UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
S. BAUER
C. HUBACSEK
C. THIEL

Essen, den 18.06.2012

9. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“ Lösung

Aufgabe 1: Es sei die Situation aus Beispiel 3.13? (Hund und Frauchen) der Vorlesung gegeben. Frauchen bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$, während der Hund sich mit einer Geschwindigkeit vom konstanten Betrag $w > 0$ in eine Richtung bewegt, die zu jedem Zeitpunkt zu Frauchen hin weist. Dabei befinden sich zur Zeit $t \geq 0$ Frauchen im Punkt $(vt, 0)$ und der Hund im Punkt $(x(t), y(t))$, wobei $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$ mit $y_0 > 0$ sowie

$$\dot{x} = w \cdot \frac{vt - x}{\sqrt{(vt-x)^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad \dot{y} = w \cdot \frac{-y}{\sqrt{(vt-x)^2 + y^2}} \quad \text{für } t \geq 0$$

gilt. Das Ziel ist es nun, die Funktion $x(t)$ implizit anzugeben.

a) Es sei $r(t) := \sqrt{(vt - x(t))^2 + y(t)^2}$ der Abstand zwischen Hund und Frauchen zur Zeit $t \geq 0$. Berechnen Sie $\dot{r}$ und zeigen Sie mit Hilfe der obigen Formeln für $\dot{x}$ und $\dot{y}$, dass $\dot{r}(t) = \frac{v}{w}\dot{x}(t) - w$ für $t \geq 0$ gilt.

b) Bestimmen Sie durch Integration der in Teil a) gezeigten Gleichung und Berücksichtigung der Bedingungen zur Zeit $t = 0$ eine Gleichung für $r(t)$, in der nur noch $x(t)$, aber nicht mehr $y(t)$, vorkommt. Bestimmen Sie dann eine Differentialgleichung für $x(t)$, indem Sie diese Gleichung für $r(t)$ in die Gleichung für $\dot{x}$ einsetzen.

c) Es gelte $w > v > 0$. Lösen Sie die in Teil b) erhaltene Differentialgleichung für $x(t)$ und bestimmen Sie eine Gleichung für $x(t)$, in der keine Ableitungen oder Integrale mehr vorkommen.

<u>Lösung:</u>

a) Unter Verwendung der Gleichungen für $\dot{x}$ und $\dot{y}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\dot{r}(t) &= \frac{1}{2\sqrt{(vt - x(t))^2 + y(t)^2}} \cdot \Big(2(vt - x(t))(v - \dot{x}(t)) + 2y(t)\dot{y}(t)\Big) \\
&= \frac{vt - x(t)}{\sqrt{(vt - x(t))^2 + y(t)^2}} \cdot (v - \dot{x}(t)) + \frac{y(t)}{\sqrt{(vt - x(t))^2 + y(t)^2}} \cdot \dot{y}(t) \\
&= v \cdot \frac{vt - x(t)}{\sqrt{(vt - x(t))^2 + y(t)^2}} - w \cdot \frac{(vt - x(t))^2}{(vt - x(t))^2 + y(t)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -w \cdot \frac{y(t)^2}{(vt - x(t))^2 + y(t)^2} \\
&= \frac{v}{w} \cdot \dot{x}(t) - w \cdot \frac{(vt - x(t))^2 + y(t)^2}{(vt - x(t))^2 + y(t)^2} \\
&= \frac{v}{w} \cdot \dot{x}(t) - w, \qquad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

$\boxed{1}$

b) Wegen $x(0) = 0$ und $y(0) = y_0 > 0$ gilt $r(0) = y_0$. Somit folgt durch Integration der in Teil a) gezeigten Gleichung

$$
\int_0^t \dot{r}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \left(\frac{v}{w} \cdot \dot{x}(s) - w \right) \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0,
$$

also

$$
r(s)\Big|_{s=0}^{s=t} = \left(\frac{v}{w} x(s) - ws \right) \Big|_{s=0}^{s=t}, \qquad t \geq 0.
$$

