Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 09.07.2012

Probeklausur zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“

Lösung

Aufgabe 1: In einem Wald leben zu Beginn 100 Rehe. In jedem Jahr werden durchschnittlich von jedem am Anfang des Jahres lebenden Reh $0,8$ Junge geboren, und 30 Prozent der am Anfang des Jahres lebenden Rehe sterben im Verlauf des Jahres durch einen natürlichen Tod. Außerdem tötet der für den Wald zuständige Jäger pro Jahr k Rehe. Für $n \in \mathbb{N}$ gebe a_n die Anzahl der Rehe in dem Wald am Ende des n-ten Jahres an.

a) Stellen Sie eine Differenzengleichung auf, die $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ näherungsweise erfüllt. $\boxed{3}$

b) Berechnen Sie a_n, $n \in \mathbb{N}$, explizit. $\boxed{9}$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil b) das maximale $k \in \mathbb{N}$, so dass die Rehe in diesem Wald niemals aussterben. $\boxed{4}$

Lösung:

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zu Beginn des $(n+1)$-ten Jahres leben im Wald a_n Rehe, am Ende des Jahres sind es a_{n+1} Rehe. Während des Jahres kommen ungefähr $0,8 \cdot a_n$ Junge hinzu und ungefähr $0,3 \cdot a_n$ Rehe sterben durch einen natürlichen Tod. Außerdem sterben pro Jahr k Rehe durch den Jäger. Somit erhält man insgesamt näherungsweise die Differenzengleichung

$$a_{n+1} - a_n = 0,8 \cdot a_n - 0,3 \cdot a_n - k = \frac{1}{2}a_n - k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{3}$

b) Nach Teil a) gilt

$$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Weiter gilt $a_0 = 100$. Nach Beispiel II 2.1 aus der Vorlesung folgt daher für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot a_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^j \cdot k = 100 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - k \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^j \\ &= 100 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - k \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}} = 100 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2k \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right] \\ &= 2k + (100 - 2k) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

$\boxed{9}$

c) Aus Teil b) folgt $a_n \to -\infty$ für $n \to \infty$ im Fall $2k > 100$, so dass die Rehe in diesem Fall in endlicher Zeit aussterben. Im Fall $0 < 2k \leq 100$ gilt $a_n \geq 2k > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass die Rehe in diesem Fall niemals aussterben. Somit ist $k = 50$ das gesuchte maximale k, so dass die Rehe niemals aussterben. $\boxed{4}$

Aufgabe 2: In einer Fabrik wird ein chemischer Stoff hergestellt und in einem Behälter gelagert. Da der Stoff instabil ist, zerfallen pro Minute 10 Prozent des im Behälter vorhandenen Stoffes. Durch die Produktion kommen pro Minute 20 kg des Stoffes in den Behälter hinzu. Für $t \geq 0$ gebe $u(t)$ die Masse des Stoffes im Behälter nach t Minuten in kg an. Der Behälter sei zu Beginn leer.

a) Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenz $u(t+\tau) - u(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $u(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u näherungsweise die Differentialgleichung $u'(t) = -\frac{1}{10}u(t) + 20$, $t \geq 0$, erfüllt. $\boxed{5}$

b) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, indem Sie die Differentialgleichung aus Teil a) lösen. $\boxed{9}$

c) Skizzieren und beschreiben Sie die zeitliche Entwicklung der Masse des Stoffes im Behälter. Was passiert für große Zeiten t? $\boxed{3}$

Lösung:

a) Durch die Produktion wächst die Masse des Stoffes zwischen den Zeitpunkten t Minuten und $t + \tau$ Minuten um 20τ kg. Im gleichen Zeitraum beträgt die Masse des Stoffes im Behälter näherungsweise $u(t)$ kg, so dass die Masse des Stoffes durch den Zerfall um ungefähr 10τ Prozent von $u(t)$, also $\frac{\tau}{10} \cdot u(t)$ kg sinkt. Somit ergibt sich näherungsweise

$$u(t+\tau) - u(t) = -\frac{\tau}{10}u(t) + 20\tau,$$

also

$$\frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} = -\frac{1}{10}u(t) + 20.$$

