3A\cos(3t) - 3B\sin(3t) - 9y_p(t) = -9y_p(t) + \cos(3t) \\ \Leftrightarrow\quad & (3A-1)\cos(3t) - 3B\sin(3t) = 0 \,. \end{aligned}$$

Also genau für $A = \frac{1}{3}$ und $B = 0$ erfüllt $yp(t)$ die DGL für alle t, ist also eine partikuläre Lösung. Wir erhalten somit

$$y_p(t) = \frac{1}{3} t\sin(3t) \,.$$

Die Methode der Variation der Konstanten kommt für gewöhnlich, um eine partikuläre Lösung zu finden, nur dann zum Einsatz, wenn die Methode, einen geeigneten der Störfunktion ähnlichen Ansatz zu wählen, keinen Erfolg bringt. Wir haben jetzt eine partikuläre Lösung, wollen aber dennoch das Vorgehen vergleichen und wenden die Methode der Variation der Konstanten an. Wir haben

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin(3t) & \cos(3t) \\ 3\cos(3t) & -3\sin(3t) \end{pmatrix}$$

also

$$A^{-1}(t) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3\sin(3t) & -\cos(3t) \\ -3\cos(3t) & \sin(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(3t) & \frac{1}{3}\cos(3t) \\ \cos(3t) & -\frac{1}{3}\sin(3t) \end{pmatrix} .$$

Es ist nun

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = A^{-1}(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cos^2(3t) \\ -\frac{1}{3}\sin(3t)\cos(3t) \end{pmatrix} ,$$

also $c_1'(t) = \frac{1}{3}\cos^2(3t)$ und $c_2'(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t)\cos(3t)$. Integrieren ergibt

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{6}t + \frac{1}{36}\sin(6t) \\ &= \frac{1}{6}t + \frac{1}{18}\sin(3t)\cos(3t) \\ c_2(t) &= \frac{1}{18}\cos^2(3t) , \end{aligned}$$

damit

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \left(\frac{1}{6}t + \frac{1}{18}\sin(3t)\cos(3t)\right)\sin(3t) + \frac{1}{18}\cos^2(3t)\cos(3t) \\ &= \frac{1}{6}t\sin(3t) + \frac{1}{18}\left(\sin^2(3t)\cos(3t) + \cos^2(3t)\cos(3t)\right) \\ &= \frac{1}{6}t\sin(3t) + \frac{1}{18}\cos(3t) \end{aligned}$$

und da $\frac{1}{18}\cos(3t)$ Element der Lösungsmenge des homogenen Problems ist, ist $x_p(t) = \frac{1}{6}t\sin(3t)$ eine partikuläre Lösung. Als allgemeine Lösungsmenge bekommen wir somit

$$x(t) = c_1\sin(3t) + c_2\cos(3t) + \frac{1}{6}t\sin(3t) .$$

Für die Bestimmung von c_1 und c_2 leiten wir zunächst einmal ab

$$x'(t) = 3c_1\cos(3t) - 3c_2\sin(3t) + \frac{1}{6}\sin(3t) + \frac{1}{2}t\cos(3t) ,$$

dann setzen wir ein

$$0 = x(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = c_2$$

und

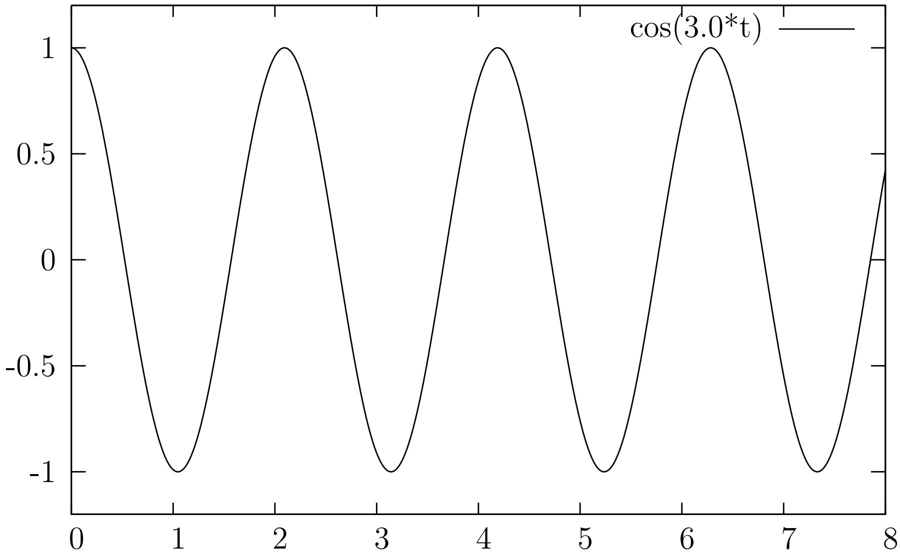
$$0 = x'(0) = 3c_1 \cdot 1 - 3c_2 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 3c_1 ,$$

somit $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$, unsere ermittelte partikuläre Lösung erfüllt schon die Anfangsbedingungen und somit ist sie die Lösung des AWP:

