Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 18.05.2012

6. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren"

(Abgabe: Freitag, den 25.05.2012, bis 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

Aufgabe 1: Sie kennen alle das Phänomen, dass Sie gelernten Stoff mit der Zeit wieder vergessen. Dieses Vergessen soll mathematisch modelliert werden. Dazu sei $P(t)$ der Prozentsatz des Wissens, den Sie zur Zeit t noch beherrschen. Wir nehmen an, dass Sie zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ den gesamten Stoff konnten, also $P(0) = 100$. Ferner gehen wir davon aus, dass ein bestimmter Prozentsatz $0 < b < 100$ nie vergessen wird. Die Änderung des Prozentsatzes in dem kleinen Zeitintervall $[\,t\,,\,t+\tau\,]$ sei proportional zu τ und zur Differenz von $P(t)$ und b, also zum Prozentsatz des Stoffes, den Sie zur Zeit t noch vergessen können.

a) Bestimmen Sie durch einen Grenzübergang $\tau \to 0$ eine Diffentialgleichung und das AWP, das P erfüllt. $\boxed{1}$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem und untersuchen Sie die Lösung im Hinblick auf das Langzeitverhalten und Wendestellen. Skizzieren Sie die Lösung. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Es soll der Salzhaushalt einer biologischen Zelle mathematisch modelliert werden. Wir bezeichnen mit $c(t)$ die Salzkonzentration in der Zelle zur Zeit t. Die Zelle wird zur Zeit $t_0 = 0$ in eine Flüssigkeit mit der Salzkonzentration c_A gebracht. Nun wird die Zelle ihre Salzkonzentration mit der Zeit an die Außenkonzentration anpassen, in dem sie Salz aufnimmt oder abgibt. Wir nehmen dabei an, dass die Flüssigkeitsmenge in die die Zelle gebracht wird, so groß ist, dass der Salzaustausch die Salzkonzentration c_A nicht nennenswert beeinflusst.

a) Modellieren Sie diesen Prozess mit Hilfe einer Differentialgleichung. $\boxed{2}$

b) Diskutieren Sie die Lösungen für die beiden Fälle $c_A > c(0)$ und $c_A < c(0)$. $\boxed{1}$

Aufgabe 3: Eine Population y entwickle sich ähnlich des logistischen Prinzips, wobei nun die Sterberate proportional zu y^α mit einem $\alpha > 2$ sei. Somit entwickelt sich $y(t)$ gemäß

$$y' = a\,y - b\,y^\alpha, \quad t \geq 0, \quad \text{mit } y(0) = y_0 > 0,$$

wobei a und b positive Konstanten seien.

a) Lösen Sie das obige Anfangswertproblem und zeigen Sie insbesondere, dass die Lösung $y(t)$ für alle $t \geq 0$ existiert. $\boxed{2}$

b) Wie verhält sich die Population für $t \to \infty$? Vergleichen Sie das Verhalten der Population für große Zeiten t mit dem entsprechenden Verhalten der Population aus Beispiel IV 1.12 der Vorlesung. $\boxed{2}$

Aufgabe 4:
In einer chemischen Reaktion reagiert ein Atom Zink mit einem Atom Schwefel zu einem Molekül Zinksulfid. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich in einem Behälter a Mol Zink, b Mol Schwefel und noch kein Zinksulfid, wobei $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq b$ gelte. Die Funktion $u(t)$ gebe die Menge Zinksulfid in Mol im Behälter nach t Zeiteinheiten, $t \geq 0$, an. Dann erfüllt u die Differentialgleichung

$$u' = r \cdot (a - u) \cdot (b - u), \qquad t \geq 0,$$

wobei $r > 0$ eine Konstante ist.

a) Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, durch lösen des zugehörigen Anfangswertproblems. $\boxed{2}$

b) Wie verhalten sich die Stoffmengen von Zink, Schwefel und Zinksulfid für sehr große Zeiten t in Abhängigkeit von den zu Beginn vorhandenen Stoffmengen a und b? Welche Bedeutung könnte die Konstante r in diesem Modell haben? $\boxed{2}$

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils das maximale Intervall an, auf dem die Lösung existiert.

a) $y' = t \cdot e^{t^2 - 2y}$ mit $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$. $\boxed{1}$

b) $(1 + t^2)y' - \sqrt{y + 3} = 0$ mit $y(0) = y_0 \geq 0$. $\boxed{1}$