Mit dem Grenzübergang $\tau \searrow 0$ erhält man daher

$$u'(t) = -\frac{1}{10}u(t) + 20, \quad t \geq 0.$$

$\boxed{5}$

b) Nach Teil a) ist u die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = -\frac{1}{10}u(t) + 20, \quad t \geq 0, \quad \text{mit } u(0) = 0.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Problems $u_h' = -\frac{1}{10}u_h$ ist gegeben durch

$$u_h(t) = c \cdot e^{-\frac{t}{10}}, \qquad t \geq 0,$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Da die Inhomogenität eine Konstante ist, kann man für die spezielle Lösung u_p des inhomogenen Problems den Ansatz

$$u_p(t) = a, \quad t \geq 0,$$

wählen. Einsetzen in die Gleichung liefert die Bedingung

$$0 = u_p'(t) = -\frac{1}{10}u_p(t) + 20 = -\frac{a}{10} + 20,$$

also $a = 200$. Somit ergibt sich

$$u(t) = c \cdot e^{-\frac{t}{10}} + 200, \quad t \geq 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt werden muss, dass $u(0) = 0$ gilt. Es folgt $c = -200$ und somit

$$u(t) = 200 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right), \quad t \geq 0.$$

$\boxed{9}$

c) Die Masse des Stoffes im Behälter wächst monoton, beginnt bei 0 kg und stabilisiert sich für große Zeiten in der Nähe von 200 kg. Es gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = 200$, wobei die Konvergenzrate exponentiell ist. (zusätzlich Skizze) $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff S in einem Lösungsmittel L aufgelöst wird, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge von S und zu der Differenz zwischen der Sättigungskonzentration und der momentanen Konzentration des schon aufgelösten Stoffs S. $u(t)$ bezeichnet die Menge des zur Zeit t gelösten Stoffs.

a) Zur Zeit $t_0 = 0$ werden in einen Behälter mit 100 kg des Lösungsmittels 10 kg des Stoffes S eingebracht. Die Sättigungskonzentration beträgt 1/4. Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenz $u(t+\tau) - u(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $u(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u die Differentialgleichung

$$u'(t) = \frac{k}{100} \cdot (10 - u)(25 - u)$$

erfüllt. $\boxed{5}$

b) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, indem Sie die Differentialgleichung aus Teil a) lösen. $\boxed{10}$
Zur Kontrolle: $u(t) = 10\left(1 + \frac{3}{2-5e^{0,15kt}}\right)$.

c) In der Lösung tritt noch die Proportionalitätskonstante k auf. Wie groß ist sie, wenn nach 10 Minuten eine Lösungskonzentration von 1/20 gemessen wird? $\boxed{4}$

d) Berechnen Sie, nach wieviel Minuten 80% des Stoffes aufgelöst sind. $\boxed{4}$

<u>Lösung:</u>

a) Die Änderung der Menge des aufgelösten Stoffes im kleinen Zeitintervall $[t, t+\tau]$, also $u(t+\tau) - u(t)$ ist proportional zu *zu der noch unaufgelösten Menge von S*, also zu $(10 - u(t))$ und *zu der Differenz zwischen der Sättigungskonzentration und der momentanen*

Konzentration des schon aufgelösten Stoffs S, also zu $\left(\frac{1}{4} - \frac{u(t)}{100}\right)$. Ferner ist sie proportional zur Länge des Zeitintervalls τ. Insgesamt erhalten wir

$$u(t+\tau) - u(t) = k \cdot \tau \cdot (10 - u(t)) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{u(t)}{100}\right) \tag{1}$$

mit einer Proportionalitätskonstante $k > 0$. Wir dividieren Gleichung (1) durch τ ziehen aus der zweiten Klammer den Faktor $\frac{1}{100}$ heraus und vollziehen den Grenzübergang $\tau \to 0$ und erhalten die behauptete Differentialgleichung

$$u' = \frac{k}{100} \cdot (10-u)(25-u)\,.$$

$\boxed{5}$

b) Wir rechnen mit dem Prinzip von der Trennung der Variablen

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{(10-z)\cdot(25-z)}\,dz = \int_{t_0}^{t} \frac{k}{100}\,d\tau = \frac{k}{100} \cdot t \tag{2}$$

Für die linke Seite der Gleichung (2) machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{(10-z)\cdot(25-z)} = \frac{A}{10-z} + \frac{B}{25-z}$$

und erhalten nach einfacher Rechnung $A = \frac{1}{15}$ und $B = -\frac{1}{15}$ Hiermit und wegen $u(t_0) = 0$ können wir die linke Seite von (2) weiter umformen:

$$\begin{aligned}
&\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{(10-z)\cdot(25-z)}\,dz \\
&\quad = \frac{1}{15}\int_0^{u(t)} \frac{1}{10-z}\,dz - \frac{1}{15}\int_0^{u(t)} \frac{1}{25-z}\,dz \\
&\quad = -\frac{1}{15}\ln\left(\frac{10-u(t)}{10}\right) + \frac{1}{15}\ln\left(\frac{25-u(t)}{25}\right) \\
&\quad = \frac{1}{15}\ln\left(\frac{25-u(t)}{25} \cdot \frac{10}{10-u(t)}\right) \\
&\quad = \frac{1}{15}\ln\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{25-u(t)}{10-u(t)}\right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Wir setzen die rechte Seite von (3) für die linke Seite in (2) ein, multiplizieren beide Seiten mit 15, wenden auf beiden Seiten die Exponentialfunktion an und multiplizieren beide

