Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 04.05.2012

4. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren"

(Abgabe: Freitag, den 11.05.2012, bis 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

Aufgabe 1: In der Vorlesung wurde der folgende Satz behauptet:

Satz 3.9: Es seien $r, x_M, x_0 > 0$ und $x_M \neq x_0$. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems zur Logistischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x'(t) &= r \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{x_M}\right) \cdot x(t) && (1) \\ x(0) &= x_0 && (2) \end{aligned}$$

gegeben durch die Funktion

$$x(t) = x_M - \frac{x_M}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{rt}} \quad \text{für} \quad t \geq 0 \quad \text{und} \quad c = \frac{x_0}{x_M - x_0} \, .$$

Ferner gilt

i) $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_M$

ii) $x(t)$ ist streng monoton wachsend (fallend) für $x_0 < x_M$ ($x_0 > x_M$).

a) Beweisen Sie diesen Satz. $\boxed{2}$

b) Zeigen Sie dass $x(t)$ konvex auf allen Intervallen mit $x(t) \leq \frac{x_M}{2}$ und auf allen Intervallen mit $x(t) > x_M$ ist, sowie konkav auf allen Intervallen mit $\frac{x_M}{2} \leq x(t) < x_M$. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Wir modellieren beschränktes Wachstum mit der Logistischen Differentialgleichung (1) und (2).

a) Entdimensionalisieren Sie das Modell durch die Wahl geeigneter Skalen $\bar{x}$ und $\bar{t}$. Welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es? $\boxed{2}$

b) Welche Entdimensionalisierung ist geeignet für $x_0 << x_M$ in dem Sinne, dass das Weglassen kleiner Terme zu einem sinnvollen Modell führt? $\boxed{2}$

Aufgabe 3: In einem Wald gebe es h Hasen und f Füchse. Wir nehmen an, dass die Hasen immer genug Nahrung haben und außer den Füchsen keine Feinde haben und dass die Füchse sich nur von Hasen ernähren. In jedem Jahr werden pro Hase 0,78 Junge geboren und 8 Prozent der Hasen sterben durch einen natürlichen Tod. Außerdem beträgt für jeden Hasen die Wahrscheinlichkeit, dass er innerhalb eines Jahres von einem Fuchs getötet wird, ein Vierzigstel der zu Beginn des Jahres im Wald lebenden Füchse. Außerdem sterben in jedem Jahr 12 Prozent der Füchse, und die Anzahl der pro Fuchs in einem Jahr neugeborenen Jungen beträgt ein Fünfhundertstel der zu Beginn des Jahres im Wald lebenden Hasen. Uns interessiert nun, wie viele Füchse und wie viele Hasen am Ende des n-ten Jahres im Wald leben ($n \in \mathbb{N}$).

a) Stellen Sie für jede der Tierarten eine Differenzengleichung auf, die angibt, wie sich der Bestand dieser Tierart im Laufe des $(n+1)$-ten Jahres entwickelt hat ($n \in \mathbb{N}$). $\boxed{1}$

b) Wir nehmen an, dass sowohl die Anzahl der Füchse als auch die Anzahl der Hasen zu Beginn eines Jahres positiv sind. Geben Sie die Bedingung an, unter der beide Tierarten im Gleichgewicht sind, also von jeder der beiden Arten am Anfang eines Jahres genauso viele Tiere leben wie am Ende des Jahres. Wenn dies der Fall ist, spricht man auch von einem Gleichgewichtspunkt des Systems. $\boxed{1}$

c) Es sei $h = 80$ und $f = 15$. Berechnen Sie für $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ die Anzahl der Hasen und die Anzahl der Füchse, die am Ende des n-ten Jahres im Nationalpark leben. $\boxed{1}$

Aufgabe 4: Ein Körper der Masse m wird von der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Der Luftwiderstand soll mit dem *Stoke'schen Gesetz* $F_R = -cv$ für den Strömungswiderstand in viskosen Fluiden berücksichtigt werden, das für kleine Geschwindigkeiten sinnvoll ist. Dabei ist c ein von der Größe des Körpers abhängiger Koeffizient. Die Bewegung hänge von der Masse m der Geschwindigkeit v_0 sowie dem Reibungskoeffizienten c mit der Dimension $[c] = M/T$ ab. M sei dabei die Abkürzung für die Dimension Masse.

a) Bestimmen Sie die möglichen dimensionslosen Parameter des Problems. $\boxed{1}$

b) Wir betrachten das Anfangswertproblem für die Höhe des Körpers

$$mx''(t) = -cx'(t) - mg, \quad x(0) = 0\,, \quad x'(0) = v_0\,. \tag{3}$$

Entdimensionalisieren Sie die Differentialgleichung. Es gibt wieder mehrere Möglichkeiten. $\boxed{2}$

c) Diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten eines reduzierten Modells, wenn $\beta := \frac{cv_0}{mg} << 1$ ist. $\boxed{2}$