Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, 03.06.2012

Lineare DGL zweiter Ordnung

Betrachten wir das AWP

$$\begin{cases} x'' + ax' + bx = 0 \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = v_0\,, \end{cases}$$

mit $a, b, t_0, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz

$$x(t) = c\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

somit $x'(t) = \lambda c\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda x(t)$ und $x''(t) = \lambda^2 c\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda^2 x(t)$ führt auf

$$\lambda^2 x(t) + a\lambda x(t) + bx(t) = 0$$

und $x'(t_0) = v_0 = \lambda x(t_0) = \lambda x_0$, also für $x_0 = v_0 = 0$ dann $x(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ oder sonst

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0\,,$$

was sich zu

$$\left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2 + d = 0 \qquad \text{mit } d := \frac{a^2}{2} - b$$

umformen lässt. Hierbei ist d eine Diskriminante, sie teilt die verschiedenen Lösungen auf in die Fälle:

- Ist $d > 0$, so liefert die p-q-Formel

  $$\lambda = -\frac{a}{2} + \sqrt{d} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = -\frac{a}{2} - \sqrt{d}$$

  und damit sind sowohl

  $$x_1(t) = \xi_1\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{d}\right)t} \quad \text{als auch} \quad x_2(t) = \xi_1\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{2}-\sqrt{d}\right)t}$$

  Lösungen der DGL. Und da die DGL linear in $x(t)$ ist, ist auch deren Summe

  $$x(t) = \xi_1\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{d}\right)t} + \xi_2\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{2}-\sqrt{d}\right)t} \qquad \text{mit } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$$

  eine Lösung, bzw. die Lösungsmenge wird durch eben diese x mit $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ bestimmt.

  Um das AWP zu lösen, also um zu den Anfangswerten $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = v_0$ entsprechend $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zu finden (dass es diese überhaupt für alle Startwerte gibt, haben wir noch gar nicht gezeigt), stellen wir fest, dass genauso

  $$x(t) = \xi_1\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{d}\right)(t-t_0)} + \xi_1\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{2}-\sqrt{d}\right)(t-t_0)} \qquad \text{mit } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$$

für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die DGL löst. Hiermit können wir Anfangswerten für $t_0 \neq 0$ begegnen, als sei $t_0 = 0$:
Zunächst bestimmen wir noch die Ableitung der Lösungen

$$\begin{aligned} x'(t) = &\left(-\frac{a}{2} + \sqrt{d}\right) \xi_1 \,\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{w}+\sqrt{d}\right)(t-t_0)} \\ &+ \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{d}\right) \xi_2 \,\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{w}-\sqrt{d}\right)(t-t_0)} \end{aligned}$$

und erhalten trotz der unhandlich erscheinenden Form ganz leicht

$$x_0 = x(t_0) = \xi_1 \,\mathrm{e}^0 + \xi_2 \,\mathrm{e}^0 = \xi_1 + \xi_2$$

und

$$\begin{aligned} v_0 = x'(t_0) &= \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{d}\right) \xi_1 \,\mathrm{e}^0 + \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{d}\right) \xi_2 \,\mathrm{e}^0 \\ &= \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{d}\right) \xi_1 + \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{d}\right) \xi_2 \\ &= \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{d}\right) (\xi_1 + \xi_2) - 2\sqrt{d}\xi_2 \,. \end{aligned}$$

Somit ist $\xi_2 = \frac{\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{d}\right)x_0 - v_0}{2\sqrt{d}}$ und $\xi_1 = x_0 - \xi_2$ und wir haben eine Lösung des AWP.

- Ist $d < 0$, so hat λ keine reellen Lösungen. Aber es passiert etwas sehr Bemerkenswertes:
  Gehen wir über auf den algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper $\mathbb{C}$, so können wir wieder die p-q-Formel anwenden, zwei (komplexe) Lösungen für λ finden und damit auch eine Menge von komplexen Lösungen für x. Das Besondere ist: In dieser Menge befindet sich eine Teilmenge von rein reellen Lösungen und wir finden für jedes Paar an reellen Anfangswerten $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ eine reelle Lösung x!

