Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 27.04.2012

3. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren"

(Abgabe: Freitag, den 04.05.2012, bis 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

Aufgabe 1+2: In der Vorlesung wurde der folgende Satz behauptet:

Satz: Es sei I ein Intervall, $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig . Es gebe ein $x_0 \in I$ mit

i) $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I$,

ii) $f(x) - x < 0$, für alle $x \in I \cap (\, x_0 \, , \, \infty \,)$.

Dann gilt für jede Wahl von $a_0 \in I$, dass die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = f(a_n)$ gegen x_0 konvergiert.

a) Beweisen Sie diesen Satz. $\boxed{2}$

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Lösung der Differenzengleichung

$$a_{n+1} = \sin(a_n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

mit $a_0 \in \{1, \frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi\}$. Zeigen Sie für jeden der drei Werte von a_0, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$. $\boxed{2}$

c) Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Lösung der Differenzengleichung

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n} + 2, \qquad n \in \mathbb{N},$$

mit $b_0 \in \{5, 125, 5123\}$. Zeigen Sie für jeden der drei Werte von b_0, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} b_n$. $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Wir definieren eine Fibonacci Folge zu beliebigen Anfangswerten b_0 und b_1 mit der bekannten Kaninchen-Rekursion von Fibonacci.

$$b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Zeigen Sie, dass (b_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ folgender expliziter Formel genügt.

$$b_n = \frac{b_1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^n - \psi^n) + \frac{b_0}{\sqrt{5}} \cdot \left(\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}\right).$$

Hierbei sind $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Hinweis: Sie können diese Formel durch Induktion beweisen. Für dieses Vorgehen müssen Sie die Formel vorher kennen. Sie können aber auch probieren, diese Formel durch Lösen eines linearen Gleichungssystems wie in der Vorlesung herzuleiten. Bei diesem Weg hätten Sie die Formel nicht schon vorher kennen müssen. $\boxed{2}$

b) Bestimmen Sie bei vorgegebenen positiven Zahlen b_0 und b_1 den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$. $\boxed{2}$

c) Die Essener Kaninchen sind fruchtbarer als die Kaninchen von Fibonacci. Jedes geschlechtsreife Paar wirft jede Woche statt einem Paar zwei Paare neugeborener Kaninchen. Auch diese Kaninchen brauchen wieder eine Woche um geschlechtsreif zu werden und sind unsterblich. Anfangs sei wieder ein neugeborenes Paar vorhanden. Finden Sie eine Modellierung und bestimmen Sie eine explizite Lösungsformel. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Herr B. hat einen Kredit P_0 aufgenommen. Die nominale jährliche Zinsrate beträgt r. Herr B hat pro Jahr einen Betrag x zur Verfügung um den Kredit zu bedienen und abzubezahlen.

i) Ermitteln Sie die nötige Laufzeit des Kredits bei m-maliger Verzinsung und bei kontinuierlicher Verzinsung. $\boxed{2}$

ii) Berechnen Sie, wieviel Geld Sie für einen Hauskauf nach dem Studium aufnehmen können. Treffen Sie dazu plausible Annahmen über Ihr zukünftiges Gehalt, den gültigen Zinssatz und die gewünschte Laufzeit. $\boxed{2}$