Mit $r(0) = y_0$ und $x(0) = 0$ folgt daher

$$
r(t) - y_0 = \frac{v}{w} x(t) - wt, \qquad t \geq 0,
$$

so dass schließlich

$$
r(t) = \frac{v}{w} x(t) - wt + y_0, \qquad t \geq 0,
$$

gilt. Setzt man dies nun in die Gleichung für $\dot{x}$ ein, so erhält man

$$
\dot{x}(t) = w \cdot \frac{vt - x(t)}{r(t)} = w \cdot \frac{vt - x(t)}{\frac{v}{w} x(t) - wt + y_0}, \qquad t \geq 0,
$$

also eine allgemein homogene Differentialgleichung für $x(t)$. $\boxed{1}$

c) Es gelte nun $w > v > 0$. Nach Teil b) ist x die Lösung der allgemein homogenen Differentialgleichung

$$
\dot{x}(t) = \frac{vw\,t - w\,x(t)}{-w\,t + \frac{v}{w} x(t) + y_0}, \qquad t \geq 0.
$$

Wegen

$$
\det \begin{pmatrix} vw & -w \\ -w & \frac{v}{w} \end{pmatrix} = v^2 - w^2 \neq 0
$$

müssen wir also nach Lemma 2.27 eine Lösung (t_0, x_0) des Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
vw\,t_0 - w\,x_0 &= 0 \\
-w\,t_0 + \frac{v}{w} x_0 + y_0 &= 0
\end{aligned}
$$

bestimmen. Aus der ersten Gleichung folgt $x_0 = v\, t_0$ und daher aus der zweiten Gleichung

$$w\, t_0 - \frac{v^2}{w} t_0 = y_0.$$

Somit folgt

$$t_0 = \frac{w y_0}{w^2 - v^2} \quad \text{und} \quad x_0 = v\, t_0 = \frac{v w y_0}{w^2 - v^2}.$$

Setzt man nun

$$s = t - t_0 \quad \text{und} \quad z(s) = x(s + t_0) - x_0,$$

so erfüllt z nach Lemma 2.27 die Differentialgleichung

$$\dot{z} = \frac{vw\, s - w\, z}{-w\, s + \frac{v}{w} z} = \frac{vw - w\, \frac{z}{s}}{-w + \frac{v}{w} \cdot \frac{z}{s}} = g\left(\frac{z}{s}\right)$$

mit $g(u) := \frac{vw - wu}{-w + \frac{v}{w} u}$. Dies ist eine Eulerhomogene Differentialgleichung, so dass mit $u(s) := \frac{z(s)}{s}$ nach Lemma 2.23 folgt

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{g(u) - u}{s} = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{vw - wu}{-w + \frac{v}{w} u} - u \right) = \frac{1}{s} \cdot \frac{vw - wu + wu - \frac{v}{w} u^2}{-w + \frac{v}{w} u} \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{vw - \frac{v}{w} u^2}{-w + \frac{v}{w} u}. \end{aligned}$$

Dies ist nun eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Daher erhalten wir

$$\dot{u}(s) \cdot \frac{-w + \frac{v}{w} u(s)}{vw - \frac{v}{w} u(s)^2} = \frac{1}{s}. \tag{1}$$

Wir bestimmen zunächst die Stammfunktion der linken Seite und erhalten durch Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \int \frac{-w + \frac{v}{w} p}{vw - \frac{v}{w} p^2} \mathrm{d}p &= \int \frac{-w + \frac{v}{w} p}{-\frac{v}{w} \cdot (p^2 - w^2)} \mathrm{d}p = \int \frac{\frac{w^2}{v} - p}{p^2 - w^2} \mathrm{d}p = \int \frac{\frac{w^2}{v} - p}{(p-w)(p+w)} \mathrm{d}p \\ &= \int \left(\frac{\frac{\frac{w^2}{v} - w}{2w}}{p - w} + \frac{\frac{\frac{w^2}{v} + w}{-2w}}{p + w} \right) \mathrm{d}p = \int \left(\frac{\frac{w-v}{2v}}{p - w} - \frac{\frac{w+v}{2v}}{p + w} \right) \mathrm{d}p \\ &= \frac{w - v}{2v} \cdot \ln(p - w) - \frac{w + v}{2v} \cdot \ln(p + w) = \ln \left(\frac{(p - w)^{\frac{w-v}{2v}}}{(p + w)^{\frac{w+v}{2v}}} \right). \end{aligned}$$