  Mit $d < 0$ ist $-d > 0$ und wir erhalten mit der p-q-Formel

$$\lambda = -\frac{a}{2} + i\sqrt{-d} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = -\frac{a}{2} - i\sqrt{-d}\,,$$

  und somit analog zum Fall $d > 0$

$$x(t) = \xi_1 \,\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{2}+i\sqrt{-d}\right)t} + \xi_2 \,\mathrm{e}^{\left(-\frac{a}{2}-i\sqrt{-d}\right)t} \qquad \text{mit } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}\,.$$

  Aufgrund von $\mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ gilt ferner

$$\begin{aligned} x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} \quad &\left(\xi_1 \cos(+\sqrt{-d}t) + i\xi_1 \sin(+\sqrt{-d}t)\right) \\ &+ \left(\xi_2 \cos(-\sqrt{-d}t) + i\xi_2 \sin(-\sqrt{-d}t)\right) \end{aligned}$$

  und zusammengefasst

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} \left((\xi_1 + \xi_2)\cos(\sqrt{-d}t) + i(\xi_1 - \xi_2)\sin(\sqrt{-d}t)\right) \,.$$

Bis auf Vielfache führt genau die Wahl von $\xi_1 = \frac{1}{2}c_1 - i\frac{1}{2}c_2$ und $\xi_2 = \frac{1}{2}c_1 + i\frac{1}{2}c_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ auf die reellen Lösungen

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t}\left(c_1\cos(\sqrt{-d}t) + c_2\sin(\sqrt{-d}t)\right) .$$

Um das AWP zu lösen, also um zu den Anfangswerten $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = v_0$ entsprechend $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zu finden (dass es diese überhaupt für alle Startwerte gibt, haben wir noch gar nicht gezeigt), stellen wir fest, dass genauso

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}(t-t_0)}\left(c_1\cos(\sqrt{-d}(t-t_0)) + c_2\sin(\sqrt{-d}(t-t_0))\right) .$$

für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die DGL löst. Hiermit können wir Anfangswerten für $t_0 \neq 0$ begegnen, als sei $t_0 = 0$:
Zunächst bestimmen wir noch die Ableitung der Lösungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}(t-t_0)}\Big(-\frac{a}{2}c_1\cos(\sqrt{-d}(t-t_0)) - \frac{a}{2}\sin(\sqrt{-d}(t-t_0)) \\ &\qquad + \sqrt{-d}c_2\cos(\sqrt{-d}(t-t_0)) - c_1\sqrt{-d}\sin(\sqrt{-d}(t-t_0))\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}(t-t_0)}\Big(\Big(-\frac{a}{2}c_1 + \sqrt{-d}c_2\Big)\cos(\sqrt{-d}(t-t_0)) \\ &\qquad + \Big(-\frac{a}{2}c_2 - c_1\sqrt{-d}\Big)\sin(\sqrt{-d}(t-t_0))\Big) \end{aligned}$$

und erhalten trotz der unhandlich erscheinenden Form ganz leicht

$$x_0 = x(t_0) = \mathrm{e}^0\left(c_1\cos 0 + c_2\sin 0\right) = c_1$$

und

$$\begin{aligned} v_0 = x'(t_0) &= \mathrm{e}^0\Big(\Big(-\frac{a}{2}c_1 + \sqrt{-d}c_2\Big)\cos 0 + \Big(-\frac{a}{2}c_2 - c_1\sqrt{-d}\Big)\sin 0\Big) \\ &= \Big(-\frac{a}{2}c_1 + \sqrt{-d}c_2\Big) , \end{aligned}$$

somit $c_1 = x_0$ und $c_2 = \frac{1}{\sqrt{-d}}\left(v_0 + \frac{a}{2}x_0\right)$. Das heißt, wir finden zu jedem Paar von Anfangswerten eine Lösung

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}(t-t_0)}\left(x_0\cos(\sqrt{-d}(t-t_0)) + \frac{1}{\sqrt{-d}}\left(v_0 + \frac{a}{2}x_0\right)\sin(\sqrt{-d}(t-t_0))\right) .$$