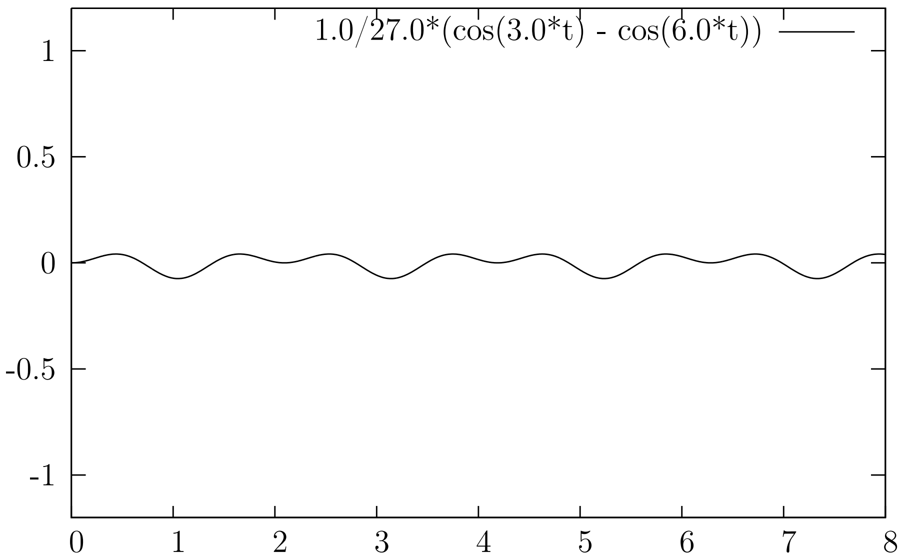
$$x(t) = \frac{1}{6} t \sin(3t)$$

$\boxed{1}$

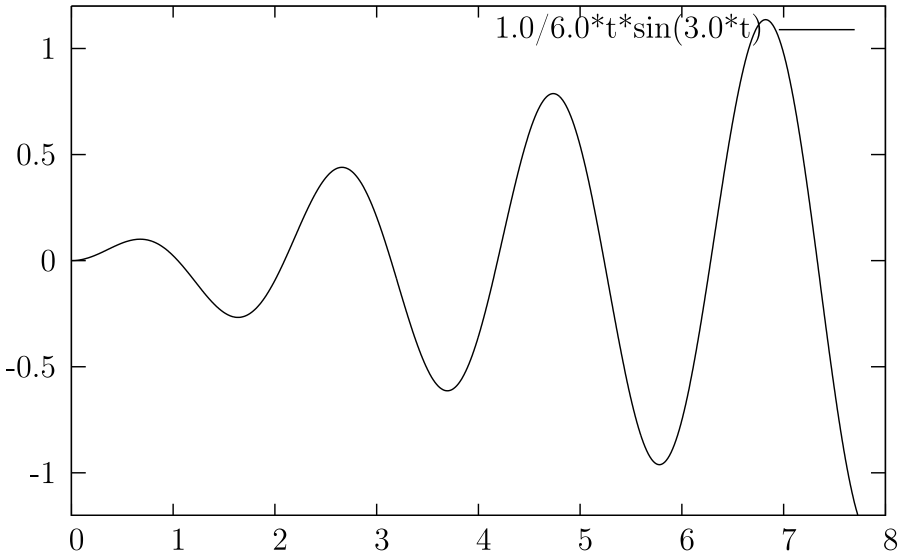
d) Für den Verlauf des „freien“ Falls aus Aufgabenteil a) erhalten wir eine gleichbleibende Kosinusschwingung:



Im Fall der nichtresonanten Anregung von außen aus Aufgabenteil b) erhalten wir auch eine periodische Schwingung, durch die fehlende Resonanz ist die Amplitude sehr gering:



Im Fall der resonanten Anregung von außen schwingt sich die Masse immer mehr auf, die Lösung ist unbeschränkt. Ab einer gewissen Auslenkung überschreitet die Feder ihre zulässige Auslenkung, man spricht von einer Resonanzkatastrophe, unsere Annahmen unter denen wir die DGL aufgestellt haben, sind dann einerseits nicht mehr erfüllt, andererseits kann man davon ausgehen, dass die Feder strukturell geschädigt wird:



2

Aufgabe 2: Der Massenpunkt bewege sich nun in einem sehr viel zäheren Medium, so dass die Reibungskraft nicht mehr vernachlässigt werden kann. Wir gehen von einem Reibungskoeffizienten von $r = 5$ (Ns/m) aus. Weiterhin sei wieder $m = 10$ (kg), aber $k = 90,625$ (N/m).

a) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung für den „freien" Fall $K(t) = 0$ mit den Anfangswerten $x(0) = 5$ und $v(0) = 0$. Plotten Sie die Lösung.

b) Nun werde das Pendel durch eine äußere Kraft der Form $K(t) = 10 \cdot \cos(3t)$ angeregt. Berechnen Sie die Lösung zu den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$. Nutzen Sie ggf. Integraltafeln oder Comuterprogramme, um die länglichen Rechnungen zur Bestimmung von $c_1(t)$ und $c_2(t)$ abzukürzen. Plotten Sie auch diese Lösung und vergleichen Sie sie mit der Lösung aus Aufgabe 1 c).

Lösung:

a) Wir haben $r = 5$, $m = 10$ und $k = 90{,}625$, dazu noch $K(t) = 0$. Es ergibt sich das AWP

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{1}{2} \cdot x'(t) + \frac{725}{80} \cdot x(t) = 0 \\ x(0) = 5, x'(0) = 0 \end{cases}$$

Mit dem Ansatz $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot t}$ erhalten wir

$$\lambda^2 + \frac{1}{2} \cdot \lambda + \frac{725}{80} = 0$$

und die Lösungen dieser Gleichung $\lambda = -\frac{1}{4} \pm \mathrm{i} \cdot 3$ sind nicht reell. Der Umweg über die komplexen Zahlen ergibt nach ein paar Rechenschritten die Lösungen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha} \cdot \sin(\beta t)$ und $x_2 = \mathrm{e}^{\alpha} \cdot \cos(\beta t)$ mit $\alpha = -\frac{1}{4}$ und $\beta = 3$, also

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} \left(c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t)\right) \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

als Lösungsmenge der DGL ohne die Anfangswerte zu berücksichtigen. Durch Ableiten erhalten wir die Funktion x' und können beide zusammen schreiben als

$$A(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$A(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \\ \alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t) & \alpha \cos(\beta t) - \beta \sin(\beta t) \end{pmatrix} .$$

Um c_1 und c_2 mittels der Anfangsbedingungen $x(0) = 5$ und $x'(0) = 0$ zu bestimmen, rechnen wir

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A(0)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ 5 \end{pmatrix} ,$$

erhalten also $c_1 = \frac{5}{12}$ und $c_2 = 5$ und somit als Lösung des AWP

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} \left(\frac{5}{12} \sin(3t) + 5 \cos(3t) \right) .$$

$\boxed{2}$

b) Die Lösungsmenge

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} \left(c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t)\right) \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

der DGL aus a) löst das homogene Problem $x''(t) + \frac{1}{2} \cdot x'(t) + \frac{725}{80} \cdot x(t) = 0$ ohne die Anfangswerte zu berücksichtigen. Für ein partikuläre Lösung des Problems $x''(t) + \frac{1}{2} \cdot x'(t) + \frac{725}{80} \cdot x(t) = \cos(3t)$ setzen wir die Variation der Konstanten an:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} \left(c_1(t) \sin(3t) + c_2(t) \cos(3t)\right) .$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass wir mittels der Identität

$$A(t)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix}$$

auf c_1 und c_2 schließen können, wenn x_1 und x_2 die beiden Lösungen (in unserem Fall $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\sin(3t)$ und $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\cos(3t)$) sind, aus deren Linearkombination sich der gesamte Lösungsraum erschließen lässt, also

$$A(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix},$$

weiterhin $s(t)$ die Störfunktion, (hier $s(t) = \cos(3t)$). Invertieren wir $A(t)$ so erhalten wir

$$A^{-1}(t) = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\cos(3t) - 3\sin(3t) & -\cos(3t) \\ \frac{1}{4}\sin(3t) - 3\cos(3t) & \sin(3t) \end{pmatrix},$$

also

$$A^{-1}(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(3t) \end{pmatrix} = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}}{3} \begin{pmatrix} -\cos^2(3t) \\ \sin(3t)\cos(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}\cos^2(3t) \\ c_2'(t) &= -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}\sin(3t)\cos(3t)\,. \end{aligned}$$