Durch Integration von (**??**) erhalten wir nun

$$\ln \left(\frac{(u(s) - w)^{\frac{w-v}{2v}}}{(u(s) + w)^{\frac{w+v}{2v}}} \right) = \ln s + c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$, also

$$\frac{(u(s) - w)^{\frac{w-v}{2v}}}{(u(s) + w)^{\frac{w+v}{2v}}} = s \cdot e^c.$$

Beachten wir nun

$$s = t - t_0 \quad \text{und} \quad u(s) = \frac{z(s)}{s} = \frac{x(s+t_0) - x_0}{s} = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0},$$

so erhalten wir

$$\frac{\left(\frac{x(t)-x_0}{t-t_0} - w\right)^{\frac{w-v}{2v}}}{\left(\frac{x(t)-x_0}{t-t_0} + w\right)^{\frac{w+v}{2v}}} = (t - t_0) \cdot e^c$$

mit $t_0 = \frac{wy_0}{w^2-v^2}$ und $x_0 = v\,t_0 = \frac{vwy_0}{w^2-v^2}$. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Eine radioaktive Substanz A zerfalle mit der Halbwertszeit τ_A in eine Substanz B, die wiederum mit der Halbwertszeit τ_B in eine stabile Substanz C zerfalle. Bezeichnen $a(t)$, $b(t)$ und $c(t)$ die Stoffmengen von A, B und C zur Zeit $t \geq 0$, so entwickeln sie sich näherungsweise gemäß dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} a' &= -\lambda_A \cdot a, \\ b' &= -\lambda_B \cdot b + \lambda_A \cdot a, \\ c' &= \lambda_B \cdot b, \end{cases}$$

wobei $\lambda_A := \frac{\ln 2}{\tau_A}$ und $\lambda_B := \frac{\ln 2}{\tau_B}$ gilt (siehe Beispiel 4.1 der Vorlesung). Weiter gelte nun $a(0) = a_0 > 0$, $b(0) = b_0 \geq 0$, $c(0) = c_0 \geq 0$ sowie $\tau_A \neq \tau_B$.

a) Berechnen Sie $a(t)$, $b(t)$ und $c(t)$, $t \geq 0$, mit Hilfe der Gleichungen des Systems.

b) Beschreiben Sie das Langzeitverhalten der Lösungen und interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf das zugrunde liegende Problem.

<u>Lösung:</u>

a) Die Funktion a löst aufgrund der ersten Gleichung des Systems das Anfangswertproblem

$$a' = -\lambda_A \cdot a, \quad t \geq 0, \quad a(0) = a_0.$$

Also gilt

$$a(t) = a_0 \cdot e^{-\lambda_A t} = a_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau_A} t}, \quad t \geq 0.$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung des Systems ein, so löst b das Anfangswertproblem

$$b' = -\lambda_B \cdot b + \lambda_A a_0 \cdot e^{-\lambda_A t}, \quad t \geq 0, \quad b(0) = b_0.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist gegeben durch

$$b_h(t) = \alpha \cdot e^{-\lambda_B t}, \qquad t \geq 0,$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems erhält man durch den Ansatz

$$b_p(t) = \beta \cdot e^{-\lambda_A t}, \qquad t \geq 0.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt die Bedingung

$$-\beta\lambda_A \cdot e^{-\lambda_A t} = b_p'(t) = -\lambda_B \cdot b_p(t) + \lambda_A a_0 \cdot e^{-\lambda_A t} = -\lambda_B \beta \cdot e^{-\lambda_A t} + \lambda_A a_0 \cdot e^{-\lambda_A t}, \quad t \geq 0,$$

also $-\beta\lambda_A = -\lambda_B\beta + \lambda_A a_0$ und somit

$$\beta = \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A} \quad \text{und} \quad b_p(t) = \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A} \cdot e^{-\lambda_A t}, \quad t \geq 0.$$

