Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Thiel

Essen, den 15.04.2012

1. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren”

(Abgabe: Freitag, den 20.04.2012, bis 12.00 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

Aufgabe 1: Diese Aufgabe bezieht sich auf das Beispiel 1 aus der Vorlesung vom 11.04.2012.

a) Bestimmen sie für $a = 100\,\mathrm{m}$ und $d = 10$ bzw. $d = 50\,\mathrm{m}$ die positive Nullstelle $\bar{u}$ der Gleichung

$$\cosh(u) - 1 - \frac{2du}{a} = 0$$

bis auf 5 Dezimalstellen genau. Sie können dafür ein Verfahren nach eigener Wahl einsetzen. Für die Schulpraxis ist es interessant, ihr gewähltes Verfahren in einem Tabellenkalkulationsprogramm (z.B. Excel) zu implementieren. $\boxed{2}$

b) Bestimmen sie für die in Aufgabenteil a) genannten Daten die Länge des Kabels nach den Modellen 0, 1 und 2. Beurteilen Sie die Tauglichkeit der Modelle für diese beiden Datensätze. $\boxed{2}$

c) Stellen Sie Gleichungen für ein Modell auf, das zwischen Modell 1 und Modell 2 steht, indem sie den Cosinushyperbolicus bis zur 4. Ordnung entwickeln. Beurteilen Sie, ob dieses Modell noch einen Vorteil gegenüber dem Modell aus Variante 2 besitzt. $\boxed{1}$

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe soll die Formel aus Proposition 2 aus der Vorlesung hergeleitet werden. (Zugegeben, das hat mit Modellieren nur am Rande zu tun.)

$$\int^x \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh}(x)\right) \tag{1}$$

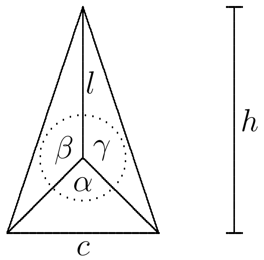
a) Zeige mit Hilfe der Substitution $y = \operatorname{arsinh}(t)$, $t = \sinh(y)$ die Gleichung

$$\int^x \sqrt{1+t^2}\,dt = \int^{\operatorname{arsinh}(x)} \cosh^2(y)\,dy. \tag{2}$$

$\boxed{1}$

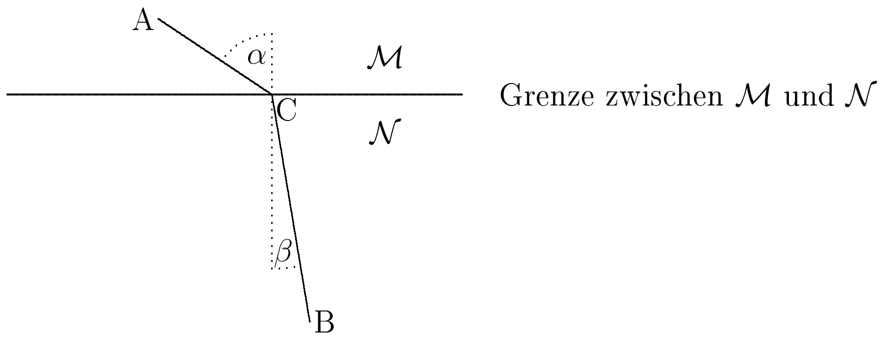
b) Folgern Sie aus der Formel (2) die Formel (1) indem Sie zur Umwandlung der rechten Seite von (2) dieselben Tricks anwenden, die auch bei dem Integral $\int \cos^2(x)\,dx$ zum Zuge kommen. $\boxed{1}$

Aufgabe 3:
In ein dreieckiges Werkstück aus Kunststoff sollen zur Verstärkung drei Metallverstrebungen eingebaut werden, die in einem Punkt miteinander verbunden werden.



Dabei seien das Werkstück und die Metallverstrebungen symmetrisch zur Mittelsenkrechten der Seite c. Es seien die Länge der Seite c und die Höhe h gegeben. Der Mittelpunkt der Metallverstrebung soll nun so gewählt werden, dass die Gesamtlänge der drei Metallstreben minimal ist, um die Verstrebung möglichst kostengünstig zu halten.
Bestimmen Sie die minimale Gesamtlänge der Metallverstrebung sowie den zugehörigen Abstand l des optimalen Mittelpunktes zum oberen Eckpunkt des Werkstückes. Berechnen Sie außerdem die Winkel α, β und γ am optimalen Mittelpunkt. Führen Sie die Rechnungen zunächst für allgemein vorgegebene Längen c und h mit $c \leq 3h$ durch und geben Sie anschließend die Ergebnisse für $c = 15\,cm$ und $h = 24\,cm$ an. $\boxed{2}$

Aufgabe 4:
Gegeben sei die folgende Situation:



Dabei seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ zwei Medien, deren Grenze durch die x-Achse mit den Koordinaten $(x, 0)$ gegeben sei. Der Punkt A habe die Koordinaten $(0, 1)$ und der Punkt B die Koordinaten $(2, -3)$. In $\mathcal{M}$ bewegt man sich mit der Geschwindigkeit v_1 und in $\mathcal{N}$ mit der Geschwindigkeit v_2, wobei $v_1, v_2 > 0$ gelte. Der Punkt C auf der Grenze der Medien habe die Koordinaten $(c, 0)$. Man möchte nun möglichst schnell von A nach B kommen und sucht den Punkt C, für den die Zeit, die man für den Weg von A über C nach B braucht, minimal ist.

a) Stellen Sie in Abhängigkeit von c eine Gleichung für die Zeit $T(c)$ auf, wobei $T(c)$ die Zeit bezeichne, die man für den Weg von A über C nach B braucht. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges $c_0 \in [0, 2]$ gibt, für das $T(c_0)$ minimal ist. $\boxed{2}$

b) Zeigen Sie, dass für $C = (c_0, 0)$ die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

erfüllt ist. $\boxed{1}$

Aufgabe 5:

a) Wie lange dauert es, bis ein Stein, den man aus einer Höhe von $1,50\,m$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $5\,\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben wirft, auf der Erde aufkommt? $\boxed{1}$

b) Wie lange dauert es, bis ein Stein, den man aus einer Höhe von $2\,m$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $7\,\frac{m}{s}$ waagerecht wegwirft, auf der Erde aufkommt? $\boxed{1}$

c) Ein Stein wird aus einer Höhe von $1\,m$ unter dem Winkel $\varphi = 30°$ (zur Horizontalen) mit der Anfangsgeschwindigkeit $4\,\frac{m}{s}$ schräg nach oben geworfen. Berechnen Sie die Länge des Weges, den der Stein zurückgelegt hat, wenn er auf der Erde aufkommt. $\boxed{2}$