- Ist $d = 0$, so ist $\lambda = -\frac{a}{2}$ und wir erhalten als Lösungsmenge der DGL

$$x(t) = \xi\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} \quad \xi \in \mathbb{R} .$$

Aber unsere Lösungsmenge muss zu Startwerten $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ jeweils eine Lösung bieten, unser Lösungsraum ist allerdings eindimensional; hier fehlt etwas! Setzen wir die Variation der Konstanten an, um dies aufzuspüren:

Sei also $x(t) = \xi(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t}$, dann erhalten wir die Ableitungen

$$x'(t) = \xi'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} - \frac{a}{2}\xi(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t}$$

und

$$\begin{aligned} x''(t) &= \xi''(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} - \frac{a}{2}\xi'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} - \frac{a}{2}\xi'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} + \frac{a^2}{4}\xi(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} \\ &= \xi''(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} - a\xi'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} + \frac{a^2}{4}\xi(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t}\ . \end{aligned}$$

Nun ist $x(t) = \xi(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t}$ genau dann eine Lösung der DGL, wenn sie diese erfüllt. Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} & x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \xi''(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} - \frac{a}{2}\xi'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} - \frac{a}{2}\xi'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} + \frac{a^2}{4}\xi(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} \\ & \quad + a\xi'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} - \frac{a^2}{2}\xi(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} \\ & \quad + b\xi(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \xi''(t) - a\xi'(t) + \frac{a^2}{4}\xi(t) + a\xi'(t) - \frac{a^2}{2}\xi(t) + b\xi(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \xi''(t) + \underbrace{\left(-\frac{a^2}{4} + b\right)}_{=d}\xi(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \xi''(t) = 0 \end{aligned}$$

Gilt also $\xi''(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, somit gilt, dass ξ ein Polynom höchstens ersten Grades ist, dann führt unser für die Variation der Konstanten gemachter Ansatz $x(t) = \xi(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t}$ auf eine Lösung der DGL. Wir erhalten somit $\xi(t) = c_1 + c_2 t$ also

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} + c_2 t\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Prüfen wir abermals, ob wir nach Übergang zu

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}(t-t_0)} + c_2 t\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}(t-t_0)} \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

mit ξ_1 und ξ_2 die Anfangswerte erfüllen können. Es ist

$$x_0 = x(t_0) = c_1\,\mathrm{e}^0 + c_2 0\,\mathrm{e}^0 = c_1\ .$$

Leiten wir ab

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{a}{2}c_1)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} + c_2)\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} + c_2 t\left(-\frac{a}{w}\right))\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} \\ &= \left(-\frac{a}{2}c_1 + c_2\right)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} + c_2 t\left(-\frac{a}{2}\right))\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}t} \end{aligned}$$

und setzen ein

$$v_0 = x'(t_0) = \left(-\frac{a}{2}c_1 + c_2\right) \mathrm{e}^0 + c_2 0 \left(-\frac{a}{2}\right) \mathrm{e}^0 = -\frac{a}{2}c_1 + c_2\,,$$

so erhalten wir $c_1 = x_0$ und $c_2 = v_0 + \frac{a}{2}x_0$ und damit ist

$$x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}(t-t_0)} + \left(v_0 + \frac{a}{2}x_0\right) t\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}(t-t_0)}$$

eine Lösung des AWP.

Es existiert somit für jedes Paar von Anfangswerten für alle $a, b \in \mathbb{R}$ eine Lösung, in Aufgabe 4 auf Übungsblatt 7 haben wir die Eindeutigkeit gezeigt, wir resümieren in:

Satz 3.8 (Zusammenfassender Satz)
Es seien $a, b, t_0, x_0, v_0 \in \mathbb{R}$.

Das AWP $x'' + ax' + bx = 0$, $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = v_0$ besitzt stets eine eindeutige Lösung x auf ganz $\mathbb{R}$. Je nach Form der Diskriminante $d = \frac{a^2}{4} - b$ kann diese dargestellt werden durch

i) $x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ *mit* $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{d}$, *falls* $d > 0$.

ii) $x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} + c_2 t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ *mit* $\lambda = -\frac{a}{2}$, *falls* $d = 0$.

iii) $x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$ *mit* $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$, *falls* $d < 0$.