Es folgt

$$b(t) = \alpha \cdot e^{-\lambda_B t} + \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A} \cdot e^{-\lambda_A t}, \qquad t \geq 0,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ so gewählt werden muss, dass $b(0) = b_0$ gilt. Es folgt

$$\alpha = b_0 - \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A}$$

und schließlich

$$b(t) = \left(b_0 - \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A}\right) \cdot e^{-\lambda_B t} + \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A} \cdot e^{-\lambda_A t}, \quad t \geq 0.$$

Setzt man nun dieses Ergebnis in die dritte Gleichung des Systems ein, so erhält man

$$c'(t) = \lambda_B \cdot \left[\left(b_0 - \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A}\right) \cdot e^{-\lambda_B t} + \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A} \cdot e^{-\lambda_A t}\right], \quad t \geq 0.$$

Durch Integration und Verwendung des Anfangswertes folgt

$$\begin{aligned}
c(t) &= c(0) + \int_0^t c'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= c_0 + \int_0^t \left[\lambda_B \left(b_0 - \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A}\right) \cdot e^{-\lambda_B s} + \frac{\lambda_B \lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A} \cdot e^{-\lambda_A s}\right] \mathrm{d}s \\
&= c_0 + \left[-\left(b_0 - \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A}\right) \cdot e^{-\lambda_B s} - \frac{\lambda_B a_0}{\lambda_B - \lambda_A} \cdot e^{-\lambda_A s}\right]\Bigg|_{s=0}^{s=t} \\
&= c_0 - \left(b_0 - \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A}\right) \cdot e^{-\lambda_B t} - \frac{\lambda_B a_0}{\lambda_B - \lambda_A} \cdot e^{-\lambda_A t} \\
&\quad + b_0 - \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A} + \frac{\lambda_B a_0}{\lambda_B - \lambda_A} \\
&= c_0 + b_0 + a_0 - \left(b_0 - \frac{\lambda_A a_0}{\lambda_B - \lambda_A}\right) \cdot e^{-\lambda_B t} - \frac{\lambda_B a_0}{\lambda_B - \lambda_A} \cdot e^{-\lambda_A t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

b) Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} b(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} c(t) = c_0 + b_0 + a_0.$$

Dabei ist a streng monoton fallend und c streng monoton wachsend auf $[0,\infty)$, während es bei der Funktion b von den Halbwertszeiten τ_A und τ_B sowie von den am Anfang vorhandenen Stoffmengen a_0 und b_0 abhängt, ob sie monoton ist.

Im Hinblick auf das zugrunde liegende Problem folgt also, dass die Substanzen A und B auf lange Sicht komplett zerfallen und in die Substanz C umgewandelt werden. Da die Summe der drei Stoffmengen zeitlich konstant ist, stabilisiert sich die Stoffmenge von C auf lange Sicht in der Nähe der anfangs vorhandenen Gesamtstoffmenge $c_0 + b_0 + a_0$. Vom Verhältnis der Halbwertszeiten und anfangs vorhandenen Stoffmengen der Substanzen A und B hängt es ab, ob die Stoffmenge von B monoton fällt oder nicht, während die Stoffmenge von A ständig sinkt und die Stoffmenge von C ständig steigt.

$\boxed{1}$

Aufgabe 3: Wenn in einem Talkessel warme Luftschichten auf kalten Luftschichten liegen, spricht man von einer *Inversionswetterlage*. Der vertikale Luftaustausch ist dann weitgehend blockiert, so dass sich in den unteren Luftschichten Schadstoffe, darunter vor allem Schwefelwasserstoff H_2S und Schwefeldioxid SO_2, stark anreichern können. Die zur Zeit t vorhandene Menge an H_2S werde mit $m_1(t)$ und die Menge an SO_2 mit $m_2(t)$ bezeichnet. H_2S oxidiert mit einer bestimmten Rate k_1 zu SO_2 und SO_2 oxidiert mit der Rate k_2 zu einem Sulfat, das nicht weiter gesundheitschädlich ist. Es gelte $k_1 \neq k_2$. Die Emission durch Kraftwerke, Verkehr und Industrieanlagen in dem Talkessel werde durch die zeitlich konstanten Emissionsraten ϵ_1 für H_2S und ϵ_2 für SO_2 gegeben. (Diese Annahme ist zugegebenermaßen nicht sehr realistisch).

