Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 23.06.2012

11. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“

(Abgabe: Freitag, den 29.06.2012, bis 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

Hinweis: Bei den ersten drei Aufgaben des Blatts handelt es sich um alte Klausuraufgaben. Sie sollen ihnen einen Eindruck vom zu erwartenden Schwierigkeitslevel der Aufgaben vermitteln

Aufgabe 1: Eine Flüssigkeit in einem großen Becken hat eine Temperatur von 100 Grad Celsius, während die Außenluft eine Temperatur von 20 Grad Celsius hat. Durch die natürliche Abkühlung sinkt die Temperatur im Becken pro Minute um 1 Prozent der Differenz zwischen Becken- und Außentemperatur. Durch eine Kühlanlage sinkt die Temperatur im Becken pro Minute zusätzlich um 2 Grad Celsius. Für $t \geq 0$ gebe $u(t)$ die Temperatur im Becken in Grad Celsius nach t Minuten an.

a) Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenz $u(t+\tau) - u(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $u(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u näherungsweise die Differentialgleichung $u'(t) = -\frac{1}{100}u(t) - \frac{9}{5}$, $t \geq 0$, erfüllt. $\boxed{1}$

b) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, indem Sie die Differentialgleichung aus Teil a) lösen. $\boxed{1}$

c) Skizzieren und beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur im Becken. Wie lange dauert es, bis die Temperatur im Becken 40 Grad Celsius beträgt? $\boxed{1}$

Aufgabe 2: Es sei bekannt, dass sich eine Population y von Bakterien näherungsweise gemäß der Differentialgleichung $y' = 3 \cdot y - a \cdot y^2$ entwickelt, wobei $y(t)$ die Anzahl der Individuen der Population zur Zeit $t \geq 0$, gemessen in Stunden, angibt. Die Konstante $a > 0$ sei zunächst nicht bekannt. An einem Tag wurde festgestellt, dass die Population um 13 Uhr aus 200 Individuen und um 14 Uhr aus 250 Individuen bestand.

a) Interpretieren Sie die beiden Terme $3 \cdot y$ und $-a \cdot y^2$ im Hinblick auf die berücksichtigten Prozesse. $\boxed{1}$

b) Bestimmen Sie die Konstante $a > 0$ durch Lösen der Differentialgleichung unter Verwendung einer geeigneten Anfangsbedingung. $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Beurteilen Sie nach expliziter Berechnung der Lösung, ob das Modell

$$\begin{cases} y' = 2 \cdot e^{3y}, & t > 0, \\ y(0) = a > 0, \end{cases}$$

zur Beschreibung von Explosionsvorgängen geeignet ist. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Wir betrachten das Gleichungssystem für die Relativbewegung im Zwei-Körperproblem:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -k\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

mit zwei postiven Konstanten μ und k. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der „Drehimpuls-vektor"

$$\vec{L} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

eine Erhaltungsgröße der Bewegung ist, d.h. $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$. Wir definieren den sogenannten Lenz-Vektor $\vec{\Lambda}$ vermöge

$$\vec{\Lambda} = \frac{\dot{\vec{r}}}{k} \times \vec{L} - \frac{\vec{r}}{r}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass der Lenz-Vektor ebenfalls eine Erhaltungsgröße der Bewegung ist. Machen Sie dabei Gebrauch von den folgenden elementaren Rechenregeln:

- der BAC-CAB-Regel: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- den Produktregeln
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}$

$\boxed{2}$

b) Nach Definition liegt $\vec{\Lambda}$ in der Bahnebene, also in der Ebene senkrecht zu $\vec{L}$. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Wie in der Vorlesung drücken wir den Vektor $\vec{r}$ mit Hilfe der Polarkoordinaten r und φ aus. Berechnen Sie das Skalraprodukt $\vec{\Lambda} \cdot \vec{r}$ auf zwei verschiedene Weisen und folgern sie daraus die Gleichung

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{\mu k} \cdot \frac{1}{1 + \Lambda\cos\varphi}\,. \tag{3}$$

Hinweis: In ihren Rechnungen könnte das Produkt $\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{L})$ auftauchen. In diesem Zusammenhang könnte die zyklische Vertauschungsregel

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

hilfreich sein. $\boxed{2}$

Bemerkung: Bei der Gleichung (3) handelt es sich genau um die in der Vorlesung hergeleitete Bahngleichung, es gilt also $p = \frac{L^2}{\mu k}$ und $\epsilon = \Lambda$. Mit dem Wissen um die Erhaltungsgröße $\vec{\Lambda}$ ist die Herleitung der Bahngleichung (3) sehr viel einfacher als der in der Vorlesung beschrittene Weg. Auch hier zeigt sich wieder der große Nutzen von Erhaltungsgrößen.