Integrieren liefert Stammfunktionen

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{2}{1731}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}\left(\cos(6t) + 24\sin(6t) + 577\right) \\ c_2(t) &= \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}\left(\frac{96}{577}\cos(6t) - \frac{4}{577}\sin(6t)\right), \end{aligned}$$

und damit eine partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\left(c_1(t)\sin(3t) + c_2(t)\cos(3t)\right) \\ &= \frac{2}{1731}\sin(3t)\left(\cos(6t) + 24\sin(6t) + 577\right) \\ &\quad + \frac{1}{3462}\cos(3t)\left(96\cos(6t) - 4\sin(6t)\right) \\ &= \frac{1}{577}\left(16\cos(3t) + 384\sin(3t)\right)\,. \end{aligned}$$

Als Lösungsmenge der DGL, bislang ohne Berücksichtigung der Anfangswerte, somit als Lösungsmenge des allgemeinen Problems, haben wir so

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}c_1\sin(3t) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}c_2\cos(3t) + \frac{384}{577}\sin(3t) + \frac{16}{577}\cos(3t)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Nun suchen wir genau das Paar c_1, c_2, dass $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$ gilt. Wir erhalten durch Einsetzen

$$0 = x(0) = \mathrm{e}^0 c_1\sin(0) + \mathrm{e}^0 c_2\cos(0) + \frac{384}{577}\sin(0) + \frac{16}{577}\cos(0) = c_2 + \frac{16}{577},$$

also $c_2 = -\frac{16}{577}$ und nach Ableiten

$$
\begin{aligned}
x'(t) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\,c_1\sin(3t) - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\,c_2\cos(3t)\\
3\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\,c_1\cos(3t) - 3\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\,c_2\sin(3t)\\
3\cdot\frac{384}{577}\cos(3t) - 3\cdot\frac{16}{577}\sin(3t)
\end{aligned}
$$

und Einsetzen

$$
0 = x'(0) = -\frac{1}{4}c_2 + 3c_1 + 3\cdot\frac{384}{577} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{16}{577}\right) + 3c_1 + 3\cdot\frac{384}{577} = \frac{1156}{577} + 3c_1
$$

auch $c_1 = -\frac{1156}{1731}$. Das AWP wird somit gelöst durch

$$
x(t) = -\frac{1156}{1731}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\sin(3t) - \frac{16}{577}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\cos(3t) + \frac{384}{577}\sin(3t) + \frac{16}{577}\cos(3t)\,.
$$

Und da $\frac{1156}{1731} = \frac{384}{577} + \frac{2}{1731}$ auch

$$
\begin{aligned}
x(t) = \left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\right)\frac{384}{577}\left(\sin(3t) + \frac{1}{24}\cos(3t)\right)\\
+\frac{2}{1731}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\sin(3t)
\end{aligned}
$$

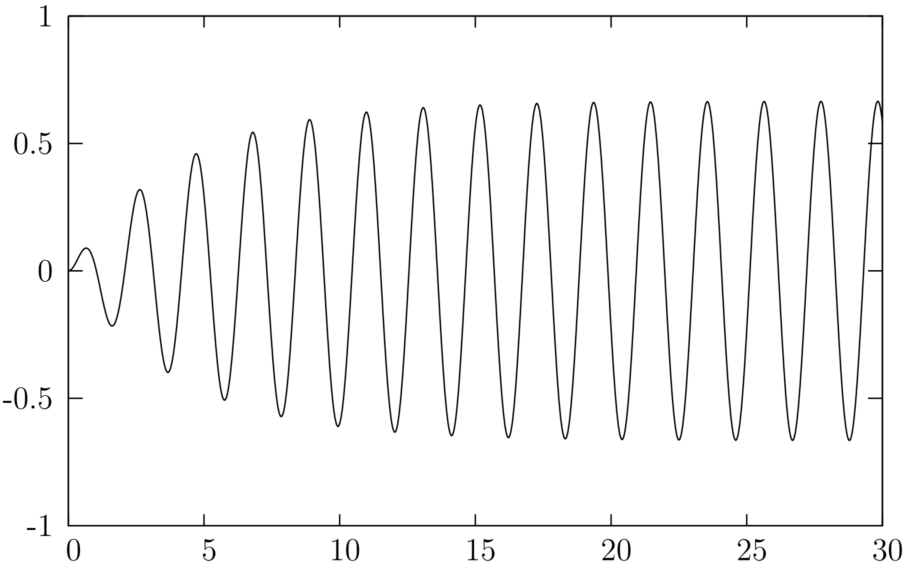
und wenn wir jetzt noch $\frac{1}{24} = \tan(\tau)$ mit $\tau := \arctan\left(\frac{1}{24}\right)$ verwenden, dann