Seiten mit $\frac{5}{2}$, erhalten und formen weiter um

$$\begin{aligned}
\frac{25-u(t)}{10-u(t)} &= \frac{5}{2}\cdot e^{0,15kt}\\
1+\frac{15}{10-u(t)} &= \frac{5}{2}\cdot e^{0,15kt}\\
\frac{15}{10-u(t)} &= \frac{5}{2}\cdot\left(e^{0,15kt}-\frac{2}{5}\right)\\
\frac{10-u(t)}{15} &= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{e^{0,15kt}-\frac{2}{5}}\\
10-u(t) &= 6\cdot\frac{1}{e^{0,15kt}-\frac{2}{5}}\\
u(t) &= 10\left(1+\frac{3}{2-5e^{0,15kt}}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{10}$

c) Wir müssen die Gleichung

$$\frac{u(10)}{100}=\frac{1}{20}$$

lösen. Dazu setzen wir die gefundene Lösung ein und lösen nach k auf:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{100}\cdot 10\left(1+\frac{3}{2-5e^{0,15k10}}\right) &= \frac{1}{20}\\
k &= \frac{2}{3}\cdot\ln\left(\frac{8}{5}\right)\\
k &\approx 0,3133
\end{aligned}$$

Die Proportionalitätskonstante beträgt also 0,3133 wenn t in Minuten gemessen wird. $\boxed{4}$

d) Wir setzen das gefundene k ein und lösen die Gleichung

$$u(t)=8$$

nach t auf und erhalten $t\approx 26$. Nach ungefähr 26 Minuten sind also 80% des Stoffes aufgelöst. $\boxed{4}$

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\boxed{7}$

$$\ddot{u}-6\dot{u}+25u=0\,.$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des AWPs $\boxed{10}$

$$\ddot{u}-6\dot{u}+25u=3\cos(2t)\qquad u(0)=\dot{u}(0)=0\,.$$

<u>Lösung:</u>

a) Nach Kapitel IV, Satz 3.9 ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$u(t) = c_1 e^{3t} \sin(4t) + c_2 e^{3t} \cos(4t)\,.$$

$\boxed{7}$

b) Für die partikuläre Lösung machen wir nach dem Ähnlichkeitsprinizp den Ansatz

$$u_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$$

Die Ableitungen berrechnen sich zu

$$\begin{aligned} \dot{u}_p(t) &= -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) \\ \ddot{u}_p(t) &= -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) \end{aligned}$$

Wir setzen die Ableitungen in die Differentialgleichung ein, sortieren nach Cosinus- und Sinustermen und erhalten das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcl} -4A - 12B + 25A &=& 3 \\ -4B + 12A + 25B &=& 0 \end{array} \right|$$

mit der Lösung $A = \frac{7}{65}$ und $B = -\frac{4}{65}$. Damit haben wir die partikuläre Lösung

$$u_p(t) = \frac{7}{65}\cos(2t) - \frac{4}{65}\sin(2t)$$

mit der Ableitung:

$$\dot{u}_p(t) = -\frac{14}{65}\sin(2t) - \frac{8}{65}\cos(2t)$$

Um die Anfangsbedingungen $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ zu realisieren, müssen wir c_1, c_2 so wählen, dass

$$u_{\text{hom}}(0) = -u_p(0) = -\frac{7}{65} \tag{4}$$

$$\dot{u}_{\text{hom}}(0) = -\dot{u}_p(0) = \frac{8}{65} \tag{5}$$

Nach und mit den Notationen aus Kapitel IV, Beweis zu Satz 3.9 erhalten wir c_1, c_2 durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= A^{-1}(0) \begin{pmatrix} -\frac{7}{65} \\ \frac{8}{65} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{65} \\ \frac{8}{65} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{65} \begin{pmatrix} \frac{29}{4} \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also die Lösung

$$u(t) = \frac{1}{65}\left(7\cos(2t) - 4\sin(2t)\right) + \frac{e^{3t}}{65}\left(\frac{29}{4}\sin(4t) - 7\cos(4t)\right)\,.$$

$\boxed{10}$

Aufgabe 5: Gegeben sei das DglSys

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& 1 \\ y' &=& 2x \end{array} \right. \tag{6}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems. $\boxed{3}$

b) Bestimmen Sie das Phasenportrait dieses Systems und skizzieren Sie es. $\boxed{9}$

