UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
S. BAUER
C. HUBACSEK
C. THIEL

Essen, den 20.04.2012

2. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren"

(Abgabe: Freitag, den 27.04.2012, bis 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

Aufgabe 1: In einem Fluss leben 50 Forellen. In jedem Jahr schlüpfen pro Forelle 100 junge Forellen.

a) Man möchte wissen, wie viele Forellen nach n Jahren in dem Fluss leben, wenn keine Forelle stirbt. Stellen Sie die Situation durch eine Differenzengleichung dar und bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Forellen, die nach n Jahren in dem Fluss leben. $\boxed{1}$

b) Ein Fischer möchte jedes Jahr, nachdem alle Jungtiere geschlüpft sind, eine konstante Anzahl von k Forellen fischen. Stellen Sie diese Situation durch eine Differenzengleichung dar und bestimmen Sie das maximale k, so dass niemals alle Forellen aus dem Fluss gefischt werden. Geben Sie für dieses maximale k an, wie viele Forellen nach n Jahren ($n \in \mathbb{N}$) in dem Fluss leben. $\boxed{2}$

c) Aus diesem Fluss, den wir nun Fluss A nennen, werden nun jedes Jahr k Forellen gefischt, wobei k die in Teil b) bestimmte Konstante ist. In Fluss B leben 70 Forellen und es soll pro Jahr, nachdem alle Jungtiere geschlüpft sind, eine konstante Anzahl von l Forellen aus Fluss B gefischt werden. Wie groß darf l maximal sein, damit nach Ablauf jedes Jahres in Fluss B immer mindestens so viele Forellen leben wie in Fluss A? $\boxed{1}$

Aufgabe 2: Ein Polizeihauptkommissar möchte den Todeszeitpunkt eines Mordopfers feststellen. Er misst die Temperatur des Opfers um 12.36 Uhr, sie beträgt 27°C. Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz ist die Abkühlung eines Körpers proportional zur Differenz von Körpertemperatur und Außentemperatur. Leider kennt der Kommissar die Proportionalitätskonstante nicht. Deshalb misst er die Temperatur um 13.06 Uhr noch einmal und kommt auf 25°C. Die Außentemperatur betrug während der gesamten Zeit 20°C, die Körpertemperatur zum Todeszeitpunkt wird mit 37°C angesetzt.
Wann fand der Mord statt? $\boxed{4}$

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Differenzengleichung

$$a_{n+1} - a_n = b \cdot a_n + c, \quad n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\},$$

wobei $b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten seien und der Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben sei.

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Lösungen dieser Differenzengleichung und es gelte $a_0 > \tilde{a}_0$. Unter welcher Bedingung an b gilt $a_n \geq \tilde{a}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$? $\boxed{2}$

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Lösung obiger Differenzengleichung und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Lösung der Differenzengleichung

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \beta \cdot \alpha_n + \gamma, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Weiter gelte $a_0 \geq \alpha_0$, $a_0 \geq 0$, $c \geq 0$, $c \geq \gamma$ und $b \geq \beta \geq -1$. Beweisen Sie, dass dann $a_n \geq \alpha_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\boxed{2}$

Aufgabe 4:
Es seien $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei vorgegebene reelle Folgen. Weiter sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Lösung der Differenzengleichung

$$a_{n+1} = \alpha_n \cdot a_n + \beta_n, \quad n \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

a) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und es gelte $\alpha_n = \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das explizite Bildungsgesetz

$$a_n = \alpha^n \cdot a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \cdot \beta_{n-1-k} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. $\boxed{1}$

b) Beweisen Sie im allgemeinen Fall, wenn $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebig vorgegebene reelle Folge ist, das explizite Bildungsgesetz

$$a_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k\right) \cdot a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=n-k}^{n-1} \alpha_j\right) \cdot \beta_{n-1-k} \quad , n \in \mathbb{N}$$

für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\boxed{3}$

Mitteilung des Fachschaftsrats

Liebe Mathematikstudenten!

Es gibt Pläne, die Mathematikfakultät an einem neuen Standort in Essen zusammenzulegen. Informiert euch auf der Fachschaftshomepage (`http://www.fachschaft-mathe.de`; dort könnt ihr euch auch auf der Ankündigungs-Mailingliste eintragen), am schwarzen Brett gegenüber der Fachschaft oder im Gespräch mit Kommilitonen (insbesondere Fachschaftsratsmitgliedern). Beteiligt euch an der Diskussion und bildet euch eine Meinung!

Wir werden in der nächsten Woche (Mi, 25.4.) auch in dieser Vorlesung Unterschriftenlisten herumgeben, auf denen ihr zu den Plänen Stellung beziehen könnt.

Die Listen werden auch im Fachschaftsraum ausliegen.

Unabhängig davon, was ihr von dem Umzug haltet, ist es wichtig, dass ihr möglichst bald mit Vorschlägen, Wünschen und Forderungen an das neue Gebäude dazu beitragt, dass im Falle eines Umzugs dieser so wenig unangenehm wie möglich wird. Ihr erreicht uns unter fsr-mathe@lists.uni-due.de.

Stetige Grüße
Euer Fachschaftsrat Mathematik