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\right)\frac{384}{577}\left(\sin(3t) + \frac{1}{24}\cdot 24\cdot\tan(\tau)\cdot\cos(3t)\right)\\
&\quad+\frac{2}{1731}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\sin(3t)\\
&= \left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\right)\frac{384}{577}\left(\sin(3t) + \frac{\sin(\tau)}{\cos(\tau)}\cdot\cos(3t)\right)\\
&\quad+\frac{2}{1731}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\sin(3t)\\
&= \left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\right)\frac{384}{577}\cdot\frac{1}{\cos(\tau)}\cdot\big(\cos(\tau)\sin(3t) + \sin(\tau)\cos(3t)\big)\\
&\quad+\frac{2}{1731}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\sin(3t)\\
&= \left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\right)\frac{384}{577}\cdot\frac{1}{\cos(\tau)}\cdot\sin(3t+\tau)\\
&\quad+\frac{2}{1731}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\sin(3t)
\end{aligned}
$$

also

$$= \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\right) \frac{384}{577} \cdot \frac{1}{\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{24}\right)\right)} \cdot \sin\left(3\left(t + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{24}\right)\right)\right)$$
$$+ \frac{2}{1731}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\sin(3t)\,.$$

Dies entspricht einer um $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{24}\right) \approxeq 0{,}8°$ verschobenen Sinusschwingung mit Periode $T = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ Sekunden und einer von Null auf $\frac{384}{577} \cdot \left(\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{24}\right)\right)\right)^{-1} \approx 0{,}666$ ansteigenden Amplitude. Dabei wird diese Schwingung von einer schwachen und exponentiell schwächer werdenden Sinusschwingung mit gleicher Periode, aber mit anfänglicher Amplitude von $\frac{2}{1731} \approx 0{,}001$ überlagert. Es ergibt sich der grafische Verlauf:



Im Wesentlichen entspricht unsere Funktion etwa

$$x(t) \approx \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}25t}\right) \cdot 0{,}666 \cdot \sin(3t)\,.$$

Trotz der Resonanz schwingt sich der Massepunkt nicht, wie in a) immer stärker, sondern auf eine gleichbleibende Sinusschwingung ein. $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Ein Mittelklassewagen habe eine Masse von 820 kg. Jede Abfederung an seinen Rädern habe die Dämpfung $r = 1500$ Ns/m und die Steifigkeit $k = 15700$ N/m. Berechnen Sie die Schwingungsdauer $T = 2\pi/\beta$ und den Abklingfaktor e^{α} der gedämpften Schwingung.

Lösung:

Wir haben

$$820x''(t) = -1500x'(t) - 15700x(t) - 820 \cdot 9{,}81$$

also

$$x''(t) + \frac{75}{41}x'(t) + \frac{785}{41}x(t) = -9{,}81\,.$$

Wir betrachten das homogene Problem

$$x''(t) + \frac{75}{41}x'(t) + \frac{785}{41}x(t) = 0\,.$$

Mit dem Ansatz $e^{\lambda t}$ erhalten wir

$$\lambda = -\frac{75}{82} \pm \sqrt{\left(\frac{75}{82}\right)^2 - \frac{785}{41}} \notin \mathbb{R}\,,$$

also ergeben sich als Lösungen eine Linearkombination von $x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$ und $x_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$ mit $\alpha = -\frac{75}{82}$ und $\beta = \sqrt{\frac{785}{41} - \left(\frac{75}{82}\right)^2} = \frac{1}{82}\sqrt{123115} \approx 4{,}279$. Somit haben wir eine Schwingungsdauer von $T = 2\pi/\beta \approx 1{,}468$ Sekunden und einen Abklingfaktor von $\mathrm{e}^\alpha \approx 0{,}4007$. Daran ändert auch der Störterm $-9{,}81$ nichts, denn der Ansatz $x_p(t) = \kappa$ führt auf $x_p''(t) = x_p'(t) = 0$ und auf $\frac{785}{41}\kappa = -9{,}81$, wir erhalten $x_p(t) = \kappa = -\frac{41}{785} \cdot (-9{,}81) \approx -0{,}512$. Überlagert mit dieser partikulären Ĺösung bleibt sowohl T als auch e^α unangetastet. Mit einwirkender Schwerkraft befindet sich der Wagen bei sonst gleicher Schwingungseigenschaft nur um $-\kappa$ weiter unten als ohne.

