Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 06.06.2012

Probeklausur zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren"

(keine Abgabe, eine Musterlösung erscheint Montag, den 09.07.2012 um 12.00 Uhr)

Aufgabe 1: In einem Wald leben zu Beginn 100 Rehe. In jedem Jahr werden durchschnittlich von jedem am Anfang des Jahres lebenden Reh 0,8 Junge geboren, und 30 Prozent der am Anfang des Jahres lebenden Rehe sterben im Verlauf des Jahres durch einen natürlichen Tod. Außerdem tötet der für den Wald zuständige Jäger pro Jahr k Rehe. Für $n \in \mathbb{N}$ gebe a_n die Anzahl der Rehe in dem Wald am Ende des n-ten Jahres an.

a) Stellen Sie eine Differenzengleichung auf, die $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ näherungsweise erfüllt. $\boxed{3}$

b) Berechnen Sie a_n, $n \in \mathbb{N}$, explizit. $\boxed{9}$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil b) das maximale $k \in \mathbb{N}$, so dass die Rehe in diesem Wald niemals aussterben. $\boxed{4}$

Aufgabe 2: In einer Fabrik wird ein chemischer Stoff hergestellt und in einem Behälter gelagert. Da der Stoff instabil ist, zerfallen pro Minute 10 Prozent des im Behälter vorhandenen Stoffes. Durch die Produktion kommen pro Minute 20 kg des Stoffes in den Behälter hinzu. Für $t \geq 0$ gebe $u(t)$ die Masse des Stoffes im Behälter nach t Minuten in kg an. Der Behälter sei zu Beginn leer.

a) Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenz $u(t+\tau) - u(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $u(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u näherungsweise die Differentialgleichung $u'(t) = -\frac{1}{10}u(t) + 20$, $t \geq 0$, erfüllt. $\boxed{5}$

b) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, indem Sie die Differentialgleichung aus Teil a) lösen. $\boxed{9}$

c) Skizzieren und beschreiben Sie die zeitliche Entwicklung der Masse des Stoffes im Behälter. Was passiert für große Zeiten t? $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff S in einem Lösungsmittel L aufgelöst wird, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge von S und zu der Differenz zwischen der Sättigungskonzentration und der momentanen Konzentration des schon aufgelösten Stoffs S. $u(t)$ bezeichnet die Menge des zur Zeit t gelösten Stoffs.

a) Zur Zeit $t_0 = 0$ werden in einen Behälter mit 100 kg des Lösungsmittels 10 kg des Stoffes S eingebracht. Die Sättigungskonzentration beträgt 1/4. Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenz $u(t+\tau) - u(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $u(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u die Differentialgleichung

$$u'(t) = \frac{k}{100} \cdot (10 - u)(25 - u)$$

erfüllt. $\boxed{5}$

b) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, indem Sie die Differentialgleichung aus Teil a) lösen. $\boxed{10}$
Zur Kontrolle: $u(t) = 10\left(1 + \frac{3}{2-5e^{0,15kt}}\right)$.

c) In der Lösung tritt noch die Proportionalitätskonstante k auf. Wie groß ist sie, wenn nach 10 Minuten eine Lösungskonzentration von 1/20 gemessen wird? $\boxed{4}$

d) Berechnen Sie, nach wieviel Minuten 80% des Stoffes aufgelöst sind. $\boxed{4}$

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\boxed{7}$

$$\ddot{u} - 6\dot{u} + 25u = 0\,.$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des AWPs $\boxed{10}$

$$\ddot{u} - 6\dot{u} + 25u = 3\cos(2t) \qquad u(0) = \dot{u}(0) = 0\,.$$

Aufgabe 5: Gegeben sei das DglSys

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= 2x \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems. $\boxed{3}$

b) Bestimmen Sie das Phasenportrait dieses Systems und skizzieren Sie es. $\boxed{9}$

Aufgabe 6: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.

		wahr	falsch
1.	Die Lösung der Differentialgleichung $y' = e^{-y}$, $t \geq 0$, mit $y(0) = 0$ ist beschränkt.		
2.	Die Gleichung $y' = t - t^3 y^2$ führt mit der Substitution $z(t) = (y(t))^{-1}$ auf eine lineare Differentialgleichung für z.		
3.	Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Zahlen mit $a_0 = a_1 = 1$, so ist die Folge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.		
4.	Die Differentialgleichung $y' = y \cdot (2,41 - y) \cdot (y - 1,06)$ hat genau drei stationäre Lösungen.		
5.	Eine Population, die nach endlicher Zeit ausstirbt, kann näherungsweise durch eine logistische Differentialgleichung beschrieben werden.		
6.	Wirkt auf jeden Körper, der sich in der Höhe $h > 0$ über der Erdoberfläche befindet, eine zum Erdmittelpunkt gerichtete Kraft vom Betrag $\frac{C}{(h+R)^2}$ mit Konstanten $C > 0$ und $R > 0$, so wird der zeitliche Verlauf der Höhe $h(t)$ eines senkrecht reibungsfrei fallenden Körpers der Masse m durch die Differentialgleichung $m \cdot (h + R)^2 \cdot h'' + C = 0$ beschrieben.		