<u>Lösung:</u>

a) Zwei einfache Integrationen ergeben

$$\begin{array}{rcl} x(t) &=& t + c_1 \quad \text{und} \\ y(t) &=& \frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2 \end{array}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\boxed{3}$

b) Wir suchen eine Funktion $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die konstant auf den Trajektorien von (6) ist: Mit einfachen Rechnungen erhalten wir

$$\begin{array}{rl} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t), y(t)) = 0 \\ \Leftarrow & \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \cdot 1 + \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \cdot x = 0 \\ \Leftarrow & \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = x \quad \wedge \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = -1 \\ \Leftarrow & H(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - y \end{array}$$

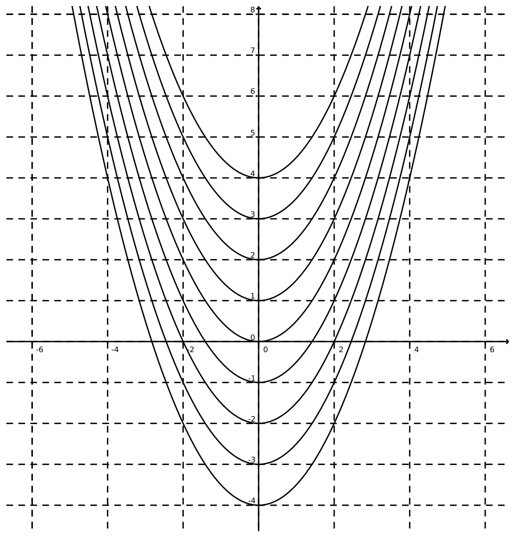
Die Trajektorien müssen also innerhalb der Niveaulinien von H verlaufen, die durch die Gleichung

$$\frac{1}{2}x^2 - y = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ bestimmt sind. Wir lösen diese Gleichung nach y auf und erhalten

$$y = \frac{1}{2}x^2 - c$$

Das Phasenportrait besteht also aus gestauchten Parabeln deren Scheitelpunkte auf der y-Achse liegen und die nach oben geöffnet sind. Wegen $x' = 1 > 0$ durchlaufen die Trajektorien diese Parabeln von links nach rechts.
Bemerkung: Man kann das Phasenportrait auch direkt aus den in Teil a) bestimmten expliziten Lösungen bestimmen.



Aufgabe 6: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird. 9

		wahr	falsch
1.	Die Lösung der Differentialgleichung $y' = e^{-y}$, $t \geq 0$, mit $y(0) = 0$ ist beschränkt.		X
2.	Die Gleichung $y' = t - t^3 y^2$ führt mit der Substitution $z(t) = (y(t))^{-1}$ auf eine lineare Differentialgleichung für z.		X
3.	Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Zahlen mit $a_0 = a_1 = 1$, so ist die Folge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.	X	
4.	Die Differentialgleichung $y' = y \cdot (2,41 - y) \cdot (y - 1,06)$ hat genau drei stationäre Lösungen.	X	
5.	Eine Population, die nach endlicher Zeit ausstirbt, kann näherungsweise durch eine logistische Differentialgleichung beschrieben werden.		X
6.	Wirkt auf jeden Körper, der sich in der Höhe $h > 0$ über der Erdoberfläche befindet, eine zum Erdmittelpunkt gerichtete Kraft vom Betrag $\frac{C}{(h+R)^2}$ mit Konstanten $C > 0$ und $R > 0$, so wird der zeitliche Verlauf der Höhe $h(t)$ eines senkrecht reibungsfrei fallenden Körpers der Masse m durch die Differentialgleichung $m \cdot (h+R)^2 \cdot h'' + C = 0$ beschrieben.	X	

Erläuterungen:

1. Mit der Methode der getrennten Variablen gilt

$$\int\limits_0^{y(t)} e^z \, \mathrm{d}z = \int_0^t 1 \, \mathrm{d}s = t,$$

also $e^{y(t)} - 1 = t$ und somit $y(t) = \ln(t+1)$ für $t \geq 0$.

2. Es gilt
$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -t \cdot y^{-2} + t^3 = -tz^2 + t^3, \quad t \geq 0.$$
Dies ist keine lineare Differemtialgleichung für z.

3. Nach Aufgabe 4c) von Übungsblatt 3 ist die Folge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und somit auch beschränkt.

4. Die stationären, also konstanten, Lösungen der Differentialgleichung sind $y_1(t) \equiv 0$, $y_2(t) \equiv 2,41$ und $y_3(t) \equiv 1,06$.

5. siehe die Diskussion der logistischen Differentialgleichung in Kapitel II 3.9 (nach meiner Zählung)

6. Nach Newtion gilt $m \cdot h'' = -\frac{C}{(h+R)^2}$, da die Kraft senkrecht nach unten gerichtet ist. Offenbar ist diese Gleichung äquivalent zur behaupteten Gleichung.