$\boxed{2}$

Aufgabe 4: Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, bzw. die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe:

a) $x'' - 3x' + 2x = t$

b) $x'' - 2x' + x = e^t\,, \quad x(0) = x'(0) = 0$ $\boxed{1}$

c) $x'' + x = \tan(t)\,, \quad x(0) = x'(0) = 1$ $\boxed{1}$

Lösung:

a) Mit dem Ansatz $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} & x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda t} - 3\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t} + 2\,\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \end{aligned}$$

für $\lambda = \frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 2$ die Lösung $x_1 = \mathrm{e}^{2t}$ und für $\lambda = \frac{3}{2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$ die Lösung $x_2(t) = \mathrm{e}^t$ des homogenen Problems $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$.

Betrachten wir $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t$, dann können wir die linke Seite als eine Funktion f sehen, die ein Element aus dem Raum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $x \in C^2(\mathbb{R})$ in eben denselben abbildet. Unsere homogene Lösungsmenge entspricht somit dem Kern der Abbildung $f\colon C^2(\mathbb{R}) \to C^2(\mathbb{R})$: alle x mit $f(x) = 0$ (hierbei ist 0 die Nullfunktion $x(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$) sind die Funktionen, für die $x'' - 3x' + 2x = 0$ gilt. Nun ist die Abbildung linear in x: Sind x_1 und x_2 im Kern von f, so ist auch $c_1x_1 + c_2x_2$ für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ im Kern. Interpretieren wir in $x'' - 3x' + 2x = t$ das t als die Abbildung, die t auf t abildet, also die Identität, so ist eine partikuläre Lösung der DGL genau eine Funktion x_p, für die $f(x_p) = t$ gilt. Für ein Element $x_h \in \ker f$ und x_p gilt somit $f(x_h + x_p) = 0 + t = t$, somit ist die gesamte Lösungsmenge durch $\{x_p + x_h \mid x_h \in \ker f\}$ bestimmt. Nachdem wir mit $\{c_1x_1 + c_2x_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} = \ker f$ den Kern kennen, suchen wir nach einer partikulären Lösung, also einer Funktion x_p, die $f(x_p) = t$ erfüllt:

Wir können einerseits dem Prinzip der Ähnlichkeit folgen, und da die Identität ein Polynom ersten Grades ist, für x_p auch ein Polynom ersten Grades vermuten. Wir müssen uns aber klarmachen: Wir schränken so die Menge der möglichen Lösungen ein und finden auch nur eine partikuläre Lösung, wenn ein Polynom ersten Grades überhaupt eine ist.

Ansatz $x_p = Ax + B$: Wegen $x_p'(t) = A$ und $x''(t) = 0$ muss $-3A + 2(At + b) = t$ also $(2A - 1)t + (-3A + 2B) = 0$ für alle t, also $2A - 1 = 0$ und $-3A + 2B = 0$ also $A = \frac{1}{2}$ und $B = \frac{3}{4}$ gelten. Wir erhalten $x_p(t) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ als eine partikuläre Lösung.

Wenn wir keinen geeigneten Ansatz finden (wollen), können wir eine partikuläre Lösung am Falle einer linearen DGL durch Modifikation einer homogenen Lösung finden. Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass diese Methode bei inhomogen linearen DGLs erster und zweiter Ordung immer funktionert und somit kein geschicktes Vermuten voraussetzt.

Aus $c_1x_1 + c_2x_2$ machen wir

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) = c_1(t)\,\mathrm{e}^t + c_2(t)\,\mathrm{e}^{2t}\ .$$

Ableiten ergibt

$$x_p' = c_1'(t)\,\mathrm{e}^t + c_2'(t)\,\mathrm{e}^{2t} = c_1(t)\,\mathrm{e}^t + 2c_2(t)\,\mathrm{e}^{2t}\ .$$

Nun suchen wir bloß eine partikuläre Lösung, können aber die Funktionen c_1 und c_2 frei wählen. Geben wir diese Freiheit auf und „opfern“ c_2 durch die Forderung $c_1'(t)^t + c_2'(t)\,\mathrm{e}^{2t} = 0$ so werden wir, wie in der Vorlesung gezeigt, immer noch eine Lösung finden, aber eine erheblich einfachere Rechnung haben. Jetzt können wir unter dieser Forderung nochmals ableiten zu

$$x_p''(t) = c_1'(t)\,\mathrm{e}^t + 2c_2'(t)\,\mathrm{e}^{2t} + c_1(t)\,\mathrm{e}^t + 4c_2(t)\,\mathrm{e}^{2t}\ .$$