a) Stellen Sie ein Differentialgleichungssystem auf, dass die zeitliche Entwicklung der Mengen an Schwefelwasserstoff und Schwefeldioxid modelliert. $\boxed{1}$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems. $\boxed{1}$

c) Bestimmen Sie das Langzeitverhalten dieser Lösungen und interpretieren Sie es im Sachzusammenhang. $\boxed{1}$

d) Geben Sie ein realistischeres Modell für die Emissionsraten an, in dem Sie annehmen, dass zwar die Kraftwerke und Industrieanlagen kontinuierlich mit der selben Rate emitieren, die Emissionsraten durch Verkehr aber die für einen Werktag typischen Variationen zeigen. Sie müssen also geeignete Funktionen $\epsilon_1(t)$ und $\epsilon_2(t)$ angeben. $\boxed{1}$

Lösung:

a) Wir betrachten ein sehr kleines Zeitintervall $[\,t\,,\, t+\tau\,]$ und schauen, wie sich die Größen m_1 und m_2 in diesem Zeitinterval ändern und erhalten:

$$m_1(t+\tau) - m_1(t) = -k_1 \cdot \tau \cdot m_1(t) + \tau\epsilon_1 \tag{2}$$
$$m_2(t+\tau) - m_2(t) = -k_2 \cdot \tau \cdot m_2(t) + k_1 \cdot \tau \cdot m_1(t) + \tau\epsilon_2 \tag{3}$$

Wir wollen (über die Aufgabenstellung hinaus) eine kurze Begründung für die einzelnen Terme in den Gleichungen (1) und (2) geben: Aus dem Satz „H_2S oxidiert mit einer bestimmten Rate k_1 zu SO_2" entnehmen wir den Term $-k_1 \cdot \tau \cdot m_1(t)$ in (1) und $+k_1 \cdot \tau \cdot m_1(t)$ in (2). Der Satz „und SO_2 oxidiert mit der Rate k_2 zu einem Sulfat, das nicht weiter gesundheitschädlich ist." ist verantwortlich für den Term $-k_2 \cdot \tau \cdot m_2(t)$ in (2). Der Satz „Die Emission durch Kraftwerke, Verkehr und Industrieanlagen in dem Talkessel werde durch die zeitlich konstanten Emissionsraten ϵ_1 für H_2S und ϵ_2 für SO_2 gegeben." führt zu den zusätzlichen Summanden $+\tau\epsilon_1$ in (1) und $+\tau\epsilon_2$ in (2). Wir vollziehen die beiden üblichen Schritte, Division durch τ und Grenzübergang $\tau \to 0$ und erhalten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m_1' &= -k_1 m_1 + \epsilon_1 && (4) \\ m_2' &= -k_2 m_2 + k_1 m_1 + \epsilon_2 && (5) \end{aligned}$$

b) Zunächst beobachten wir, dass in der ersten Gleichung m_2 nicht auftaucht, diese Gleichung also von der zweiten Gleichung entkoppelt ist und somit direkt mit bekannten Verfahren lösbar ist: Für die Lösung des homogenen Problems erhalten wir:

$$m_{1,\text{hom}}(t) = c_1 e^{-k_1 t}.$$

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems erhalten wir aus dem Ansatz

$$m_{1,\text{p}}(t) = k.$$

Setzen wir diesen Ansatz in (3) ein, erhalten wir $k = \frac{\epsilon_1}{k_1}$ und somit

$$m_{1,\text{all}}(t) = c_1 e^{-k_1 t} + \frac{\epsilon_1}{k_1}.$$

Wir können jetzt die Gleichung (4) als eine inhomogene lineare Gleichung für m_2 mit der Inhomogenität $k_1(c_1 e^{-k_1 t} + \frac{\epsilon_1}{k_1}) + \epsilon_2 = k_1 c_1 e^{-k_1 t} + \epsilon_1 + \epsilon_2$ auffassen. Für die homogene Lösung $m_{2,\text{hom}}$ erhalten wir

