Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 11.05.2012

5. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren"

(Abgabe: Freitag, den 18.05.2012, bis 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

Aufgabe 1: In der Vorlesung wurde der folgende Satz behauptet:

Satz 1.2: Es seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $r, s \; : \; J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$
\begin{aligned}
y' &= r(t) \cdot y + s(t), \quad t \in J && (1)\\
y(t_0) &= y_0 && (2)
\end{aligned}
$$

gegeben durch die Funktion

$$y(t) = y_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t r(\tau)\,d\tau} + \int_{t_0}^t s(\tau) \cdot e^{\int_\tau^t r(\sigma)\,d\sigma}\,d\tau$$

Beweisen Sie diesen Satz, indem Sie

a) nachrechnen, dass y die Differentialgleichung (1) und die Anfangsbedingung (2) erfüllt.
Hinweis: Für die Funktion $F(t) = \int_a^t f(t,\, s)\,ds$ gilt nach Ana II unter geeigneten Voraussetzungen an f die folgende Ableitungsregel:

$$F'(t) = f(t,t) + \int_a^t \partial_t f(t,\, s)\,ds\ .$$

$\boxed{2}$

b) zeigen, dass die Lösung eindeutig ist. Wir setzen dazu $y_p(t) = \int_{t_0}^t s(\tau) \cdot e^{\int_\tau^t r(\sigma)\,d\sigma}\,d\tau$. Nehmen Sie an, dass z eine weitere Lösung von (1)-(2) ist und betrachten sie $\frac{y(t)-y_p(t)}{z(t)-y_p(t)}$. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Ein See habe ein Volumen von $1,5\,km^3$ Wasser. Pro Jahr strömen durch einen einmündenden Fluss $0,3\,km^3$ Wasser in den See, das Schadstoffe mit einer Konzentration von $500\,\frac{kg}{km^3}$ enthalte. Zusätzlich kommen durch am See liegende Fabriken pro Jahr $250\,kg$

Schadstoffe direkt in den See. Außerdem fließen pro Jahr $0,3\,km^3$ Wasser durch einen anderen Fluss wieder aus dem See hinaus. Wir nehmen an, dass sich die Schadstoffe stets sofort und gleichmäßig im See verteilen. Die Funktion $u(t)$ gebe den Schadstoffgehalt im See in kg nach t Jahren an ($t \geq 0$). Zur Zeit $t = 0$ enthalte der See $1000\,kg$ Schadstoffe.

a) Es sei $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Bestimmen Sie näherungsweise die Differenz $u(t+\tau) - u(t)$. Nehmen Sie dabei an, dass die Schadstoffkonzentration des zwischen den Zeitpunkten t und $t + \tau$ Jahren aus dem See abfließenden Wassers gleich ist und der Schadstoffkonzentration im See zur Zeit t entspricht. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u näherungsweise die Differentialgleichung $u' = -\frac{1}{5}u + 400$ für $t \geq 0$ erfüllt. $\boxed{1}$

b) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, durch lösen der in Teil a) erhaltenen Differentialgleichung. $\boxed{1}$

c) Skizzieren und beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf des Schadstoffgehaltes im See. $\boxed{1}$

Aufgabe 3: Wir betrachten eine Gruppe von Menschen, die alle dasselbe Alter haben. Die Funktion $y(t)$ gebe die Anzahl dieser Menschen an, die nach t Jahren noch leben ($t \geq 0$). Zu Beginn bestehe die Gruppe aus 100 000 Menschen. Die zeitliche Entwicklung von y werde durch die Differentialgleichung $y'(t) = -a(t) \cdot y(t)$, $t \geq 0$, beschrieben. Dabei werde die Sterbeintensität a im Laufe der Zeit immer größer und entwickle sich gemäß der Differentialgleichung $a' = \frac{1}{20}a$, $t \geq 0$, wobei $a(0) = \frac{1}{100}$ gelte.

a) Berechnen Sie zunächst die Funktion $a(t)$, $t \geq 0$, und lösen Sie dann das Anfangswertproblem, das $y(t)$, $t \geq 0$, erfüllt. $\boxed{1}$

b) Eine andere Gruppe von Menschen, die alle dasselbe Alter wie die zuvor betrachteten Menschen haben, sei durch eine Naturkatastrophe stark geschwächt und bestehe zu Beginn ebenfalls aus 100 000 Menschen. Diese Gruppe entwickle sich gemäß der Differentialgleichung $x'(t) = -a(t) \cdot x(t) - 10 \cdot e^{\frac{t}{20}}$, $t \geq 0$, wobei $x(t)$ die Anzahl der nach t Jahren noch lebenden Menschen dieser Gruppe angebe. Berechnen Sie die Funktion $x(t)$, $t \geq 0$. $\boxed{1}$

c) Beschreiben Sie die Unterschiede, die in der zeitlichen Entwicklung der beiden Gruppen auf lange Sicht auftreten. $\boxed{1}$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

a) $y' = \frac{4y}{t} + t^4$ für $t > 0$ $\boxed{1}$

b) $y' = y\tan(t) - 2\sin(t)$ für $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ $\boxed{1}$

c) $t^2 y' = 1 - y$ für $t < 0$ $\boxed{1}$

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

d) $y' = 2ty + t\,,\quad y(0) = 1$ $\boxed{1}$

e) $y' = \frac{2}{t}y + 2t^3,\quad y(2) = 20$ $\boxed{1}$