Damit nun x_p die DGL erfüllt, drücken wir diese Bedingung durch Einsetzen in die

DGL aus

$$
\begin{aligned}
& x_p''(t) - 3x_p'(t) + 2x_p(t) = t \\
\Leftrightarrow\quad & c_1'(t)\,\mathrm{e}^t + 2c_p'(t)\,\mathrm{e}^{2t} + c_1(t)\,\mathrm{e}^t(\underbrace{1-3+2}_{0}) + c_2(t)\,\mathrm{e}^{2t}(\underbrace{4-6+2}_{0}) = t \\
\Leftrightarrow\quad & c_1'(t)\,\mathrm{e}^t + 2c_p'(t)\,\mathrm{e}^{2t} = t
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
c_1'(t)\,\mathrm{e}^t + c_2'(t)\,\mathrm{e}^{2t} &= 0 \\
c_1'(t)\,\mathrm{e}^t + 2c_p'(t)\,\mathrm{e}^{2t} &= t
\end{aligned}
$$

bzw. als Gleichungssystem

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t & 2\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t & 2\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{2t} \\ e^t & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -t\,\mathrm{e}^{-t} \\ t\,\mathrm{e} - 2t \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

also $c_1'(t) = -t\,\mathrm{e}^{-t}$ und $c_2'(t) = t\,\mathrm{e}^{-2t}$, aus denen durch Integrieren $c_1(t) = (t+1)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{const}$ und $c_2(t) = -\frac{2t+1}{4}\,\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{const}$ als Stammfunktionen folgt. Somit ist eine partikuläre Lösung, wie schon mit dem Ansatz $x_p(t) = At + B$ ermittelt:

$$
x_p(t) = (t+1)\,\mathrm{e}^{-t} \cdot \mathrm{e}^t + - \frac{2t+1}{4}\,\mathrm{e}^{-2t} \cdot \mathrm{e}^{2t} = t + 1 - \frac{2t+1}{4} \;\; = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}\,.
$$

Die Lösungsmenge der DGL ist nun, wie oben schon beschrieben $\ker f + x_p$ also

$$
x(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}
$$

$\boxed{1}$

b) $x'' - 2x' + x =$ liefert mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ analog zu a) $\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = (\lambda - 1)^2 = 0$. Nur haben wir zwei Anfangswerte, wir erwarten eine Lösungsmenge der Dimension zwei; $x(t) = c\,\mathrm{e}^t$ ist als Lösungsmenge zu klein. Variation der Konstanten

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c(t)\,\mathrm{e}^t \\
x'(t) &= c(t)\,\mathrm{e}^t + c'(t)\,\mathrm{e}^t \\
x''(t) &= c(t)\,\mathrm{e}^t + 2c'(t)\,\mathrm{e}^t + c''(t)\,\mathrm{e}^t
\end{aligned}
$$

führt auf

$$\begin{aligned}
& x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & c(t)\,\mathrm{e}^t + 2c'(t)\,\mathrm{e}^t + c''(t)\,\mathrm{e}^t - 2c(t)\,\mathrm{e}^t - 2c'(t)\,\mathrm{e}^t + c(t)\,\mathrm{e}^t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (\underbrace{1-2+1}_{0})c(t)\,\mathrm{e}^t + (\underbrace{2-2}_{0})c'(t)\,\mathrm{e}^t + c''(t)\,\mathrm{e}^t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & c''(t)\,\mathrm{e}^t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & c''(t) = 0
\end{aligned}$$

also ist c ein Polynom ersten Grades und wir erhalten mit $x_1(t) = \mathrm{e}^t$ und $x_2(t) = t\,\mathrm{e}^t$ und $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2t\,\mathrm{e}^t$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ alle homogenen Lösungen.

Da nun für $b, c \in \mathbb{R}$ $x(t) = (bt + c)\,\mathrm{e}^t$ selbst $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$ gilt, versuchen wir es mit $x_p(t) = at^2\,\mathrm{e}^t$ und $a \in \mathbb{R}$ als partikuläre Lösung. Ableiten führt auf

$$\begin{aligned}
x_p'(t) &= 2at\,\mathrm{e}^t + at^2\,\mathrm{e}^t \\
x_p''(t) &= 2a\,\mathrm{e}^t + 2at\,\mathrm{e}^t + 2at\,\mathrm{e}^t + at^2\,\mathrm{e}^t \\
&= 2a\,\mathrm{e}^t + 4at\,\mathrm{e}^t + at^2\,\mathrm{e}^t
\end{aligned}$$

und Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned}
& x_p''(t) - 2x_p'(t) + x_p(t) = t \\
\Leftrightarrow\quad & 2a\,\mathrm{e}^t + 4at\,\mathrm{e}^t + at^2\,\mathrm{e}^t - 4at\,\mathrm{e}^t - 2at^2\,\mathrm{e}^t + at^2\,\mathrm{e}^t = e^t \\
\Leftrightarrow\quad & 2at^2\,\mathrm{e}^t = e^t \\
\Leftrightarrow\quad & \left(a - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und $x_p(t) = \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^t$ ist eine partikuläre Lösung. Die DGL löst somit die allgemeine Lösung

$$x_{all}(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2t\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^t\ .$$

Wir bestimmen nun noch genau die Lösung, welche auch die Anfangswerte $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$ erfüllt. Dazu leiten wir zunächst einmal ab

$$x_{all}'(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^t + c_2t\,\mathrm{e}^t + t\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^t\ .$$

Jetzt setzen wir ein. Es ist

$$0 = x(0) = c_1\,\mathrm{e}^0 + c_2 \cdot 0\,\mathrm{e}^0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2\,\mathrm{e}^0 = c_1$$

und

$$0 = x'(0) = 0 \cdot \mathrm{e}^0 + c_2\,\mathrm{e}^0 + c_2 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^0 + 0 \cdot \mathrm{e}^0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot \mathrm{e}^0 = c_2\,,$$

also ist die ermittelte partikuläre Lösung $x(t) = \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^t$ bereits die Lösung des AWP.

$\boxed{1}$

c) Mit dem üblichen Ansatz $\mathrm{e}^{\lambda t}$ erhalten wir für die homogene DGL $x'' + x = 0$ die Bedingung $\lambda^2 + 1 = 0$, welche $\lambda = \pm\mathrm{i}$ entspricht. Über den Umweg der komplexen Exponentialfunktion erhalten wir für $\lambda = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$ (also $\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot \mathrm{e}^{\pm\beta t} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos(\pm\beta t) + \mathrm{i} \cdot \sin(\pm\beta t))$) stets die Lösungen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$ und $x_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$, in unserem Fall $x_1(t) = \sin(t)$ und $x_2(t) = \cos(t)$.

Nun stellen wir die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix}$$

auf, invertieren sie zu

$$A(t)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} = A(t)$$

und können mittels der Variation der Konstanten für $x'' + x = \tan(t)$ mit $x_p(t) = c_1(t)\sin(t) + c_2(t)\cos(t)$ wegen

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = A(t)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)\tan(t) \\ -\sin(t)\tan(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} \end{pmatrix}$$

auf Stammfunktionen

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\cos(t) \\ c_2(t) &= \sin(t) - \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

und somit auf

$$\begin{aligned} x_p(t) &= -\cos(t)\sin(t) + \left(\sin(t) - \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right)\right)\cos(t) \\ &= -\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right)\cos(t) \end{aligned}$$

schließen, darüber hinaus auf die allgemeine Lösung der DGL

$$x_{all}(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1\sin(t) + c_2\cos(t) - \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right)\cos(t)\,.$$

Nun passen wir noch die Konstanten c_1 und c_2 soweit an, um die Lösung zu ermitteln, die auch die Anfangswerte erfüllt, also das AWP löst. Es ist

$$\begin{aligned} x_{all}'(t) = {} & c_1\cos(t) - c_2\sin(t) \\ & - \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)} \cdot \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right) \cdot \cos(t) \\ & + \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right) \cdot \sin(t)\,, \end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
1 = x(0) &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 - \log(1) \cdot 1 = c_2 \\
1 = x'(0) &= c_1 \cdot 1 - c_2 \cdot 0 - \frac{1}{1} \cdot \left(1 + 1^2\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = c_1 - 1\,,
\end{aligned}
$$

also $c_1 = 2$ und $c_2 = 1$. Damit lautet die Lösung des AWP

$$
x(t) = 2\sin(t) + \cos(t) - \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right)\cos(t)\,.
$$

Hierbei müssen wir bedenken, die DGL ist wegen des Störterms $\tan(t)$ nur für $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definiert. Wegen des Logarithmus' in der Lösung muss $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} < \frac{\pi}{2}$, aber auch $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) > 0$, also zusammen $0 < \frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} < \frac{\pi}{2}$ gelten. Dies entspricht aber $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Somit ist unsere Lösung genau auf $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ wohldefiniert. $\boxed{1}$