$$m_{2,\text{hom}}(t) = c_2 e^{-k_2 t}$$

und nach dem Verfahren der Variation der Konstanten mit dem Ansatz $m_{2,\text{p}}(t) = c(t) e^{-k_2 t}$

$$\begin{aligned} c(t) &= \int^t e^{k_2 \tau} \left(k_1 c_1 e^{-k_1 \tau} + \epsilon_1 + \epsilon_2 \right) d\tau \\ &= \frac{k_1 c_1}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{k_2} e^{k_2 t} \end{aligned}$$

und damit

$$m_{2,\text{p}}(t) = \frac{k_1 c_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{k_2}$$

Wir erhalten also die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} m_{1,\text{all}}(t) &= c_1 e^{-k_1 t} + \frac{\epsilon_1}{k_1} && (6) \\ m_{2,\text{all}}(t) &= c_2 e^{-k_2 t} + \frac{k_1 c_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{k_2} && (7) \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} m_{1,\mathrm{all}}(t) &= \frac{\epsilon_1}{k_1}\\ \lim_{t\to\infty} m_{2,\mathrm{all}}(t) &= \frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{k_2}\end{aligned}$$

Die Schadstoffkonzentrationen nähernt sich also konstanten Konzentrationen, die je nach den Werten von k_1, k_2, ϵ_1 und ϵ_2 im gesundheitsschädlichen Bereich liegen können. In diesem Fall müssten die Industrie und der Verkehr ihre Emmisionen reduzieren.

d) Eine Modellierung der Verkehrsemissionen muss das wechselnde Verkehrsaufkommen $V(t)$ berücksichtigen, das nach bekannten Mustern variiert. Wir wollen hier eine relativ einfache Modellierung vorschlagen, die mit stückweise stetigen Funktionen arbeitet und folgende Annahmen berücksichtigt: Das Verkehrsaufkommen $V(t)$ ist in den Stunden von 22 bis 6 Uhr auf einem konstanten niedrigen Niveau V_{Nacht}. In den Stunden von 6 bis 8 Uhr wächst es linear auf den Spitzenwert $V_{\mathrm{Berufsverkehr}}$, den es die Stunde bis 9 Uhr hält. In der nächsten Stunde fällt das Verkehrsaufkommen linear auf den Wert V_{Tag} der bis 15 Uhr konstant gehalten wird. In der nächsten Stunde wächst der Vekehr wieder linear auf den hohen Wert $V_{\mathrm{Feierabend}}$ der bis 18 Uhr konstant gehalten wird. Von 18 bis 22 Uhr fällt das Verkehrsaufkommen dann wieder linear auf den Wert V_{Nacht}. Die Werte V_{Nacht}, ..., $V_{\mathrm{Feierabend}}$ müssen aus Verkehrsbeobachtungen bestimmt werden. Ein Graph der Funktion V ist hier geplottet. (Benutzt wurde das Programm *geogebra*).

Der Plot muss da noch hin.

Wir setzen jetzt also an:

$$\epsilon_1(t) = \lambda_1 + \gamma_1 V(t) \tag{8}$$

$$\epsilon_2(t) = \lambda_1 + \gamma_2 V(t) \tag{9}$$

Die Konstanten bestimmen dabei die Grundemissionsraten von Industrie und Kraftwerken (λ_1 und λ_2), sowie den durchschnittlichen Ausstoß von H_2S bzw. SO_2 pro Auto und Zeiteinheit (γ_1, bzw. γ_2).

