Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 30.06.2012

12. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren“

(Abgabe: Freitag, den 06.07.2012, bis 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Trajektorien und damit das Phasenportrait der angegebenen Systeme. Skizzieren Sie das Phasenportrait.

a) $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0$ $\boxed{1}$

b) $\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 1$ $\boxed{1}$

c) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$ $\boxed{1}$

d) $\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y^2$ $\boxed{1}$

Aufgabe 2: Ein Ball der Masse m wird vom Erdboden senkrecht nach oben geworfen. Bekanntlich lässt sich dieser Vorgang mit der Gleichung

$$m\ddot{x} = -mg \tag{1}$$

modellieren. Dabei ist $x(t)$ die Höhe des Balls über dem Erdboden zur Zeit t und g ist die Erdbeschleunigung.

a) Wie gewöhnlich sei v die Geschwindigkeit des Körpers, also $\dot{x} = v$. Verwandeln sie die Differentialgleichung (1) in ein Differentialgleichungssystem mit den Variablen x und v. $\boxed{1}$

b) Bestimmen Sie die Trajektorien und damit das Phasenportrait des in Aufgabenteil a) gewonnenen Systems. Skizzieren sie das Phasenportrait . $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Hier sollen Sie sich an ein Aufgabenformat gewöhnen, das in der Klausur benutzt werden wird.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.

		wahr	falsch
1.	Jede Lösung der Differenzengleichung $a_{n+1} = 5a_n - 2a_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ist divergent.		
2.	Die Lösung der Differentialgleichung $y' = \sqrt{y}$, $t \geq 0$, mit $y(0) = 1$ explodiert nach endlicher Zeit.		
3.	Eine Population, die sich gemäß der logistischen Differentialgleichung entwickelt und zur Zeit $t = 0$ aus einer positiven Zahl von Individuen besteht, stabilisiert sich für große Zeiten in der Nähe eines positiven Wertes.		
4.	Die zeitliche Entwicklung der Höhe h des Mittelpunktes einer Kugel, die sich an einer Feder hängend reibungsfrei bewegt, wird durch eine Differentialgleichung der Form $h'' = a \cdot h^2 - b \cdot g$ mit $a, b > 0$ beschrieben, wobei g die Erdbeschleunigung angibt.		
5.	Ein Prozess, der durch eine für alle Zeiten $t \geq 0$ positive Größe $y(t)$ mit $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$ charakterisiert ist, kann durch eine Differentialgleichung der Form $y' = -\frac{a}{y}$ mit $a > 0$ modelliert werden.		
6.	Die Funktion $y : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $y(t) := t^5$ für $t \geq 1$, ist die Lösung einer linearen Differentialgleichung.		

In der Klausur wird tatsächlich nur ihr Kreuz bewertet. In dieser Übung sollen sie ihre Überlegungen dokumentieren.