Aufgabe 4: Zur Festigung und Vertiefung: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung, bzw. die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems:

a) $y' = -\frac{t}{y}\,, \quad y(1) = 1\,.$ $\boxed{1}$

b) $yt^2y' = e^y$ $\boxed{1}$

c) $y' = 2y + t^2e^{2t}$ $\boxed{1}$

d) $y'' + 2y' + 2y = \sin(2t)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0$ $\boxed{1}$

Lösung:

a) Diese Gleichung ist mit der Methode der Trennung der Variablen lösbar und wir erhalten
$$\int_1^{y(t)} z\,dz = -\int_1^t \tau\,dt$$
also
$$\frac{1}{2}y^2(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$$
Wir lösen diese Gleichung nach y auf, beachten dabei, dass wir aufgrund der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ die positive Wurzel wählen müssen und erhalten
$$y(t) = \sqrt{2-t^2} \quad \text{für alle} \quad -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}\,.$$

b) Wir stellen die Gleichung zunächst einmal um und erhalten
$$y' = \frac{e^y}{t^2 \cdot y}.$$
Mit der Methode der Trennung der Variablen rechnen wir weiter:
$$\int^{y(t)} \frac{z}{e^z}\,dz = \int^t \frac{1}{\tau^2}\,d\tau = -\frac{1}{t} + c\,.$$
Mit der Standardsubstution $x = e^z$, $dx = e^z dz$ formen wir die linke Seite der Gleichung um und integrieren danach partiell
$$\begin{aligned}
\int^{y(t)} \frac{z}{e^z}\,dz &= \int^{e^{y(t)}} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{\ln(x)}{x}\bigg|^{e^{y(t)}} + \int^{e^{y(t)}} \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\bigg|^{e^{y(t)}} \\
&= -e^{-y(t)}(y(t)+1)\,,
\end{aligned}$$
erhalten also die Gleichung
$$e^{-y(t)}(y(t)+1) = \frac{1}{t} + c\,.$$
Diese Gleichung lösst sich nun leider nicht weiter nach y auflösen. Um sie aber etwas expliziter zu gestalten, können wir die Umkehrfunktion $t = t(y)$ bestimmen (besser als nichts):
$$t(y) = \frac{1}{e^{-y}(1+y) - c}\,.$$

c) Es handelt sich um eine inhomogene lineare DGl erster Ordnung und wir verfahren anch dem bekannten Schema:

i) Bestimmung der homogenen Lösung:

$$y_{\text{hom}}(t) = c_1 e^{2t} \,.$$

ii) Für eine partikuläre Lösung y_p verfolgen wir die Methode von der Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} C(t) &= \int^t e^{-2\tau}\tau^2 e^{2\tau}\, d\tau \\ &= \frac{1}{3}t^3 \,, \end{aligned}$$

also

$$y_p(t) = \frac{1}{3}t^2 \cdot e^{2t}$$

iii) und damit die allgemeine Lösung

$$y_{\text{all}}(t) = c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}t^2 \cdot e^{2t} \quad \text{mit } c_1 \in \mathbb{R}.$$

d) Es handeltz sich um eine inhomogene linearee DGl zweiter Ordnung, und wir betrachten zunächst die zugehörige algebraische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

die keine reellen Lösungen hat. Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung gilt also $\alpha = -1$ und $\beta = 1$ und somit

$$y_{\text{hom}} = e^{-t}\left(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)\right) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung probieren wir dem Ähnlichkeitsprinzip folgend den Ansatz

$$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$$

mit zu bestimmenden reellen Konstanten A und B. Wir setzen diesen Ansatz in die DGl ein und erhalten mit etwas Rechnung für A und B das lineare Gleichungssystem

$$4B - 2A = 0 \quad \wedge \quad -4A - 2B = 1$$

das die eindeutige Lösung

$$A = -\frac{1}{5} \quad \wedge \quad B = -\frac{1}{10}$$

hat. Damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y_{\text{all}}(t) = e^{-t}\left(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)\right) - \frac{1}{5}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t)\,.$$

Jetzt müssen noch die Parameter c_1, c_2 so bestimmt werden, dass die Anfangswerte erfüllt sind. Aus der Forderung $y(0) = 0$ erhalten wir die Gleichung

$$0 = c_1 - \frac{1}{5}$$

und aus der Forderung $y'(0) = 0$ die Gleichung

$$0 = c_2 - c_1 - \frac{1}{5}\,,$$

also $c_1 = \frac{1}{5}$ und $c_2 = \frac{2}{5}$ und damit die Lösung

$$y(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{5}\cos(t) + \frac{2}{5}\sin(t)\right) - \frac{1}{5}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t)\,.$$